

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



METODA KONEČNÝCH PRVKŮ I

7. NOSNÍKOVÉ PRVKY

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Martin Fusek, Ph.D., Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3023-0



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	NOSNÍKOVÉ PRVKY	3
1.1	Základní teorie nosníků.....	4
1.2	Nosníkový prvek.....	6
1.2.1	Maticе tuhosti	8
1.2.2	Vektor zatížení.....	8
1.3	Nosníkový prvek s osovým zatížením.....	9
1.4	Obecný prostorový nosníkový prvek	11
1.5	Závěr	12
1.6	Cvičení.....	13
2	LITERATURA	26



1 NOSNÍKOVÉ PRVKY



OBSAH KAPITOLY

Jednodimenzionální, osově zatížený element, byl probrán v kapitolách v předchozích kapitolách. Je určen pro součásti, které jsou namáhány pouze tahovou nebo tlakovou silou. Příkladem můžou být například již zmíněné prutové soustavy. V této kapitole budou probrány jednodimenzionální prvky, které jsou schopny přenášet zatížení působící kolmo na osu prutu a způsobující ohyb. Budou použity poznatky z elementární teorie prutů, tzv. Euler-Bernoulliho teorie, probrána v základním kurzu pružnosti.



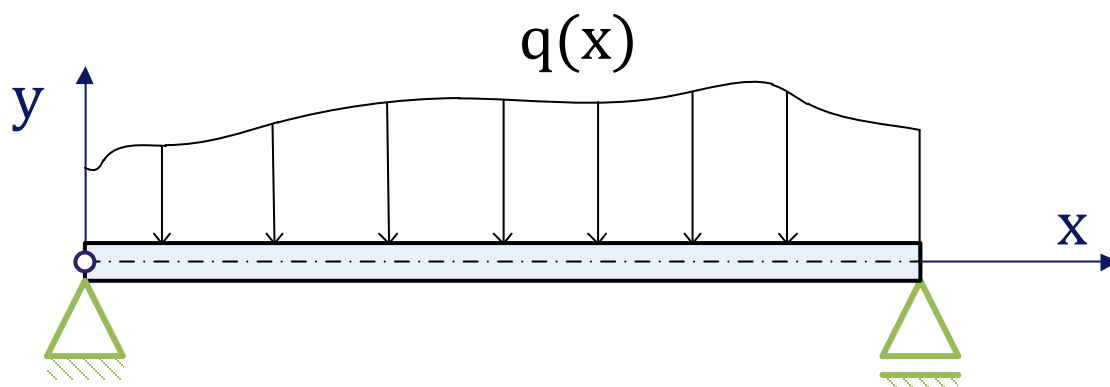
MOTIVACE:

V předchozích kapitolách jsme se seznámili se základní teorií metody konečných prvků. Byl odvozen základní systém rovnic metody a získané poznatky byly aplikovány na řešení nejjednodušších úloh pružnosti. Jednalo se o jednoduché úlohy vedoucí na problematiku tahu a tlaku. Dále byla řešena problematika prutových konstrukcí. V této přednášce si poznatky rozšíříme o problematiku nosníkových prvků. Takovéto prvky jsou použitelné pro řešení například přímých nosníků či po úpravě pro řešení rámových konstrukcí.



1.1 ZÁKLADNÍ TEORIE NOSNÍKŮ

Jednoduchý nosník je zobrazen na obrázku Obr. 1. Osa x souřadného systému je ztotožněna s osou prutu (se střednicí) a osa y představuje kolmý směr, ve kterém je určován průhyb nosníku. Osa z je kolmá na osu y a směřuje ven z obrázku.

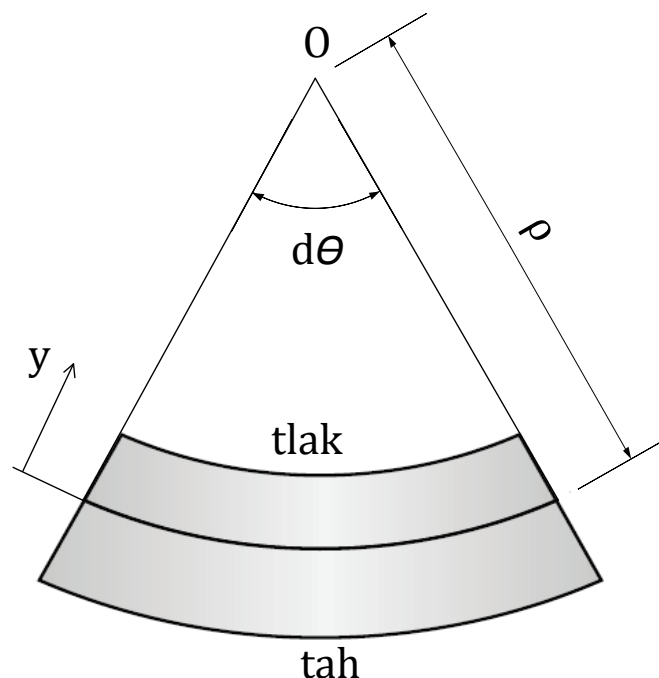


Obr. 1 - Jednoduchý nosník

Základní předpoklady pro odvození základních vztahů pro nosník jsou následující:

1. Nosník je zatížen pouze ve směru osy y .
2. Průhyb nosníku je malý v porovnání s charakteristickými rozměry nosníku.
3. Materiál nosníku je lineárně elastický, izotropní a homogenní.
4. Nosník je prizmatický a osy y a z představují hlavní centrální osy průřezu.

Uvažme diferenciální kousek nosníku o délce dx , viz Obr. 2. Horní část nosníku je stlačována, spodní tažena. Připomeňme, že střednicí prutu prochází neutrální osa (vrstva), kde není žádné napětí a nedochází zde k žádné osové deformaci. Poloměr křivosti neutrální osy je ρ , střed je označen jako písmeno O .



Obr. 2 - K odvození základních vztahů pro ohýbaný prvek

Prodloužení prutu v libovolném místě y (měřeno od neutrální osy!) je dána výrazem:



$$ds = (\rho - y)d\phi \quad (7.1)$$

Z předchozího výrazu lze odvodit přetvoření (deformaci) prutu ve tvaru:

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = -\frac{y}{\rho} \quad (7.2)$$

Poloměr křivosti rovinné křivky je dán výrazem:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (7.3)$$

kde $v = v(x)$ představuje prohnutí neutrální osy. Protože jsou uvažovány pouze malé posuvy, je možno předchozí výraz zjednodušit do tvaru:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (7.4)$$

Pak lze rovnici pro přetvoření (7.2) upravit do následujícího tvaru:

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.5)$$

Použitím Hookeova zákona pro jednoosou napjatost je možno vyjádřit napětí jako:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.6)$$

kde E představuje modul pružnosti v tahu. Dle této rovnice se napětí mění lineárně od osy y , tj. od neutrální osy.

V případě, že ve směru osy x nepůsobí žádné zatížení, musí být součet vnitřních sil, přes plochu průřezu, daných rovnicí (7.6) roven nule. Matematicky vyjádřeno:

$$F_x = \int_S \sigma_x dS = - \int_S Ey \frac{d^2v}{dx^2} dS = 0 \quad (7.7)$$

Protože křivost je konstantní pro libovolný průřez platí, že:

$$\int_S y dS = 0 \quad (7.8)$$

Tento výraz je splněn v případě, že střednice (osa $y = 0$) prochází těžištěm průřezu. Obdobně musí být splněna i momentová rovnice rovnováhy, tj. vnitřní ohybový moment na dané ploše (průřezu) musí být v rovnováze, takže:

$$M(x) = - \int_S y \sigma_x dS = E \frac{d^2v}{dx^2} \int_S y^2 dS = 0 \quad (7.9)$$

Integrální člen v předchozí rovnici představuje kvadratický moment plochy k ose z , ohybový moment je tedy možno vyjádřit ve tvaru:

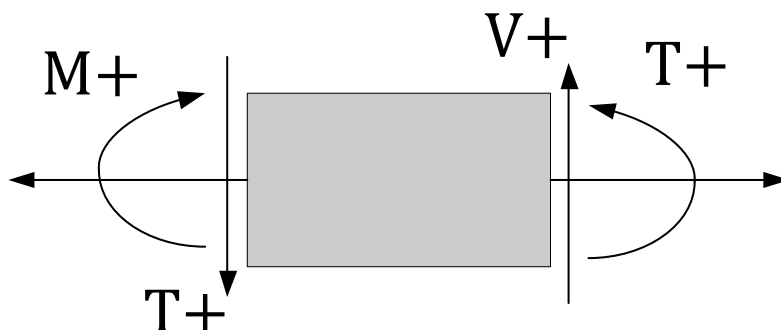
$$M(x) = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.10)$$

Kombinací rovnic (7.6) a (7.10) lze získat následující rovnici pro vyjádření normálového ohybového napětí:



$$\sigma_x = -\frac{M(x)y}{I_z} = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.11)$$

Záporné znaménko v rovnici (7.11) znamená, že když je nosník zatížen kladným ohybovým momentem (dle konvence, viz Obr. 3) a je bráno v úvahu znaménko souřadnice y (měřeno od neutrální osy) tak tahové (kladné) a tlakové (záporné) natětí je získáno ze správného znaménka.



