

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013



Název: Fyzika I
 Autoři: Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.,
 Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová
 Vydání: první, 2013
 Počet stran: 115
 Náklad: 5

Jazyková korektura: nebyla provedena.



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Modernizace výukových materiálů a didaktických metod
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/15.0463
Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.,
 Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Gravitační pole

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	GRAVITAČNÍ POLE.....	3
1.1	Úvod	4
1.2	Definice.....	4
1.2.1	Newtonův gravitační zákon	4
1.2.2	Intenzita gravitačního pole	5
1.2.3	Potenciál gravitačního pole.....	5
1.2.4	Gravitační a tíhové pole Země.....	6
1.2.5	Keplerovy zákony	7
1.2.6	Kosmické rychlosti	8
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	10



1 GRAVITAČNÍ POLE



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Fyzikální pole
Newtonův gravitační zákon
Intenzita gravitačního pole
Potenciál gravitačního pole
Gravitační a tíhové pole Země
Planetární pohyby



MOTIVACE:

Gravitační pole patří k fyzikálním polím, která jsou nositelem vzájemného silového působení mezi částicemi, tj. jader, atomů, molekul, makrofyzikálních a megafyzikálních objektů. Gravitační pole se uplatňuje ve všech činnostech člověka. Vzhledem k tomu, že existuje v okolí materiálních objektů, je nutné umět popsat fyzikální veličiny, které je charakterizují.

1.1 ÚVOD

Fyzikální pole je z hlediska makrofyziky druhem hmoty, který je hmotným nositelem vzájemného silového působení mezi částicemi, tj. jader, atomů, molekul, makrofyzikálních a megafyzikálních objektů.

Fyzikální objekty na sebe navzájem působí silami. Toto silové působení nebo-li interakce se neděje na dálku (aktio in distans) nekonečně rychle, ale prostřednictvím pole konečnou rychlostí.

Pole existující v okolí materiálních objektů, které jsou vzhledem ke vztažné soustavě v klidu, se nazývají statická. Pole materiálních objektů, které se vzhledem ke vztažné soustavě budou pohybovat, se nazývají dynamická. Čím je vzájemný pohyb pozorovací vztažné soustavy a materiálního objektu, jehož pole sledujeme jednodušší, tím je i pole jednodušší.

Základní jevy, které se uplatňují mezi materiálními objekty v makroskopických vzdálenostech, jsou gravitační a elektromagnetická interakce, v případě klidové soustavy jde o gravistatickou a elektrostatickou interakci.

Základní charakteristickou veličinou, která je mírou vlastností materiálních objektů z hlediska uvedených interakcí je hmotnost. Fyzikální pole jsou spjaté se třemi základními charakteristikami částic. S jejich hmotností (gravitační pole), elektrickým nábojem (elektrické pole) a magnetickým momentem (magnetické pole). Magnetické pole však vzniká i v okolí pohybujících se elektrických nábojů. Proto magnetické pole není úplně analogické gravitačnímu a elektrostatickému poli a zpracování magnetických jevů vyžaduje odlišný postup.

1.2 DEFINICE

1.2.1 Newtonův gravitační zákon

Gravitační síla je úměrná součinu hmotností M , m interagujících těles. Změnou vzdáleností středů r mezi koulí a kuličkou se změní síla, např. při zvětšení vzdálenosti dvakrát, se síla zmenší na čtvrtinu původní hodnoty. Gravitační síla je nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti a je vyjádřena ve tvaru

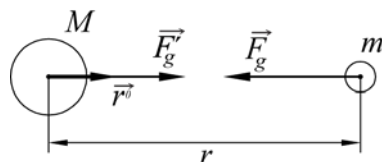
$$F_g = \kappa \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.1)$$

kde $\kappa = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta.

Homogenní těleso tvaru koule má hmotnost 1 kg, působí-li na stejné těleso ve vzdálenosti 1 m gravitační silou $6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N}$.

