INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ I

14. GALERKINOVA METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Ing. Martin Fusek, Ph.D.
Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3023-0

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 GALERKINOVA METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

OBSAH KAPITOLY

V předchozí kapitole byla stručně uvedena metoda vážených reziduí. V této přednášce využijeme zmiňovanou metodu k definování základních vztahů metody konečných prvků. Tato formulace má tu výhodu, že je nezávislá na fyzikální podstatě řešené úlohy a tím pádem je univerzální v použití.

MOTIVACE:

V předchozích přednáškách byly odvozeny základní rovnice metody konečných prvků na základě přímého a variačního přístupu. Tento postup odvození je vázán na konkrétní fyzikální podstatu problému. Zde si ukážeme postup využívající metodu vážených reziduí a Galerkinovu metodu řešení. Tento přístup poskytuje nejobecnější postup pro odvození a může být použit na jakýkoliv praktický vědecký či inženýrský problém.

1.1 ÚVOD

V předchozí podkapitole byla uvedena klasická metoda vážených rezidui. Tato metoda definuje aproximační funkce přes celou oblast řešení, tedy globálně a musí splňovat všechny na ně kladené podmínky. Obecně splnění všech podmínek je složité (hlavně pro vícerozměrné úlohy) a z tohoto důvodu je výhodnější oblast řešení rozdělit na podoblasti a aproximační funkce definovat pouze nad těmito podoblastmi.

Audio 1.1 Úvod

Řešme následující rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x) = 0, \qquad a \le x \le b, \tag{14.1}$$

s následujícími okrajovými podmínkami:

$$y(a) = y_a, \tag{14.2}$$

$$y(b) = y_{b.}$$

Oblast řešení rozdělme na M podoblastí („elementy“). Celkem budeme mít M+1 „uzlů“. Aproximativní řešení budeme hledat ve tvaru:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{M+1} y_i n_i(x), \tag{14.3}$$

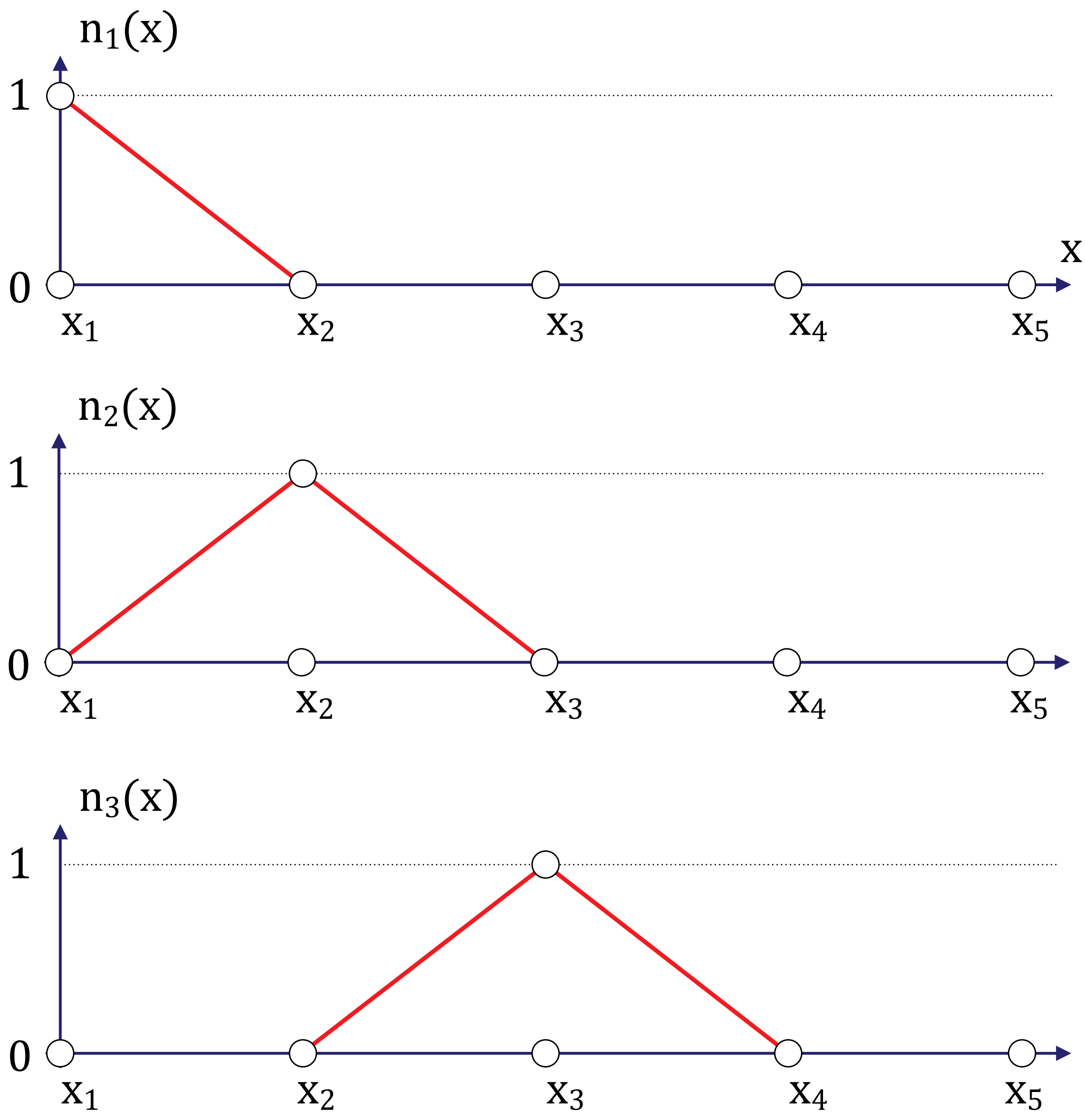
kde y_i jsou řešení v bodech x_i a $n_i(x)$ jsou nezávislé známe funkce, které jsou nenulové pouze na malé části řešené oblasti. Přesněji $n_i(x)$ jsou nenulové pouze na intervalu $x_{i-1} < x < x_{i+1}$. Pro jednoduchost zvolíme lineární funkce (obecně může být i vyššího stupně), a můžeme je tedy definovat následovně:

$$n_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \tag{14.4}$$

$$n_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \qquad x_i \le x \le x_{i+1}$$

$$n_i(x) = 0, \qquad x < x_{i-1} \qquad x > x_{i+1}$$

Hodnota $y(x)$ v intervalu $x_i < x < x_{i+1}$ se získá jako lineární kombinace z hodnot y_i a y_{i+1}. Patrné je vše z Obr. 1.



Obr. 1 – „Čepičky" nad řešenou oblastí

Například hodnota $\tilde{y}(x)$ mezi body i a $i+1$ lze získat následovně:

$$\tilde{y}(x) = y_i n_i(x) + y_{i+1} n_{i+1}(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \tag{14.5}$$

Vložme rovnici (14.3) do rovnice (14.1), získáme tak reziduál:

$$R(x, y_i) = \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} + f(x) \right] = \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(y_i n_i(x) \right) + f(x) \right], \tag{14.6}$$

Aplikujme Galerkinovou metodu vážených reziduí na poslední rovnici:

$$\int_{x_a}^{x_b} n_j(x) R(x, y_i) dx = \int_{x_a}^{x_b} n_j(x) \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(y_i n_i(x) \right) + f(x) \right] dx = 0 \tag{14.7}$$

$$j = 1, M + 1$$

Po uvážení vlastností daných rovnicí (14.4), tj. v intervalu $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ jsou neneulové pouze dvě funkce $n(x)$. Rovnici (14.7) tedy lze přepsat do následujícího tvaru:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} n_j(x) \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(y_j n_j(x) + y_{j+1} n_{j+1}(x) \right) + f(x) \right] dx = 0 \tag{14.8}$$

$$j = 1, M+1$$

Integrace rovnice vede na $M+1$ algebraických rovnic o $M+1$ neznámých y_j. To lze přepsat do známé maticové formy:

$$[K]\{y\} = \{F\} \tag{14.9}$$

Rovnice (14.7) je formálně použita Galerkinova metoda vážených reziduí a obsahuje jednak formulaci elementů a jednak vlastní složení. Nicméně rovnice (14.8) ukazuje, že integrace probíhá pouze přes jednotlivé elementy.

Pozn.: Při odvození jsme využili silnou formulaci metody vážených reziduí. Vhodnější je však aplikovat daný postup na slabou formulaci metody vážených reziduí. Druhý postup je více konzistentní s postupem při aplikaci variačních principů na strukturální problémy. Slabá formulace se objeví v další kapitole.