Obr. 3 - Znaménková konvence

Rovnici průhybu, libovolného místa nosníku, lze získat z předchozí rovnice a má následující tvar:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (7.12)$$

1.2 NOSNÍKOVÝ PRVEK

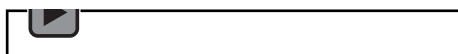
Využitím jednoduché nosníkové teorie, viz předchozí kapitola, je možno odvodit základní vztahy pro rovinný jednodimenzionální ohýbaný nosníkový prvek. Vlastnosti a chování elementu je vázáno na omezení popsána v předchozí kapitole. Charakteristiky elementu jsou následující:

1. Element má délku L a má pouze dva uzly na svých koncích.
2. Element může být napojen na ostatní elementy pouze přes své uzly.
3. Zatížení je na element přenášena pouze přes uzly.

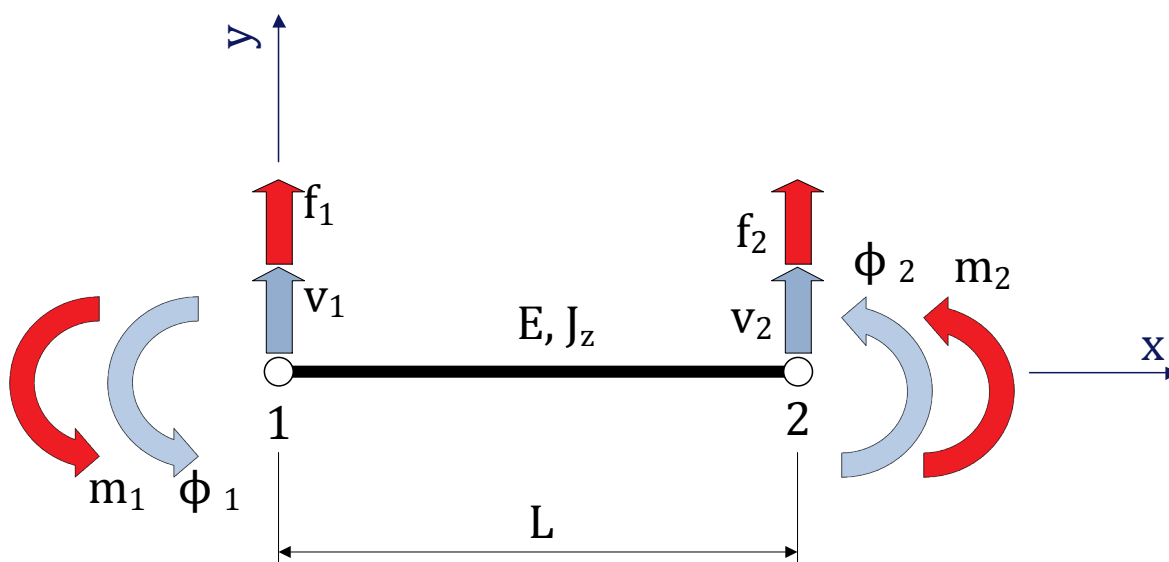
Základní proměnnou, kterou hledáme u nosníkového prvku, je posunutí ve směru osy y . Pro jednoznačné popsání posuvu je nutno „vložit“ do elementu ještě informaci o úhlu natočení plochy průřezu v daném místě (první derivace posunutí $v(x)$ v daném místě x odpovídá úhlu natočení $\phi(x)$ průřezu ve stejném místě). Aby byla zachována spojitost, musí v každém uzlu vystupovat dvě proměnné (dva stupně volnosti) – posuv a úhel natočení – a interpolační funkce musí být tedy minimálně C^1 spojitá.



Audio 1.1 Nosníkový prvek



Na Obr. 4 je zobrazen nosníkový element i se znázorněnými stupni volnosti. Jedná se o dva posuvy v_1 , v_2 a úhly natočení ϕ_1 , ϕ_2 .



Obr. 4 - Nosníkový prvek

Obecně můžeme napsat:

$$v(x) = f(v_1, \phi_1, v_2, \phi_2, x). \quad (7.13)$$

InterpoláčnÍ funkce je volena ve tvaru polynomu třetího stupně takto:

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (7.14)$$

Při odvození se bude postupovat stejně jako v předešlých kapitolách. Stručně tedy:

Koeficienty α_i v rovnici (7.14) odvodíme na základě okrajových podmínek na hranici elementu (tj. v místech uzlů). Platí:

$$v(x=0) = v_1 = \alpha_0$$

$$v(x=L) = v_2 = \alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3$$

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} = \phi_1 = \alpha_1 \quad (7.15)$$

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=L} = \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2$$

Řešením předchozí soustavy rovnic získáme:

$$\alpha_0 = v_1$$

$$\alpha_1 = \phi_1$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\phi_1 + \phi_2) \quad (7.16)$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\phi_1 + \phi_2)$$

Dosazením (7.16) do rovnice (7.14) získáme:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\phi_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\phi_2. \quad (7.17)$$

Lze přepsat do následující formy:



$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\phi_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\phi_2. \quad (7.18)$$

Popřípadě maticově:

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [N]\{u_i\}. \quad (7.19)$$

Připomeňme, že poslední výraz vyjadřuje zobecněné posunutí nad elementem v libovolném místě na základě zobecněných posunutí v uzlech. Nezapomeňme, že se jedná o aproximaci skutečného posunutí.

Aplikací vztahu (7.5) lze napsat:

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y \frac{d^2}{dx^2} [N]\{u_i\} = -[G]\{u_i\}. \quad (7.20)$$

Pro napětí platí následující vztah (viz vzorec (7.6)):

$$\sigma_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y \frac{d^2}{dx^2} [N]\{u_i\} = -[E][G]\{u_i\}. \quad (7.21)$$

1.2.1 Matice tuhosti

Matici tuhosti lze vypočítat ze vztahu (6.20). Výsledný tvar matice tuhosti ohýbaného prvku je následující:

$$[k] = \frac{2EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

1.2.2 Vektor zatížení

Vektor zatížení lze bezesporu získat aplikací výrazu (6.25). Pokud jsou předepsány osamělé zobecněné síly (tj. posouvající síly a momenty) přiřadí se dle konvence na příslušná místa ve vektoru zatížení.

Často se v případě nosníkových prvků využívá spojitého zatížení. Ukažme si jakým způsobem pracovat se spojitým zatížením. Vyjdeme z myšlenky, že nahradíme spojitě zatížení osamělými silami a to tak, že práce obou zátěžných skupin budou stejné. Pro distribuované zatížení platí, že:

$$W_q = \int_0^L q(x)v(x)dx. \quad (7.23)$$

Pro skupinu osamělých zobecněných sil, je možno napsat, že:

$$W_F = \int_0^L F_{1q}v_1 + M_{1q}\phi_1 + F_{2q}v_2 + M_{2q}\phi_2. \quad (7.24)$$

V předchozí rovnici představují proměnné F_{1q}, F_{2q} osamělé ekvivalentní síly v uzlech prvku a M_{1q}, M_{2q} jsou ekvivalentní uzlové momenty. Musí platit:

$$W_q = W_F \quad (7.25)$$

Využitím vztahu (7.18) a rovnice (7.23) získáme:



$$W_q = \int_0^L q(x) [N_1(x)v_1 + N_2(x)\phi_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)] dx. \quad (7.26)$$

Srovnáním výrazu (7.24) a (7.26) lze získat následující výrazy:

$$\begin{aligned} F_{1q} &= \int_0^L q(x) N_1(x) dx \\ M_{1q} &= \int_0^L q(x) N_2(x) dx \\ F_{2q} &= \int_0^L q(x) N_3(x) dx \\ M_{2q} &= \int_0^L q(x) N_4(x) dx \end{aligned} \quad (7.27)$$

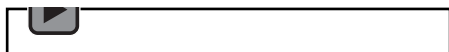
Výrazy (7.27) ukazují, jakým způsobem přepočítat spojitě rozložené zatížení na ekvivalentní zatížení pomocí zobecněných osamělých sil. S diskrétními silami pak už pracujeme tak, že je přiřadíme na příslušnou pozici ve vektoru zatížení.

1.3 NOSNÍKOVÝ PRVEK S OSOVÝM ZATÍŽENÍM

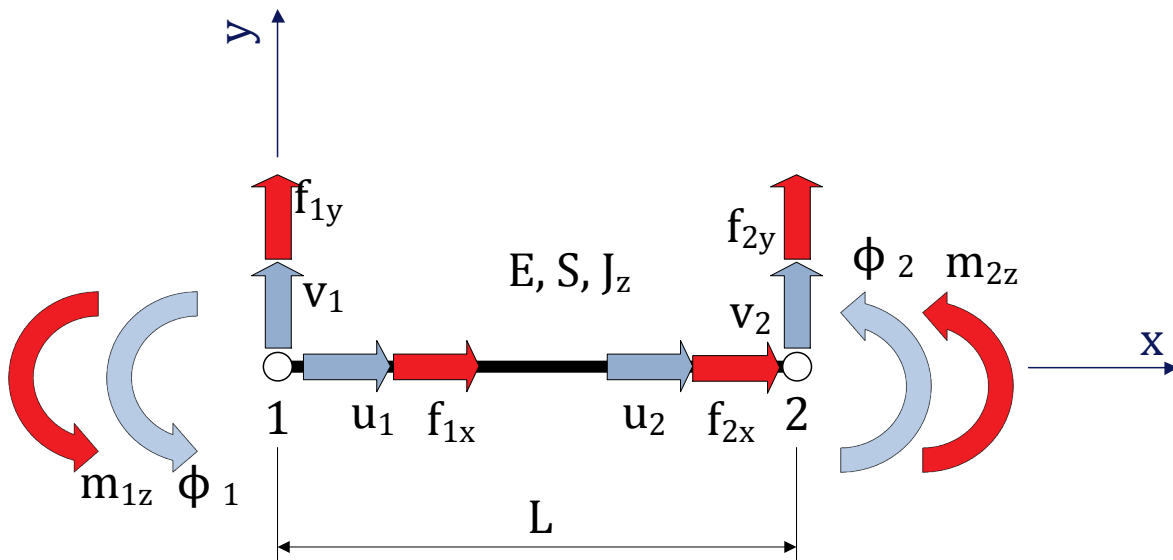
K odvození tohoto prvku bychom mohli využít výše použitý postup. My si však práci zjednodušíme a využijeme zákona superpozice. Při platnosti zákona superpozice v lineární pružnosti je možno jednoduše získat matici tuhosti tohoto „kombinovaného“ elementu složením matice tuhosti tyčového prvku (6.21) a nosníkového prvku (7.22) (za předpokladu, že se tah a ohyb navzájem neovlivňuje).



