

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STROJNÍ**



# METODA KONEČNÝCH PRVKŮ I

---

## 13. METODA VÁŽENÝCH REZIDUÍ

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Martin Fusek, Ph.D., Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3023-0



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

## OBSAH

<b>1</b>	<b>METODA VÁŽENÝCH REZIDUÍ.....</b>	<b>3</b>
1.1	Úvod .....	4
1.2	Jednotlivé metody .....	5
1.2.1	Kolokační metoda.....	5
1.2.2	Metoda podoblastí .....	5
1.2.3	Metoda nejmenších čtverců .....	6
1.2.4	Galerkinova metoda .....	6
1.2.5	Metoda momentu.....	6
1.3	Zahrnutí okrajových podmínek.....	6
1.4	První slabá formulace pro metodu vážených reziduí .....	7
1.5	Cvičení.....	9
1.5.1	Příklad na řešení teploty .....	9
<b>2</b>	<b>LITERATURA .....</b>	<b>11</b>



# 1 METODA VÁŽENÝCH REZIDUÍ



## OBSAH KAPITOLY

V této kapitole bude stručně uvedena metoda vážených reziduí jako základní nástroj pro obecnou formulaci metody konečných prvků.



## MOTIVACE:

V předcházejících kapitolách byly uvedeny základní principy a postupy používané v metodě konečných prvků. Pro jednoduchost bylo vše odvozeno na jednoduchých jednodimenzionálních elementech. Pro případ taženého/tlačeného elementu (popřípadě i dalších typů např. ohýbaný) lze všechny vztahy odvodit na základě elementárních znalostí přednášených v předmětu pružnost a pevnost. Při odvození se použily dva základní postupy, jednak přímý přístup (přímá tuhostní metoda) a jednak energetický přístup přes minimum potenciální energie systému. Pro rozšíření použití metody i do jiných (nestrukturních) oblastí je nutno tento postup zobecnit<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> I zde je však možno postupovat obdobně jako v předešlých případech na základě elementární teorie jednotlivých vědních oborů.



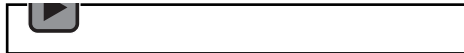
## 1.1 ÚVOD

Většinu praktických inženýrských problémů lze popsat pomocí diferenciálních rovnic. Bohužel praktické aplikace vylučují řešení v uzavřené formě. Jediné schůdné řešení je tedy řešení přibližné pomocí numerických metod, mezi které patří právě i metoda konečných prvků.

Metoda vážených reziduí (MVR) je přibližná (aproximační) metoda pro řešení diferenciálních rovnic se zadanými okrajovými podmínkami. Využívá se aproximační funkce a integrální formulace pro minimalizaci chyby v globálním měřítku, tj. přes celou oblast řešení. Základní postup je popsán na následujících řádcích. Pro jednoduchost je uvažována jednodimenzionální úloha.



Audio 1.1 Úvod



Mějme diferenciální rovnici v obecném tvaru:

$$D[u(x), x] = 0. \quad (13.1)$$

Symbol  $D$  představuje obecný operátor. Příkladem takovéto rovnice může být například rovnice (5.9) odvozena v kapitole 5. K diferenciální rovnici přísluší dále okrajové podmínky. Označme symbolem  $\Omega$  oblasta řešení (v jednodimenzionálním případě je jí možno popsat jedinou souřadnicí, např.  $x$ ). Část hranice kde je předepsány podstatná okrajová (také označovaná jako okrajová podmínka 1. druhu, popř. Dirichletova okrajová podmínka) podmínka označme  $S_u$  a kde je předepsaná nepodstatná okrajová podmínka (také označovaná jako podmínka 2. Druhu, popř. Neumannova)  $S_t$ . Takže můžeme předepsat následující okrajové podmínky:

$$\bar{u} \text{ na } S_u, \quad (13.2)$$

a

$$\bar{t} \text{ na } S_t. \quad (13.3)$$

Protože není známo přesné řešení, zvolme aproximační řešení  $\tilde{u}(x)$ . Obecně se volí ve tvaru:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x), \quad (13.4)$$

kde  $c_i$  představují neznámé koeficienty, které musí být určeny a  $N_i(x)$  jsou nezávislé aproximační funkce (voleny předem). Hlavní podmínkou je, že aproximační funkce může být **libovolná přípustná funkce** (tzn. aproximační funkce je spojitá nad celou oblastí řešení). Dále na danou funkci budeme klást podmínku, že splňuje okrajové podmínky. Tato podmínka nemusí být obecně splněna, ale pro jednoduchost ji budeme nyní uvažovat. V případě jednodimenzionální úlohy je tato podmínky lehce splnitelná.