1.2 ODVOZENÍ ELEMENTU PŘI GALERKINOVĚ METODĚ

Pokud známe řešení rovnice (14.1), takovéto řešení platí v jakékoliv podoblasti řešení. Uvažme problém takto:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0, \qquad x_j \le x \le x_{j+1}, \tag{14.10}$$

dále pak:

$$y(x_j) = y_j, \tag{14.11}$$

$$y(x_{j+1}) = y_{j+1}.$$

Aproximaci přesného řešení tedy budeme hledat v následujícím tvaru:

$$y^{(e)}(x) = y_i N_1(x) + y_{j+1} N_2(x). \tag{14.12}$$

Interpolační tvarové funkce budou mít následující tvar:

$$N_1(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \qquad x_j \le x \le x_{j+1} \tag{14.13}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \qquad x_j \le x \le x_{j+1}$$

Platí, že:

$$N_1(x = x_j) = 1 \qquad\qquad N_1(x = x_{j+1}) = 0 \tag{14.14}$$

$$N_1(x = x_j) = 0 \qquad\qquad N_2(x = x_{j+1}) = 1$$

a tím pádem jsou automaticky splněny okrajové podmínky dané rovnicí (14.11). Vložme (14.13) do (14.12), dále pak získáme reziduál pro daný element daný výrazem:

$$R^{(e)}(x, y_j, y_{j+1}) = \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x) \right) + f(x). \tag{14.15}$$

Aplikujme Galerkinovu metodu vážených reziduí:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) R^{(e)}(x, y_j, y_{j+1}) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \left[\frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + f(x) \right] dx = 0 \tag{14.16}$$

$$i = 1, 2$$

Aplikujme na poslední výraz slabou formulaci metody vážených reziduí (viz výše), získáme:

$$N_i(x)\frac{dy^{(e)}}{dx}\bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_i}{dx}\frac{dy^{(e)}}{dx}\,dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x)f(x)dx = 0 \qquad (14.17)$$

$$i = 1, 2$$

Což lze upravit:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_1}{dx}\frac{dy^{(e)}}{dx}\,dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_1(x)f(x)dx + \frac{dy^{(e)}}{dx}\bigg|_{x_j} \qquad (14.18)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_2}{dx}\frac{dy^{(e)}}{dx}\,dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_2(x)f(x)dx - \frac{dy^{(e)}}{dx}\bigg|_{x_{j+1}}$$

Připomeňme, co získáme aplikací slabé formulace:

- Sníží se řád derivací hledaného aproximativního řešení o jeden řád.
- Matice tuhosti se stane symetrickou.
- Integrace per partes zavede do výrazu gradientní okrajové podmínky (zbytné, natural, druhého druhu, atd.)

Položme j=1, pak:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx}\frac{dy^{(e)}}{dx}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} N_1(x)f(x)dx + \frac{dy^{(e)}}{dx}\bigg|_{x_1} \qquad (14.19)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx}\frac{dy^{(e)}}{dx}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} N_2(x)f(x)dx - \frac{dy^{(e)}}{dx}\bigg|_{x_2}$$

Což lze maticově zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \qquad (14.20)$$

kde

$$k_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx, \qquad i,j = 1,2 \qquad (14.21)$$

Uzlové síly jsou daný pravou stranou rovnice (14.19).
Při sestavení globální rovnice lze využít postup ukázaný při přímém přístupu k metodě konečných prvků (kapitola 3). Získáme rovnici stejnou jako (14.9).

1.3 APLIKACE GALERKINOVY MKP NA STRUKTURNÍ PROBLÉMY

Vraťme se zpět k jednoduchému taženému či tlačenému tyčovému prvku, ten byl popsán v kapitole 3, a ukažme si, že vše funguje tak jak bylo odvozeno výše. Rovnice rovnováhy takového prvku lze zapsat v následujícím tvaru (detailněji, viz kapitola 5):

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{d}{dx}(E\varepsilon_x) = E\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0. \tag{14.23}$$

Pole posunutí lze aproximovat pomocí následující rovnice (blíže viz výše):

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2. \tag{14.24}$$

Galerkinova metoda vážených reziduí generuje následující rovnici:

$$\iiint\limits_V N_i(x)\left(E\frac{d^2u}{dx^2}\right)dV = \int_0^L N_i\left(E\frac{d^2u}{dx^2}\right)Sdx = 0\,, \qquad i = 1{,}2, \tag{14.25}$$

kde dV je objemová část elementu, ale protože předpokládáme konstantní průřez S, platí $dV = Sdx$. Integrací metodou per partes lze získat rovnici:

$$ES\int_0^L \frac{dN_i}{dx}\frac{du}{dx}\,dx = \left|N_i ES\frac{du}{dx}\right|_0^L, \qquad i = 1{,}2. \tag{14.26}$$