Audio 1.2 NOSNÍKOVÝ PRVEK S OSOVÝM ZATÍŽENÍM



Kombinovaný prvek je zobrazen, i s jednotlivými stupni volnostmi a souřadným systémem, na Obr. 5.



Obr. 5 - Kombinovaný prvek tah/tlak + ohyb v rovině

Výsledná základní rovnice elementu je:

$$[k]\{u_i\} = \{f_i\},$$

$$\{u_i\} = \{u_1, u_2, v_1, \phi_1, v_2, \phi_2\}^T,$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

$$\{f_i\} = \{f_{1x}, f_{2x}, f_{1y}, m_{1z}, f_{2y}, m_{2z}\}^T.$$

Názorně můžeme matici složeného prvku zobrazit následovně:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{\text{tažený}}] & [0] \\ [0] & [k_{\text{ohýbaný}}] \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Takovýto prvek je možno, na rozdíl od čistě nosníkového prvku, použít pro řešení rovinných rámových konstrukcí. Protože jednotlivé prvky rámové konstrukce mohou být v rovině libovolně orientovány, je nutno, stejně jako u příhradových rámových konstrukcí, provést transformaci do pootočeného souřadného systému. Postupuje se obdobně jako v kapitole 3.

Pro lepší práci si upravíme pořadí jednotlivých posuvů ve vektoru $\{u_i\}$ a to následovně:

$$\{u_i\} = \{u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2\}^T. \quad (7.30)$$

Matici tuhosti také musíme přeskupit:



$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

Transformace z lokálního souřadného systému do globálního souřadného systému se provede obdobně jako v případě tyčového elementu. Výsledné vztahy v potočeném souřadném systému jsou následující:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \Phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}. \quad (7.32)$$

V kondenzované formě:

$$\{u_i\} = [T]\{U_i\}. \quad (7.33)$$

Transformace matice tuhosti lze zapsat (viz předchozí kapitoly) následovně:

$$[K] = [T]^T [k] [T]. \quad (7.34)$$

1.4 OBECNÝ PROSTOROVÝ NOSNÍKOVÝ PRVEK

V případě řešení rámové konstrukce, kterou nelze zjednodušit na rovinný případ, je nutno použít obecnější formulaci nosníkového prvku. Obdobně jako v předchozí kapitole můžeme využít princip superpozice pro odvození základních charakteristik. Do chování prvku zahrneme jednak ohyby ve dvou rovinách, rovnice (7.22), tahové a tlakové vlastnosti, rovnice (6.21) a do třetice parametry související s kroucením, viz kapitola 3. Výsledná rovnice je následující:

$$\begin{bmatrix} [k_{\text{tažený}}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{\text{ohýbaný}xy}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{\text{ohýbaný}xz}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [k_{\text{kroucený}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \phi_{z1} \\ v_2 \\ \phi_{z2} \\ w_1 \\ \phi_{y1} \\ w_2 \\ \phi_{y2} \\ \phi_{x1} \\ \phi_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ f_{z1} \\ M_{y1} \\ f_{z2} \\ M_{y2} \\ M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$



Vztahy pro kroucení vychází ze vztahů pro kroucení průřezů s kruhovým, či mezikruhovým, průřezem. Nicméně lze určit ekvivalentní torzní tuhost i pro další typy průřezů a využít přibližně tyto vztahy.

Takto formulovaný je použitelný pro obecnou prostorovou rámovou konstrukci. Pro použití je nutno provést transformaci z lokálního souřadného systému do globálního souřadného systému. Postup je obdobný jako v předešlé kapitole.

1.5 ZÁVĚR

V této kapitole byly odvozeny základní rovnice pro různé typy nosníkových prvků. Chování elementů je založeno na elementární Euler-Bernoulliho nosníkové teorii. Bylo ukázáno jak využít princip superpozice pro odvození komplexnějších elementů, které dokážou kromě ohybového účinku podchytit i zatížení osová, popřípadě torzní. Formulace elementů by se dala dále obohatit například o vliv posouvajících sil, vliv vzpěru, a podobně.



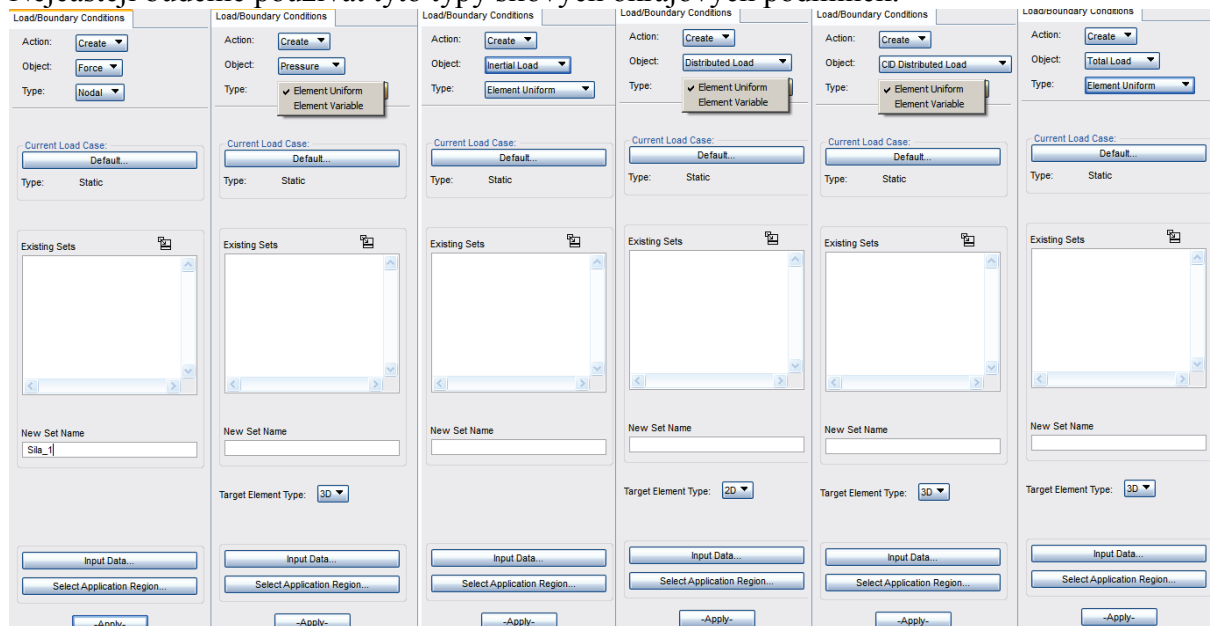
1.6 CVIČENÍ

Okrajové podmínky - síly, momenty, tlaky, gravitační zrychlení, funkce, tabulky
 Silové okrajové podmínky, jak vyplývá z názvu, zatěžují model silami, momenty, setrvačnými silami. Silové okrajové podmínky zadáváme obvykle ve tvaru vektoru. Velmi podobným způsobem jako silové okrajové podmínky zatěžují model i teploty, teploty jsou skalární veličiny.

Silové okrajové podmínky zadáváme:

- Ve tvaru vektoru v uzlu, hodnoty jsou konstantní v celém výběru.
- Ve tvaru hodnoty na plochu (plochu elementu) – tlak.
- Ve tvaru tabulky – hodnoty se mění dle souřadnice nebo času.
- Ve tvaru funkce – hodnoty se mění dle souřadnice nebo času.

Nejčastěji budeme používat tyto typy silových okrajových podmínek.