Dosadíme-li aproximační funkci  $\tilde{u}$  do rovnice (13.1), tato rovnice nebude splněna a bude generovat reziduum (zbytek, zůstatek), tedy chybu. Matematicky to lze zapsat následovně:

$$R(x) = D[\tilde{u}(x), x] \neq 0, \quad (13.5)$$

kde  $R(x)$  je právě reziduum (popř. je možno použít pojem chybová funkce). Upozorníme, že reziduum je také funkcí neznámých parametrů  $c_i$ . Metoda vážených reziduí vyžaduje, aby byl reziduál v oblasti odstraněn následujícím způsobem:



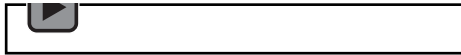
(13.6)

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx = 0, \quad \text{pro } i = 1 \dots n.$$

V předcházejícím vzorci  $w_i(x)$  představuje  $n$  obecných váhových funkcí. Tedy jednoduše můžeme říci, že připouštíme chybu řešení, ale v rámci váženého průměru přes celou oblast je chyba nulová. Získáme tedy  $n$  algebraických rovnic ze kterých určíme koeficienty  $c_i$ . Počet váhových funkcí je roven počtu konstant  $c_i$ .



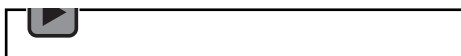
Audio 1.2



Existují různé metody vážených reziduí, lišící se volbou váhové funkce. Jmenujme nejčastěji používané metody: kolokační, metodu nejmenších čtverců, Galerkinovu metodu, aj. Pro metodu konečných prvků je východiskem právě poslední zmíněná metoda.



Audio 1.3 Metody



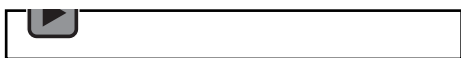
## 1.2 JEDNOTLIVÉ METODY

### 1.2.1 Kolokační metoda

Při aplikaci této varianty jsou voleny váhové funkce jako Diracovy  $\delta$  funkce.



Audio 1.4 Kolokační metoda



Dirakova delta funkce má následující vlastnosti:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (13.7)$$

Aplikací  $w_i(x) = \delta(x - x_i)$  na rovnici (13.6) získáme rovnice:

$$R(x_i) = 0, \quad \text{pro } i = 1 \dots n. \quad (13.8)$$

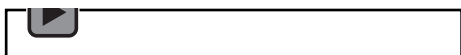
Takže reziduál je nulován pouze ve specifických bodech oblasti. Řešením této rovnice (soustavy) získáme hledané parametry  $c_i$ .

### 1.2.2 Metoda podoblastí

Tato metoda neuzívá explicitně váhové funkce, a proto přísně vzato se nejedná o metodu z rodiny metody vážených reziduí. Nicméně ji lze považovat za modifikaci kolokační metody. Nosnou myšlenkou je, že reziduál není nulován pouze v bodě (jako v kolokační metodě), ale je nulován přes určitou podoblast řešené oblasti.



Audio 1.5 Metoda podoblastí



Takže váhová funkce je volena jednotková v dané podoblasti, a integrál přes celou oblast je rozbit na více částí. Matematicky zapsáno:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx = \sum_i \left( \int_{\Omega_i} R(x) dx \right) = 0, \quad \text{pro } i = 1 \dots n. \quad (13.9)$$

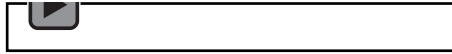


### 1.2.3 Metoda nejmenších čtverců

Nejlepší odhad se předpokládá takový, že součet (v našem případě přejdeme v integraci) čtverců reziduálů je minimální.