Uvážením vztahu (14.25) získáme:

$$ES\int_0^L \frac{dN_1}{dx}\frac{d}{dx}(N_1u_1 + N_2u_2)dx = -ES\frac{du}{dx}\bigg|_{x=0} = -ES\varepsilon|_{x=0} = -S\sigma|_{x=0}, \tag{14.27}$$

$$ES\int_0^L \frac{dN_2}{dx}\frac{d}{dx}(N_1u_1 + N_2u_2)dx = ES\frac{du}{dx}\bigg|_{x=L} = ES\varepsilon|_{x=L} = S\sigma|_{x=L},$$

Vidíme, že na hranicích gradientní podmínky představují aplikované zatížení v uzlech elementu. Rovnice lze přepsat do maticového tvaru:

$$ES\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \tag{14.28}$$

Provedením integrace lze získat následující tvar:

$$\frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{14.29}$$

Porovnáním rovnice (14.29) s rovnicí (3.7) popř. (6.21) lze vidět, že jsme získali stejný výsledek.
Tento příklad jednoduše ukazuje na ekvivalenci Galerkinovy metody a energetického přístupu k danému problému.

1.4 ZÁVĚR

Metoda vážených reziduí (v Galerkinově podobě) je silný matematický nástroj pro formulování vztahů pro metodu konečných prvků a řešení okrajových problémů popsaný diferenciálními rovnicemi. Je patrno, že tento postup je nezávislý na fyzikální podstatě problému a proto může být aplikován obecně.

Audio 1.2 Modelování

1.5 CVIČENÍ - ODEVZDÁNÍ PROGRAMU

Program bude odevzdán jednak v tištěné jednak v elektronické verzi na vhodném datovém nosiči.

1.5.1 Požadavky na závěrečnou zprávu

Zpráva bude obsahovat:

- jméno studenta, studijní číslo, skupina
- zadání úlohy
- rozbor úlohy
- budou uvedena všechna potřebná vstupní data (geometrie, materiál, okrajové podmínky)
- vlastní model (obrázek, typy použitých prvků, aplikované okrajové podmínky, …) ve formě obrázků a komentářů
- výsledky (obrázky, grafy, tabulky, …) a jejich interpretace
- závěr, ve kterém bude provedeno celkové zhodnocení

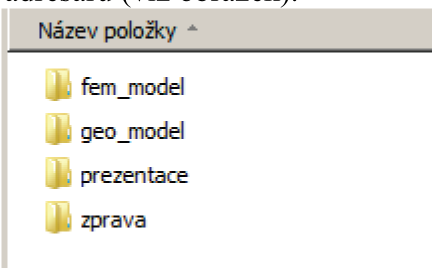
Do programu nepopisujte, jak jste vytvářeli model v daném software. Závěrečná zpráva není manuál k danému software!

1.5.2 Datový nosič

Datový nosič bude obsahovat:

- elektronická verze tištěné zprávy
- prezentaci (do 6-ti obrazovek), ve které budou stručné informace o řešené úloze a výsledcích
- geometrický model (pokud byl vytvářen v nějakém jiném software) v rozumném přestupném formátu (parasolid, iges, step)
- výsledný model v programu Patran (*.db,*. db.jou) , a pokud to dovolí velikost i výsledkové soubory (*.bdf, *.xdb nebo *.master nebo *.op2)

Dokumenty uložte ve vhodném formátu, doporučujeme: *.pdf, *.djvu, *.rtf, *.doc, *.ppt.
Vše umístěte do samostatných adresářů (viz obrázek).



2 LITERATURA

LENERT, J. Úvod do metody konečných prvků. skripta VŠB-TU Ostrava, 1999.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.

VALCHÁŘOVÁ, J. Soudobé numerické metody v mechanice kontinua. SNTL. Praha. 1986.

BEER, G., WATSON, J.O. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. New York. 1992.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 1. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00855-X.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 2. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00901-7.

ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R., L. The Finite Element Method, Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. ISBN 0-7506-5049-4.

NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. Úvod do matematické teorii pružných a pružně plastických těles. SNTL. Praha. 1983.

Internet:
http://www.mscsoftware.com/
http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/