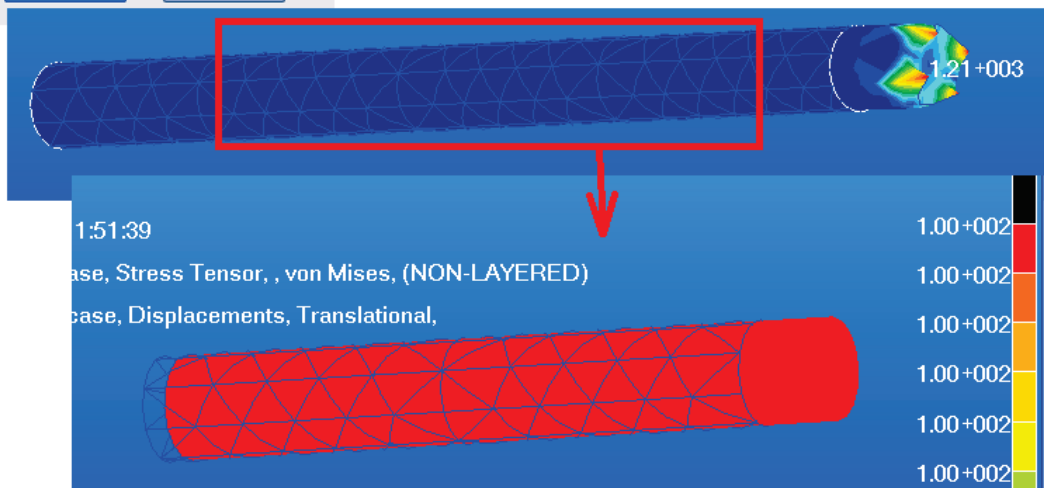
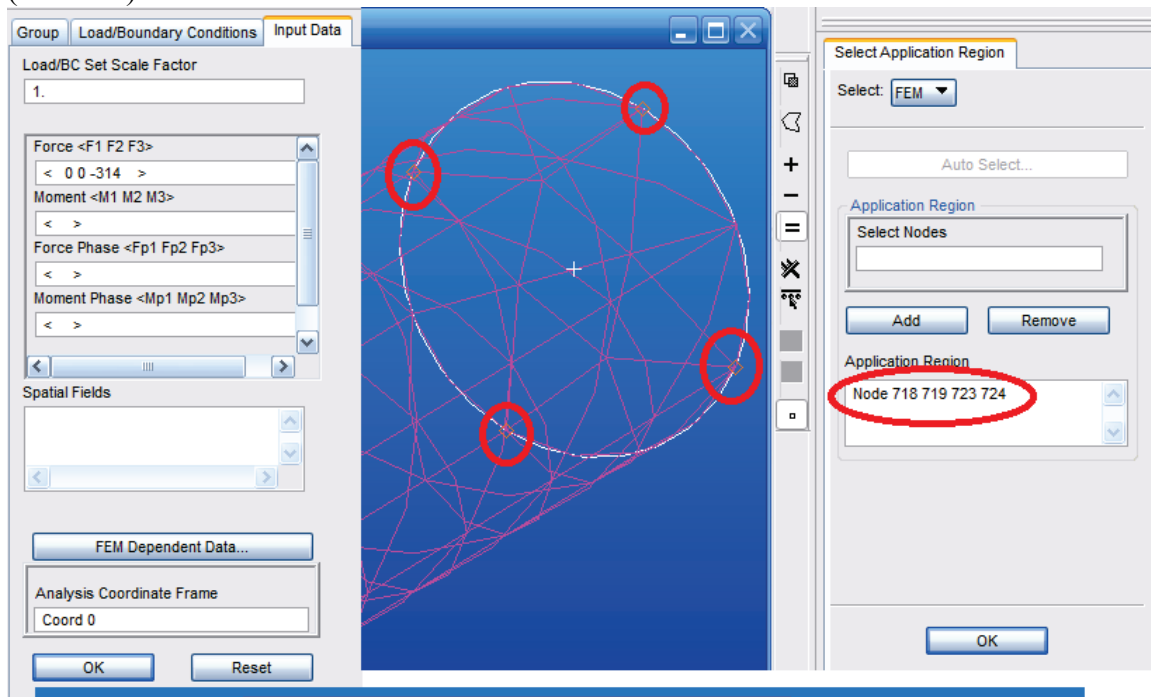
Vidíme, že vybrané varianty mají velmi podobný obsah.

1. Hodnoty zatížení zadáváme na:
 - Uzly (Type: Nodal). Jedná se v podstatě o osamělá zatížení síly a momenty.
 - Elementy (Type: Element Uniform, Element Variable). Používáme pro plošné a objemové síly.
2. Vybíráme Load Case – zatěžovací stav (většinou budeme používat přednastavený – Default).
3. Zadáváme nový název vytvářeného zatížení (New Set Name). Již vytvořené názvy jsou v okně Existing Sets (zobrazují se pouze stejné typy zátěžných sil).
4. Zadáváme velikosti zatížení (Input Data), mohou to být skaláry, vektory, pole (fields) nebo funkce.
5. Zadáváme oblast nebo entity, na které dané zatížení působí (Select Application Region). Vybíráme myší pomocí selekčního filtru, z vytvořených grup, z listu nebo regionů.
6. V některých případech zadáváme i typ elementu (Target Element Type, např. 1D, 2D nebo 3D)



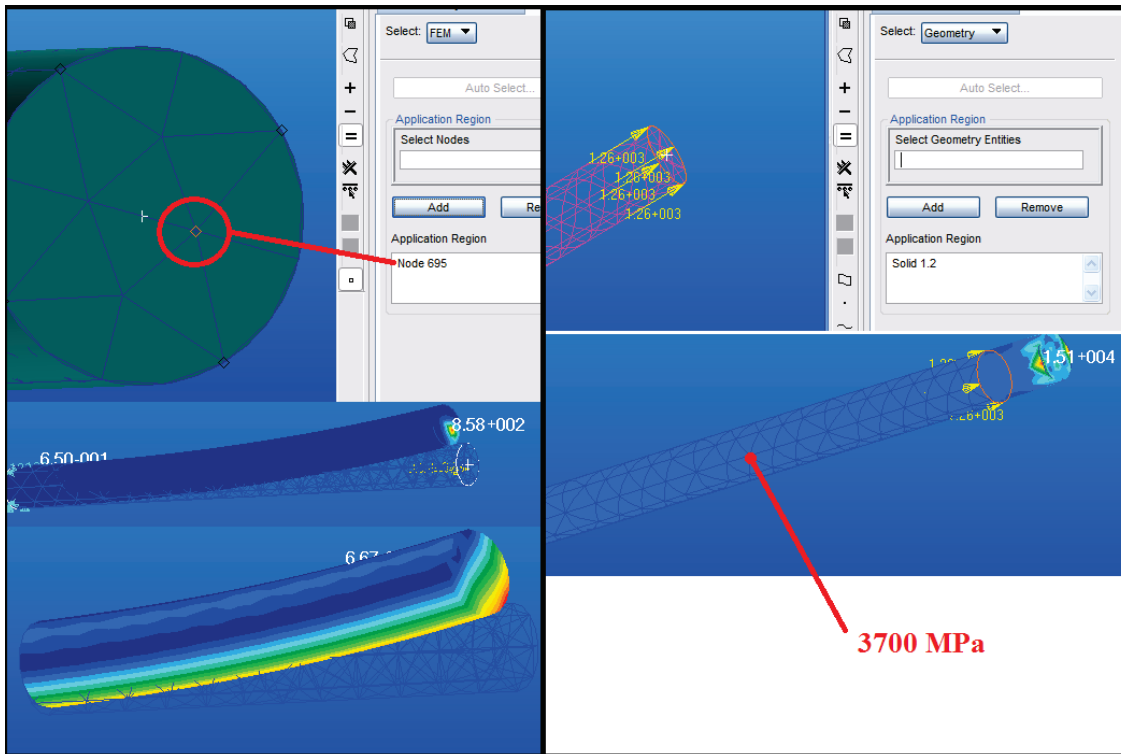
Nejjednodušší je zadávání silových okrajových podmínek ve tvaru vektoru do „bodu“. K tomu můžeme využít Create/Force/Nodal nebo Create/Total Load/Element Uniform. Force reprezentuje osamělou sílu do uzlu. Při výběru (Select Application Region) vloží do každého vybraného uzlu nebo uzlu náležejícího vybrané entitě zadaný vektor. Total Load naopak přiřadí sílu vybrané části, a elementu (nebo uzlu) je přiřazena pouze jeho část odpovídající velikosti.

Zadání silových okrajových podmínek pomocí příkazu Create/Force/Nodal: (Síly jsou zadány do uzlů) Tyč průměru $R=2\text{mm}$, při zatížení silou $F = 1256\text{N}$ ve směru osy tyče. Sílu zadáme na 4 uzly symetricky rozložené okolo osy tyče. Zadáváme sílu $F/4 = 314\text{N}$, znaménko se řídí dle zvoleného souřadného systému. Při řešení se v místech aplikace síly projeví koncentrace napětí. V oblasti dostatečně vzdálené je napětí odpovídající zatížení tyče prostým tahem (100MPa).



Při výběru jednoho uzlu, který není přesně v ose prutu, dochází navíc k ohybu. Při výběru plochy, musíme celkovou sílu zmenšit přímo úměrně počtu uzlů dané plochy, jinak vyjdou nesmyslně velká napětí! Navíc síly v ploše nemusí být rozloženy rovnoměrně, závisí na tvaru sítě. V tomto případě by neměl vzniknout ohyb, nicméně v ploše na kterou aplikujeme síly, mohou vzniknout lokální koncentrace napětí.