Audio 1.6 Metoda nejmenších čtverců



$$S = \int_{\Omega} R(x) R(x) dx = \int_{\Omega} R^2(x) dx. \quad (13.10)$$

Minimalizace se provede následovně:

$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = 2 \int_{\Omega} R(x) \frac{\partial R(x)}{\partial c_i} dx = 0. \quad (13.11)$$

Srovnáním s rovnicí (13.6) vychází pro váhovou funkci:

$$w_i(x) = 2 \frac{\partial R(x)}{\partial c_i}. \quad (13.12)$$

Dvojka se dá však zrušit (vytknout před integrál a „poslat“ k nule), takže výsledná váhová funkce má tvar:

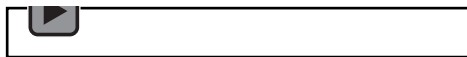
$$w_i(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial c_i}. \quad (13.13)$$

### 1.2.4 Galerkinova metoda

Na tuto metodu se dá dívat jako na modifikaci metody nejmenších čtverců. Ve váhové funkci se však místo derivace residuálu (vzhledem k  $c_i$ ) provádí derivace aproximativního řešení, tj:



Audio 1.7 Galerkinova metoda



$$w_i(x) = \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial c_i} = N_i(x). \quad (13.14)$$

Takže váhová funkce je stejná jako bazová funkce.

### 1.2.5 Metoda momentu

V této variantě jsou váhové funkce voleny ve tvaru mocnin následovně:



Audio 1.8 Metoda momentu



$$w_i(x) = x^i, \quad \text{pro } i = 0 \dots n - 1. \quad (13.15)$$

Pokud jsou zvoleny polynomy tvaru  $N_i(x)$  přechází tato metoda v metodu Galerkinovu.

## 1.3 ZAHRNUTÍ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

Doposud jsme předpokládali, že všechny okrajové podmínky byly na hranicích  $S_u$  a  $S_t$  splněny. V mnoha případech je však výhodnější vyhovět okrajovým podmínkám na  $S_u$  identicky ( $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x)$  na  $S_u$ ), ale aproximovat je na  $S_t$ . Chybová funkce  $R_t$  definována pro



tuto okrajovou podmínku může být vážena obdobným způsobem, jako byla vážena chyba  $R(x)$  v integrační oblasti. Můžeme tedy napsat:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx + \int_{S_t} w_{ti}(x) R_{ti}(x) dS = 0, \quad (13.16)$$

pro  $i = 1 \dots n$ .

Tato formulace vyžaduje, aby aproximační řešení vyhovovalo okrajovým podmínkám na  $S_u$  a aby váhové funkce byly rovny nule na  $S_u$ .

Někdy je naopak výhodné zahrnout do definice váhových reziduí i okrajové podmínky i na  $S_t$ . Obecně tedy můžeme definovat rezidua na hranicích takto:

$$R_u(x) = \tilde{u}(x) - \bar{u}(x), \quad \text{na } S_u, \quad (13.17)$$

a

$$R_t(x) = \tilde{t}(x) - \bar{t}(x), \quad \text{na } S_t. \quad (13.18)$$

Rovnici (13.6) lze pak upravit na tvar:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x) dx + \int_{S_u} w_{ui}(x) R_u(x) dS + \int_{S_t} w_{ti}(x) R_{ti}(x) dS = 0, \quad (13.19)$$

pro  $i = 1 \dots n$ .

## 1.4 PRVNÍ SLABÁ FORMULACE PRO METODU VÁŽENÝCH REZIDUÍ

Vraťme se k rovnici (13.6). Všimněme si, že aproximační funkce  $\tilde{u}$  musí být spojitá včetně derivací do  $n$ -tého řádu, daného řádem operátoru v rovnici (13.1). Naproti tomu na funkci  $w$  je kladeno pouze to, že musí být spojitá, ale její derivace nemusí. Bez ztráty obecnosti budeme dále uvažovat diferenciální rovnici druhého řádu, ve tvaru:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f(x) = 0, \quad x \in (0, L) \quad (13.20)$$

Dále pak budeme (opět pro jednoduchost) předpokládat aproximativní řešení  $\tilde{u}$  splňující okrajové podmínky. Rovnici (13.6) můžeme přepsat do tvaru vážených reziduí:

$$\int_0^L w(x) \left( \frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} + f(x) \right) dx = 0 \quad (13.21)$$

Rozepišme do tvaru:

$$\int_0^L w(x) \frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} dx + \int_0^L w(x) f(x) dx = 0 \quad (13.22)$$

Na první integrál aplikujme integraci metodou per partes (ve vyšší dimenzi použijeme Greenovu větu). Získáme:

$$\int_0^L w(x) \frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} dx = \left[ w(x) \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dw(x)}{dx} \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} dx \quad (13.23)$$