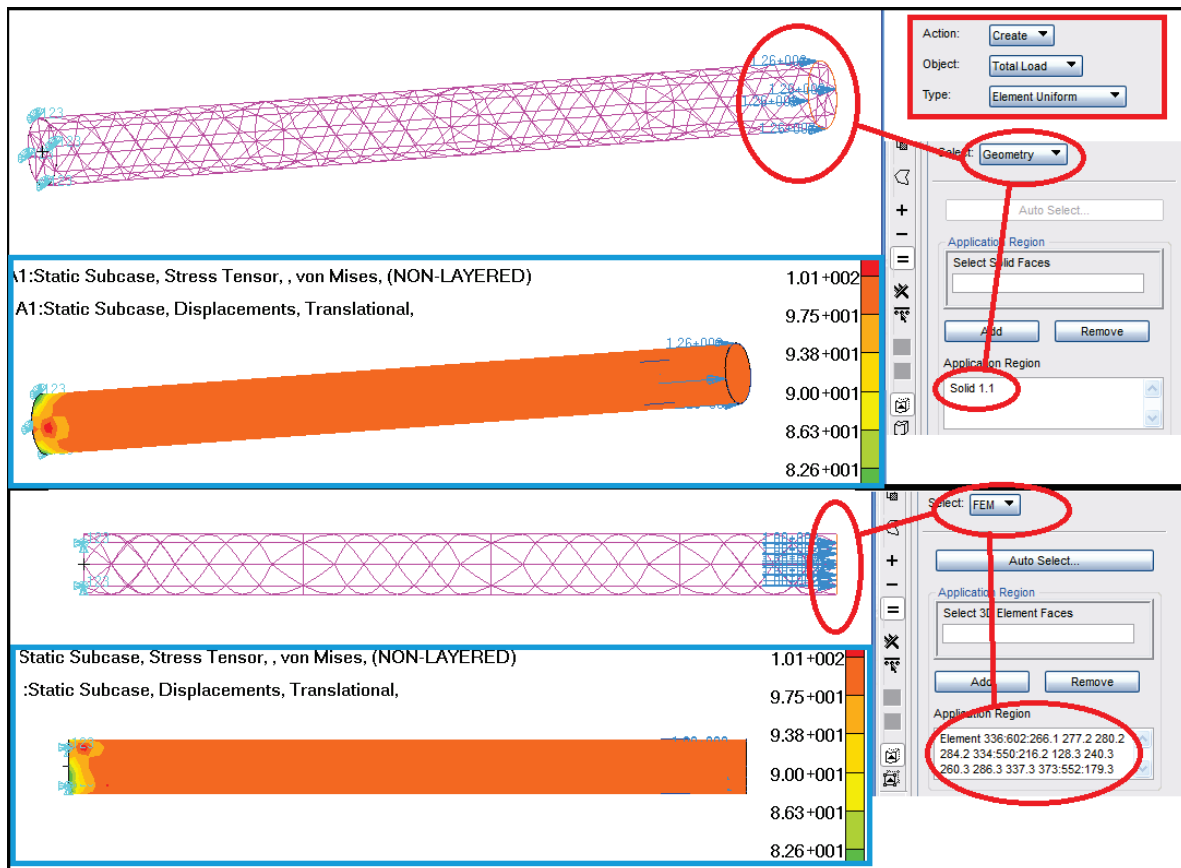
Při použití tohoto příkazu můžeme také využít MPC prvky. Zde jsou ukázány rozdíly v napětí normálovém v ose prutu (Stress Tensor, Z Component) a napětí redukovaném dle hypotézy HMM (Stress Tensor, von Mises). Je vidět, že uprostřed je napětí shodné, ale v okolí vazeb a zatížení znovu vznikají vruby dané nepravidelnou sítí, nebo jinak řečeno nerovnoměrně rozdělenými silami.



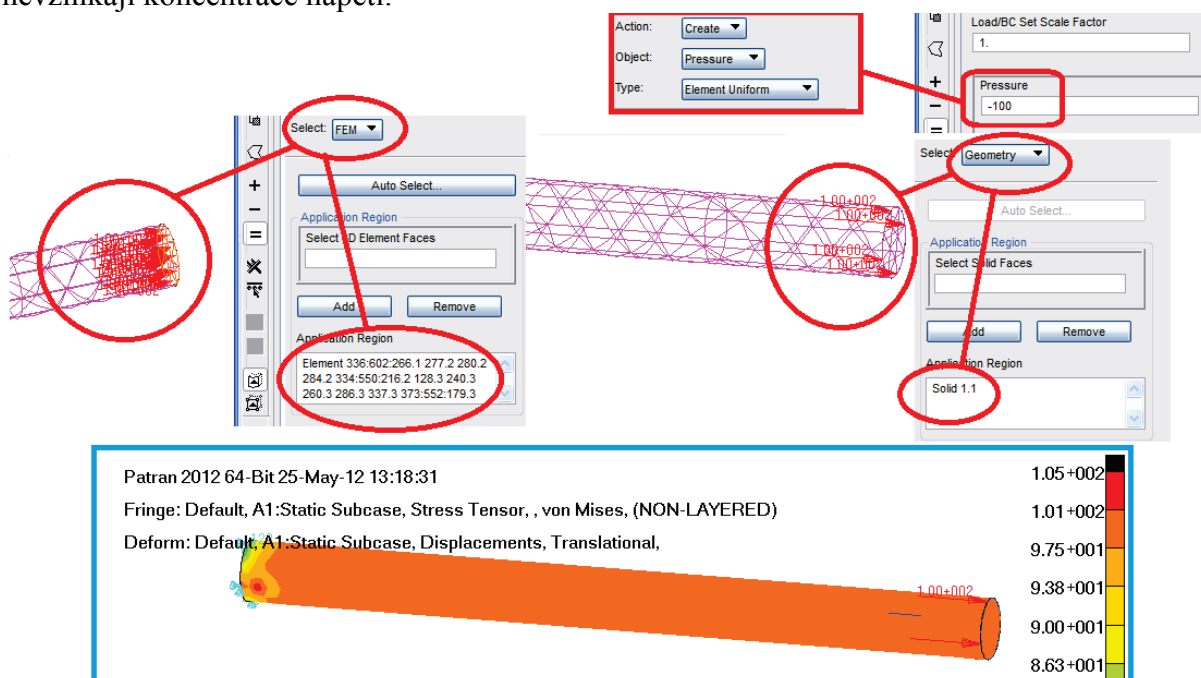


Zadání silových okrajových podmínek pomocí příkazu Create/Total Load: V tomto případě jsou síly „rozpočteny“ na jednotlivé elementy. Zadáváme celkovou sílu (Total Load) a tu pak program rozdělí dle velikostí ploch. V tomto případě se výsledky při zadání na geometrii (plochy) nebo FEM (plochy elementů) neliší. Nevznikají koncentrace napětí z důvodu nerovnoměrného rozložení sil na síti.





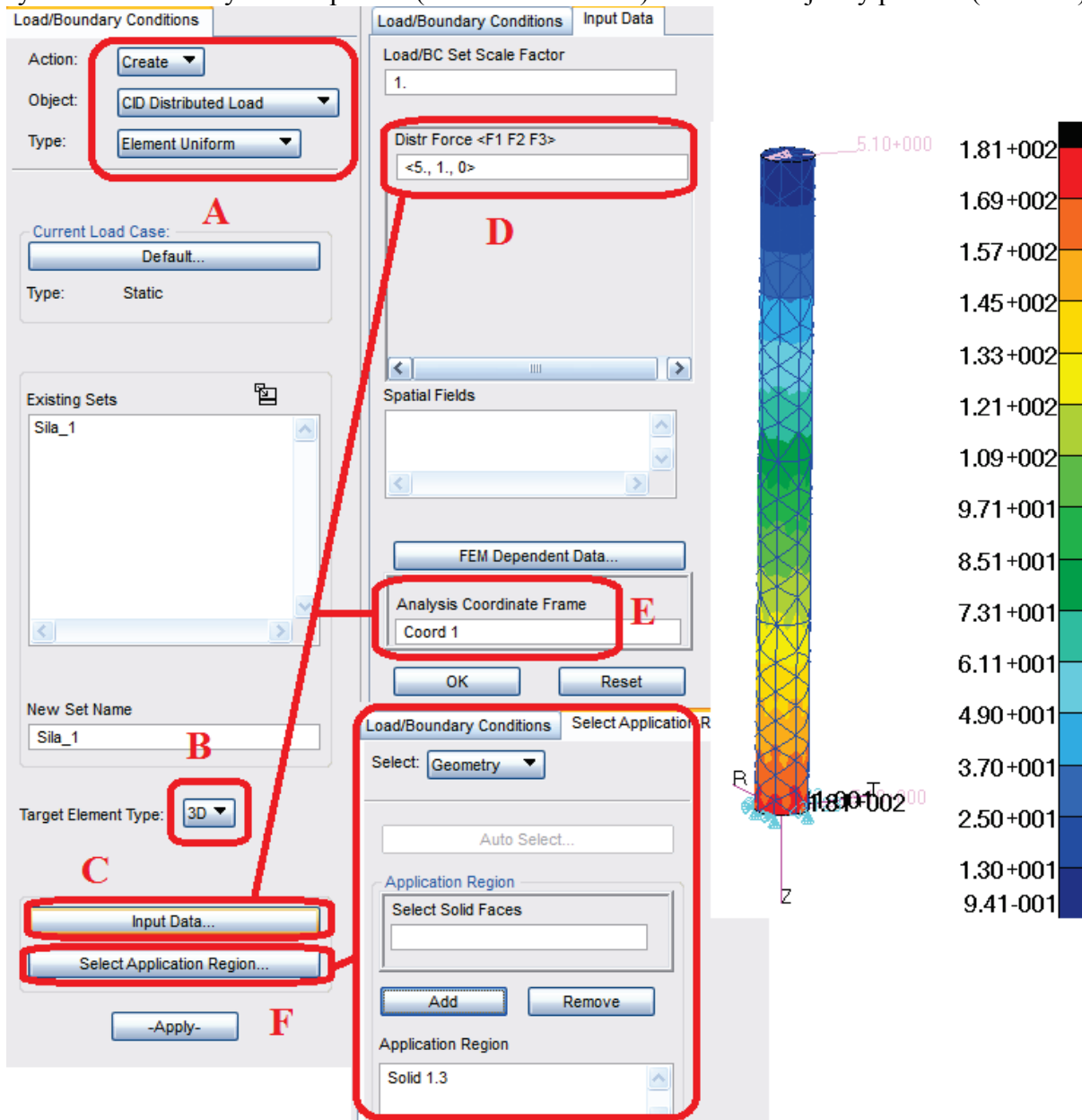
Zadání silových okrajových podmínek pomocí příkazu Create/ Pressure: Tentokrát nezadáme sílu, ale tlak (např. v MPa, N, mm). Chceme – li počítat stejnou úlohu jako v předchozích příkladech, zvolíme tlak (Pressure) $p = -100$ (MPa). Při výběru geometrických (Solid Faces) i MKP (Element Faces) získáváme stejné výsledky. V místě aplikace zatížení nevznikají koncentrace napětí.



Distributed Load (1D, 2D, Distributed Load a Distributed moment) a CID Distributed Load (1D, 2D, 3D, Distributed Load) umožňuje zadávat tlaky obdobně jako síly, tedy ne pouze



v normálovém směru, ale ve všech osách. Využívá se např. pro simulaci třecí síly. V našem příkladu kruhové tyče se může jednat např. o přibližnou náhradu nalisovaného spoje nebo lepeného spoje. Po výběru příkazu (Create/CID Distributed Load/ Element Uniform – obr.xx A) zvolíme 3D Target Element Type (obr. Xx B). Vložíme zatížení (Input Data, Distr Force), sílu (tlak) ve směru první osy ve vybraném souřadném systému, síla (tlak) ve směru druhé osy ve vybraném souřadném systému (obr. Xx C, D) a vybereme souřadný systém (obr.xx E). Nezapomeňte zvolit správné znaménko u sil. V našem případě cylindrický (válcový) souřadný systém. Nakonec vybereme plochu (nebo element Face) na kterou mají síly působit (obr.xx F)



Gravitační působení zadáváme pomocí příkazu Create/Inertial Load/Element Uniform (zadááme na elementy). Chceme-li počítat s gravitačním zrychlením, musíme doplnit materiálové vlastnosti o hustotu (Density) v jednotkách, které odpovídají ostatním v zadání (obvykle mm, N, MPa). Změnu nebo doplnění materiálových vlastností uděláme přes příkaz Modify/Isotropic. V případě, že hustotu nezadáme, program bude počítat bez gravitačního zrychlení. Dále zadáme gravitační zrychlení v odpovídajících jednotkách (v našem případě mm/s^2). Select Application Region je vybrán automaticky – je vybrán celý model.

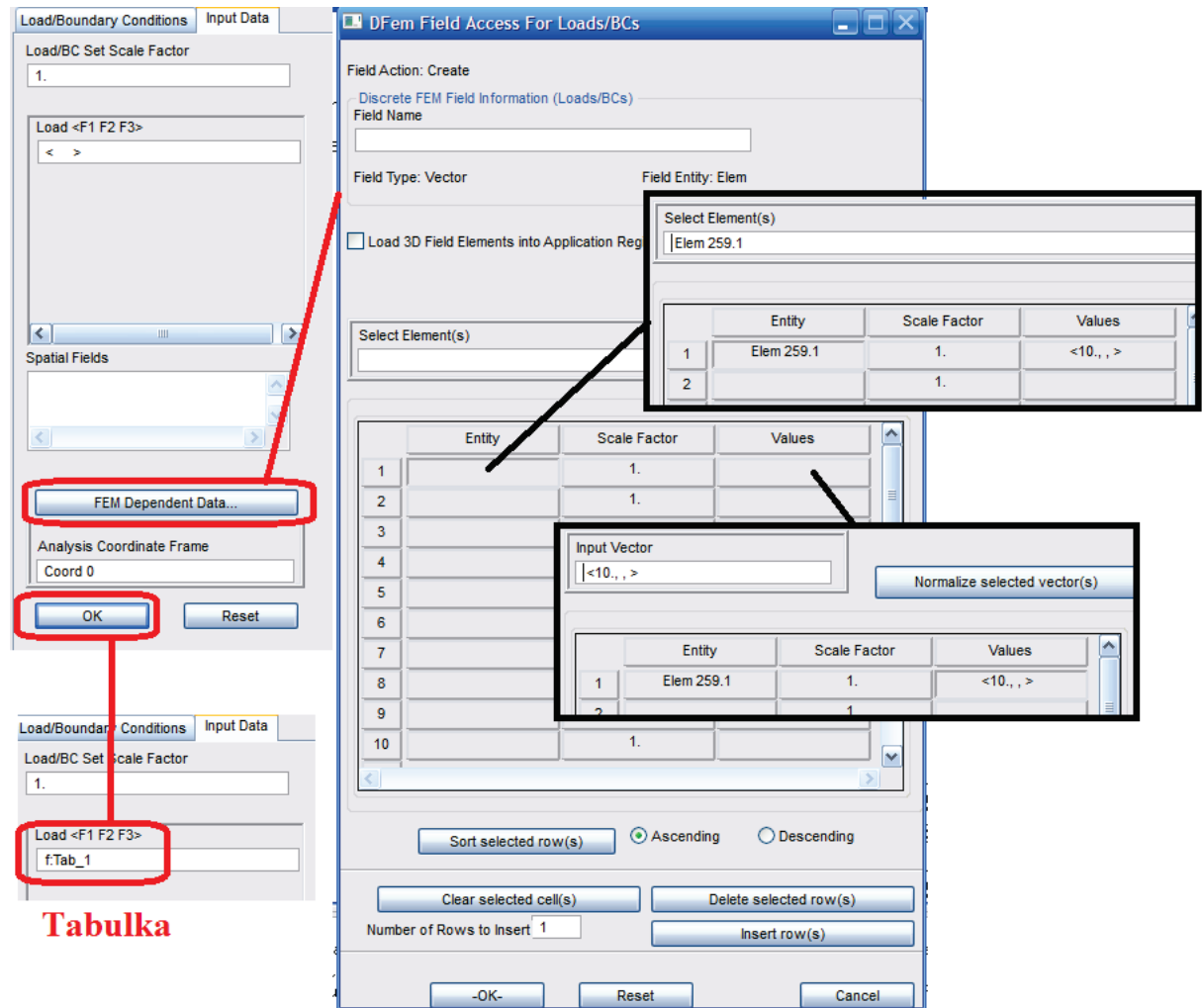


The image shows a screenshot of the ANSYS software interface. On the left, the 'Load/Boundary Conditions' dialog box is open, with the 'Input Data' tab selected. The 'Object' is set to 'Inertial Load' and the 'Type' is 'Element Uniform'. The 'Trans Accel <A1 A2 A3>' field contains the vector $\langle 0 \ 0 \ 10000 \rangle$. Below this, the 'Rot velocity <W1 W2 W3>' and 'Rot Accel <a1 a2 a3>' fields are empty. The 'Spatial Fields' section is also empty. The 'Analysis Coordinate Frame' is set to 'Coord 0'. The 'Existing Sets' list contains 'gravitace'. The 'New Set Name' field also contains 'gravitace'. The 'Input Data...' and 'Select Application Region...' buttons are highlighted with red boxes. Below the dialog box, the 'Inertia Loading Application Region' dialog box is open, displaying a note: 'NOTE: MSC.Nastran Inertial loads apply to the entire model. No Application Region Selection is permitted.' The 'OK' button is highlighted with a red box. To the right, two plots are shown: 'Stress Tensor, von Mises,' and 'Displacements, Translational, Magnitude,'. Both plots show a vertical bar with a color gradient from blue at the bottom to red at the top, indicating stress and displacement respectively. A red arrow labeled 'g' points downwards, indicating the direction of gravity. The 'Material Properties' dialog box is also open, showing the following values: Elastic Modulus = 210000, Poisson Ratio = 0.30000001, Shear Modulus = (empty), and Density = 7.8499997E-006. The 'Density' field is highlighted with a red box.