A dosadíme zpět do rovnice (13.22), získáme:



$$\left[ w(x) \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dw(x)}{dx} \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} dx + \int_0^L w(x) f(x) dx = 0 \quad (13.24)$$

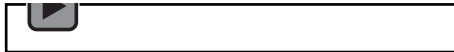
Podíváme-li se na poslední výraz, vidíme, že požadavek na spojitost funkce  $\tilde{u}(x)$  byl snížen o jeden řád a naopak požadavek na spojitost funkce  $w(x)$  stoupl právě o jeden řád. Formulace se nazývá z důvodu oslabení požadavků jako **slabá formulace**. Řešení je nazýváno **slabým řešením**. Člen v hranaté závorce má význam zbytné (natural) okrajové podmínky.

Slabá formulace vznikla povolenými matematickými postupy a z tohoto důvodu je slabá formulace ekvivalentní silné formulaci úlohy. Nedošlo tedy k žádnému zjednodušení ve smyslu formulace úlohy. Jak již víme, oba dva druhy formulací se využívají v inženýrské praxi. Slabá formulace úlohy má následující vlastnosti:

- Klade nižší nároky na diferenciovatelnost aproximační funkce (zjednodušení řešení).
- Řešení získané ze slabé formulace nemusí nutně rovnici pro silnou formulaci ve vyšších derivacích.



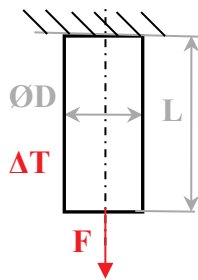
Audio 1.9 Slabá formulace





## 1.5 CVIČENÍ

### 1.5.1 Příklad na řešení teploty



**Dáno:**  $L = 100 \text{ mm}$ ,  $D = 10 \text{ mm}$ ,  $E = 210000 \text{ MPa}$ , Poisson Ratio =  $0.3$ ,  $\Delta T = 100^\circ$ ,  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ ,  $\alpha = 16,3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$ ,  $F = 100000 \text{ N}$ .

Kde  $\alpha$  je koeficient teplotní roztažnosti.

**Urči:**

**Obr. 1**

Vyřešte celkové prodloužení tyče. Analytické řešení je velmi jednoduché a je ukázáno v Tab. 1.

Vliv změny teploty $\Delta T$	Vliv síly $F$
$\Delta L_{\text{Teplota}} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$ $\Delta L_{\text{Teplota}} = 0.163 \text{ mm}$	$\Delta L_{\text{Síla}} = \frac{F \cdot L}{E \cdot S}$ $\Delta L_{\text{Síla}} = 0.152 \text{ mm}$
$\Delta L = \Delta L_{\text{Teplota}} + \Delta L_{\text{Síla}} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{F \cdot L}{E \cdot S}$	