Zadávání zatěžujících hodnot pomocí tabulky je použitelné ve velkém množství různých aplikací. Např. hydrostatický tlak, nahrazení kontaktu – parabola, síly přenášené v čepu. Máme dvě možnosti jak zadat tabulku:

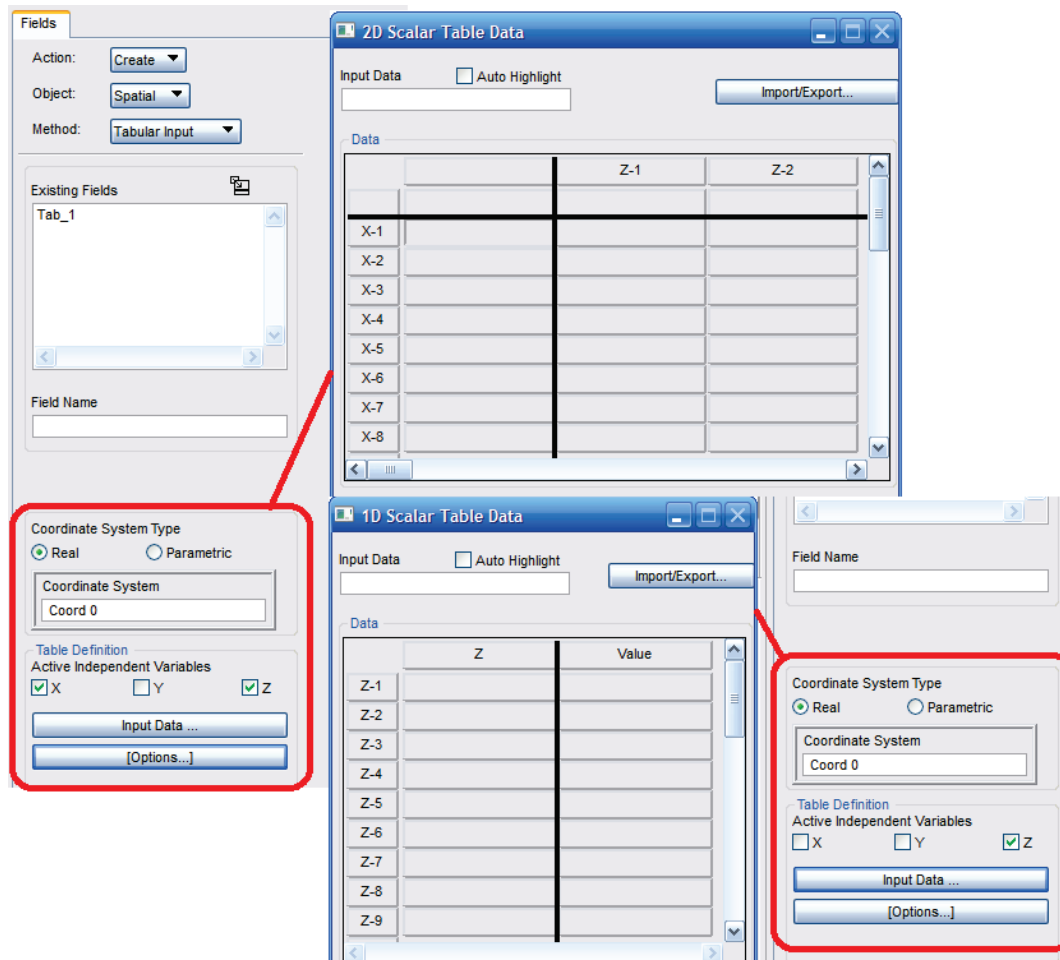
- Přes Input Data – Fem Dependent Data: tato možnost je u většiny dříve probíraných okrajových podmínek (silových i deformačních). Zatížení zadáváme do uzlů nebo elementů dle typu okrajové podmínky. Hodnoty jsou ve tvaru hodnot nebo vektorů znovu dle typu okrajové podmínky. Vybereme políčko tabulky, kde chceme zadávat. Zadáme hodnotu (Select Elements, Input Vector apod.) a potvrdíme pomocí klávesy Enter. V případě většího počtu hodnot je tento způsob manuálního zadávání pomalý a nepraktický. Tabulku si můžeme připravit zvlášť a pouze ji načíst. Pro vytvoření tabulky můžeme použít i externí soubor (např. txt).





- Vytvoření a následné načtení tabulky. Tabulku (Fields) vytvoříme pomocí příkazu Create/Spatial/Tabular Input (Non Spatial). Nejprve zvolíme souřadný systém a jeho typ (Coordinate System Type). Dále vybereme proměnnou, X, Y, Z dle souřadného systému (Active Independent Variables). Velkost tabulky odpovídá počtu vybraných proměnných.

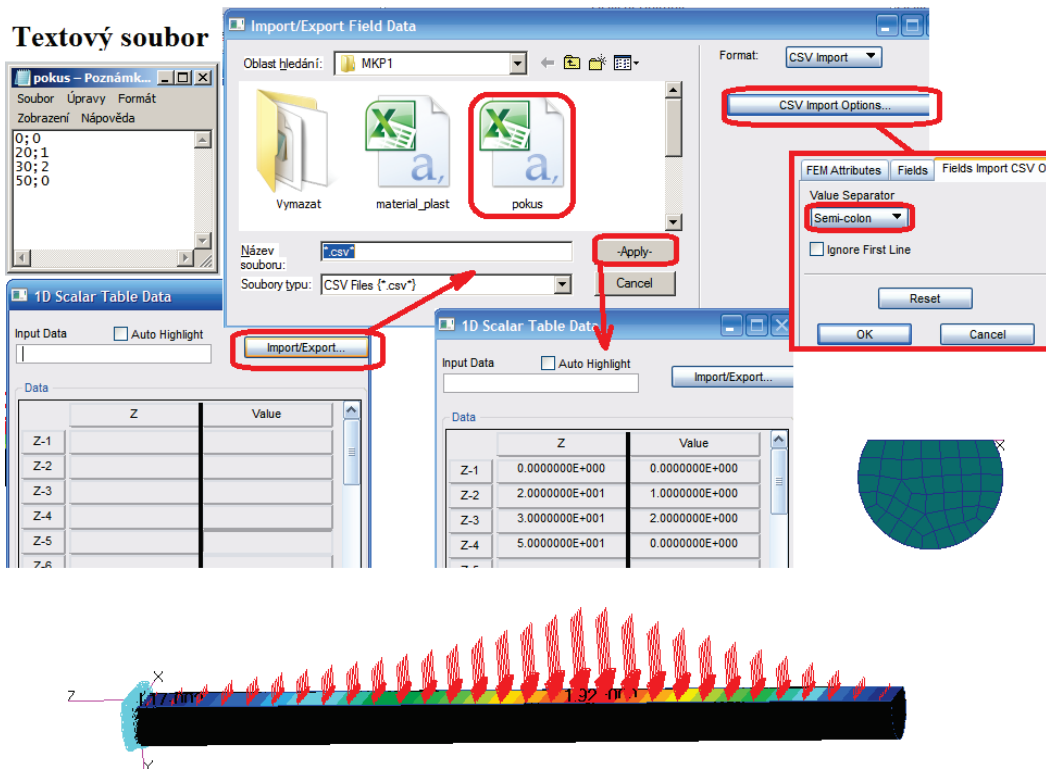




Velice užitečná možnost je importovat tabulku z textového souboru (.csv). Vytvoříme si tedy soubor v libovolném programu, který umožňuje uložení v textovém souboru. V tabulce (1D Scalar Table Data) využijeme možnost importu (Import/Export). Importovat můžeme z *.csv textového souboru, kde čísla jsou odděleny čárkou, středníkem, tabelátorem nebo mezerou, což nastavíme pod tlačítkem CSV Import Options. Desetinná čísla oddělujeme tečkou. Tabulku pak můžeme využít při zadání tlaku (Pressure – Spatial Fields). Zadaný průběh tlaku můžeme zobrazit pomocí Load/Boundary Conditions/ Plot Markers nebo Plot Contours. Pomocí tabulky můžeme zadat skalární veličiny (tlak) v závislosti na souřadnicích. Pomocí příkazu Create/Non Spatial/Tabular Input můžeme vložit složitější tabulky v závislosti na čase, teplotě atd.

I zde můžeme vytvořit tabulku, kde hodnoty budou zadány přímo do uzlů nebo elementů (Create/Spatial/FEM). Možnosti jsou obdobné jako v případě FEM Dependent Data, kterou jsme již zmiňovali.





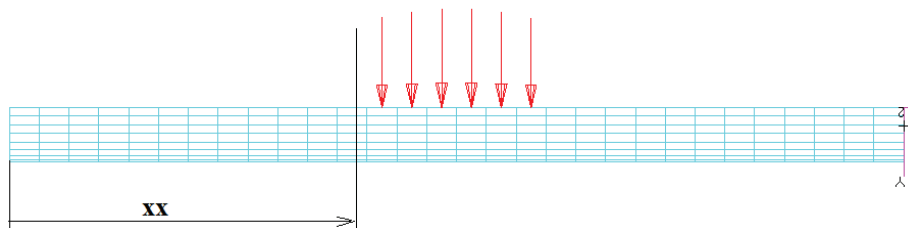
Nejobecnější je zadání hodnot pomocí funkce. K tomu je možno využít několik příkazů:

- Create/Spatial/PCL Function
- Create/Spatial/General
- Create/Non Spatial/General

Funkce, které je možno v příkazech použít najdeme v helpu pro PCL (Intrinsic Functions, Math Functions). Matematické funkce začínají písmeny MTH, následuje podtržítka, název příkazu a „doplňkové“ písmeno.

- MTH_SIND(x) /* POPIS: Vrací hodnotu SIN x, kde x je ve stupních*/
- MTH_SINR(x) /* POPIS: Vrací hodnotu SIN x, kde x je v radiánech*/
- MTH_SQRT(x) /* POPIS: Vrací hodnotu ODMOCNINY x */
- MTH_ABS(x) /* POPIS: Vrací hodnotu absolutní hodnoty x */
- Atd.

Funkci můžeme vytvořit také pomocí sekvence příkazů. Vytvoříme funkci, která bude mít v počáteční oblasti nulovou hodnotu. Ve druhé části bude její průběh odpovídat parabole (zvolené křivce) a v poslední části bude mít znovu nulovou hodnotu.



Funkci vytvoříme v *.ses file v libovolném textovém editoru. Soubor nazveme Test.ses.

```
FUNCTION TEST( xx )
REAL xx
```

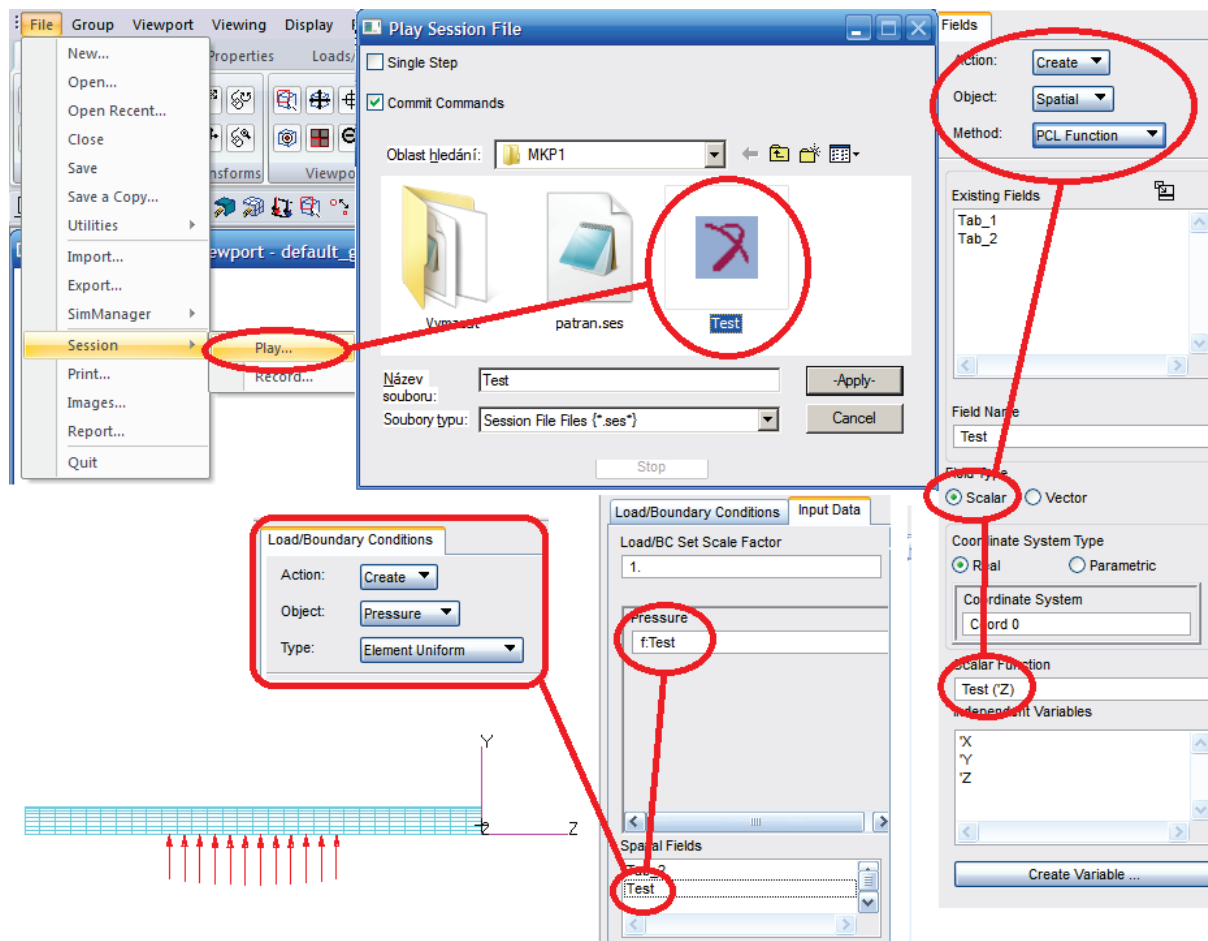


```

REAL p0 = 1
REAL a = 10
REAL x0 = 25
/* p0 , a , x0 jsou parametry použité funkce */
/* p0 – tlak, a – šířka intervalu, x0 – střed intervalu */
REAL Vysledek
IF (xx>x0-a/2) Then
    IF (xx>=x0+a/2) Then
        Vysledek = 0
    ELSE
        Vysledek = p0* MTH_SQRT ( 1-((x0-xx)/a)**2 )
    ENDIF
ELSE
    Vysledek = 0
ENDIF
RETURN Vysledek
END FUNCTION

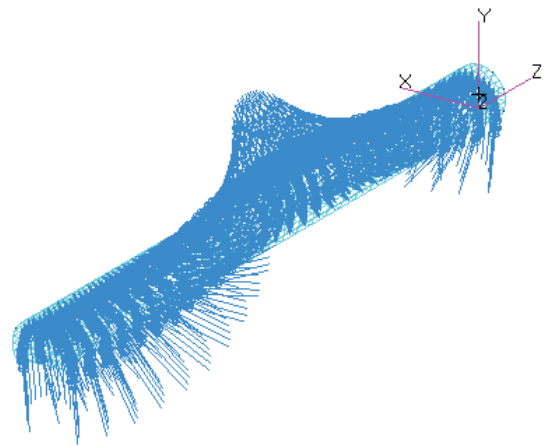
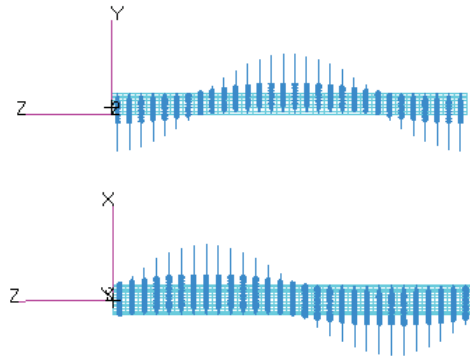
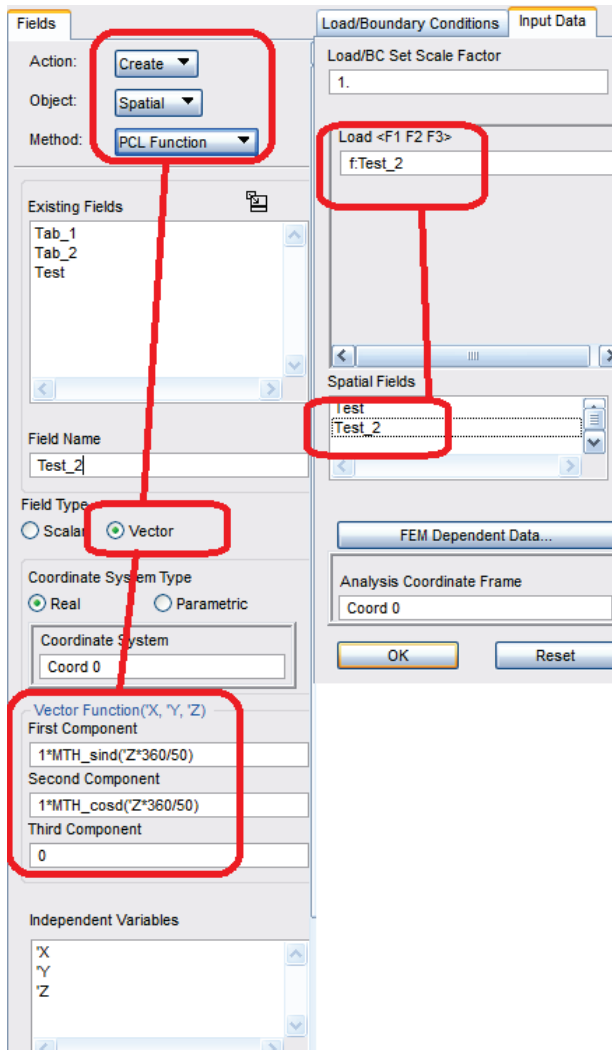
```

Spuštěním souboru (File/Session/Play – Test.ses) funkci zkompilujeme a můžeme ji v Patranu používat, stejně jako jiné funkce. Vytvoříme tabulku hodnot (Create/Spatial/PCL Function) ze skalární funkce Test, kde proměnná xx bude odpovídat souřadnici Z. Takto vytvořenou tabulku (Tabulku jsme znovu nazvali Test) použijeme pro zadání tlaku (Create/Pressure/Element Uniform – Input Data).



Podobným způsobem vytvoříme vektorové funkce (Create/Spatial/PCL Function - Vector). Pomocí těchto funkcí můžeme zadat vektorové veličiny (Total Force, Force, Displacement atd.).







Metoda konečných prvků 1

Výpracováno v rámci projektu
CZ.1.07/2.2.00/16.0403



2 LITERATURA

LENERT, J. Úvod do metody konečných prvků. skripta VŠB-TU Ostrava, 1999.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.

VALCHÁŘOVÁ, J. Soudobé numerické metody v mechanice kontinua. SNTL. Praha. 1986.

BEER, G., WATSON, J.O. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. New York. 1992.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 1. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00855-X.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 2. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00901-7.

ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R., L. The Finite Element Method, Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. ISBN 0-7506-5049-4.

NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. Úvod do matematické teorii pružných a pružně plastických těles. SNTL. Praha. 1983.

Internet:

<http://www.mscsoftware.com/>

<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>