**Tab. 1**

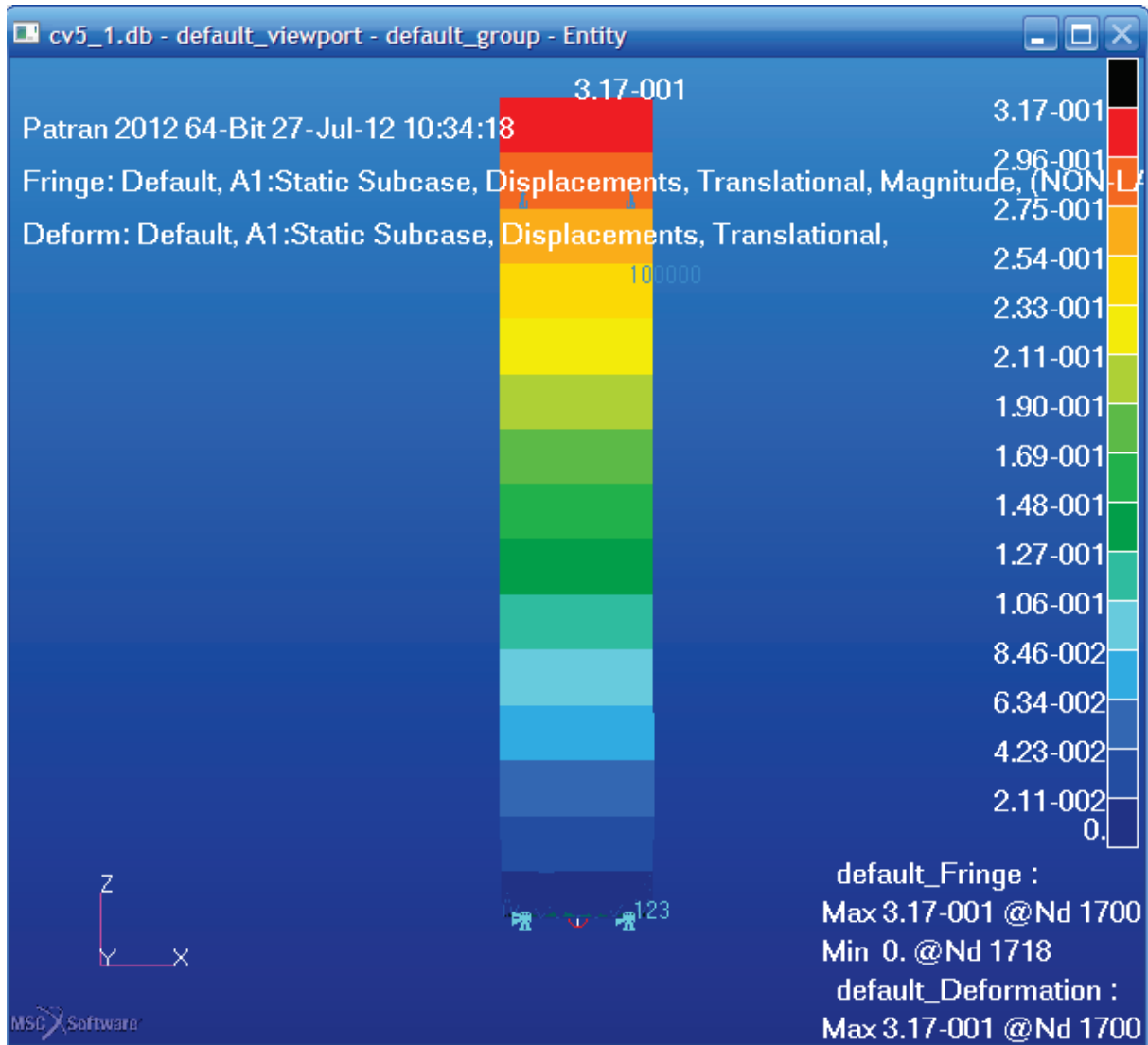
Prodloužení získané analytickým výpočtem je  $\Delta L = 0.315 \text{ mm}$

Řešení pomocí MKP – Patran. Řešte samostatně pomocí následující osnovy.

1. Vytvořte novou databázi s názvem Cviceni13\_teplota1.
2. Vytvořte „materiál“ – Ocel s parametry uvedenými v zadání, včetně počáteční teploty  $T_0$ .
3. Vytvořte geometrický model s rozměry uvedenými v zadání.
4. Vytvořte 3D Properties – Solid\_ocel.
5. Vytvořte síť: Elem Shape – Tet, Mesher – TetMesh, velikost elementu 5, Properties – Solid\_Ocel.
6. Vytvořte vazbu – vetknutí na horní části modelu.
7. Spodní část modelu zatíže silou uvedenou v zadání.
8. Přidejte konečnou teplotu tělesa (Create /Temperature/Nodal) dle zadání.
9. Proveďte výpočet.
10. Zobrazte výsledky posuvů  $\Delta L = 0.317 \text{ mm}$

Výsledek řešení by měl odpovídat obr.2.





Obr. 2 Průběh posunutí na tyči.



## 2 LITERATURA

LENERT, J. Úvod do metody konečných prvků. skripta VŠB-TU Ostrava, 1999.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.

VALCHÁŘOVÁ, J. Soudobé numerické metody v mechanice kontinua. SNTL. Praha. 1986.

BEER, G., WATSON, J.O. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. New York. 1992.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 1. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00855-X.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 2. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00901-7.

ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R., L. The Finite Element Method, Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. ISBN 0-7506-5049-4.

NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. Úvod do matematické teorii pružných a pružně plastických těles. SNTL. Praha. 1983.

### *Internet:*

<http://www.mscsoftware.com/>

<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>