Přepišme vztah (1.1) do vektorového tvaru. Gravitační síla je přitažlivá a působí ve směru spojnice středů obou koulí (obr. 1.3).





Obr. 1.3 Orientace sil při gravitační interakci

Označíme-li \vec{r}^0 jednotkový vektor jdoucí ze středu homogenní koule (resp. hmotného bodu) o hmotnosti M ke středu homogenní koule (resp. hmotného bodu) o hmotnosti m , bude koule o hmotnosti M působit na kouli o hmotnosti m ve vakuu silou.

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \vec{r}^0 \quad (1.2)$$

Podle principu akce a reakce bude těleso o hmotnosti m působit na těleso s hmotností M silou $\vec{F}_g' = \vec{F}_g$. Vztah (1.2) je vyjádřením Newtonova gravitačního zákona, který byl odvozen z Keplerových zákonů pro planety Sluneční soustavy.

1.2.2 Intenzita gravitačního pole

K porovnání působení pole v různých místech se zavádí pojem intenzity pole. Je vhodné považovat za pokusný objekt částici, aby pole samotného pokusného objektu příliš nerušilo sledované pole.

Intenzita pole, které zprostředkovává jistou interakci, se definuje jako podíl síly, působící v poli na pokusnou částici a skalární veličiny, která uvedenou částici charakterizuje z hlediska příslušné interakce (hmotnosti).

Intenzita pole je vektorová veličina, jejíž směr a orientace je dána vektorem příslušné síly.

Označíme-li hmotnost částice m , je intenzita gravistatického pole definována vztahem

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} \quad (1.3)$$

1.2.3 Potenciál gravitačního pole

Potenciál pole je definován jako podíl potenciální energie materiálního objektu v poli (gravistatickém) a veličiny, která charakterizuje tento objekt z hlediska příslušného pole (hmotnosti).

Pro potenciál gravistatického pole χ se v bodě určeném polohovým vektorem \vec{r} dostane

$$\chi = \frac{W_p}{m} \quad (1.7)$$

Potenciál v libovolném místě gravistatického pole je určen gravistatickou potenciální energií materiálního objektu v tomto místě, vztahující se na jednotku jeho hmotnosti.



1.2.4 Gravitační a tíhové pole Země

Zemi považujeme za homogenní kouli o hmotnosti $M_Z = 5,976 \cdot 10^{24}$ kg a poloměru $R_Z = 6\,378$ km. Podle vztahu (1.5) je intenzita gravitačního pole Země na povrchu Země

$$K = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

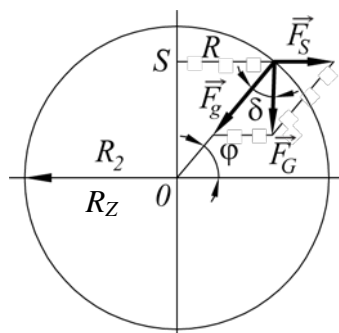
a ve výšce h nad povrchem Země

$$K_h = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \quad (1.12)$$

Pro potenciály pak platí

$$\chi = -\kappa \frac{M_Z}{R_Z}, \quad \chi_h = -\kappa \frac{M_Z}{R_Z + h} \quad (1.13)$$

Země obíhá kolem Slunce a otáčí se kolem vlastní osy. S ohledem na rotaci Země je soustava souřadnic spojená s jejím povrchem neinerciální vztažnou soustavou viz kap. 2.2.2., která se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω .



Obr. 1.9 K pohybu Země

Na částici o hmotnosti m vzhledem k neinerciální vztažné soustavě otáčející se Země působí setrvačná síla \vec{F}_s (obr. 1.9), jejíž velikost je, viz (2.63) a (2.36)

$$F_s = m\omega^2 R = m\omega^2 R_Z \cos \varphi,$$

kde φ je zeměpisná šířka. Kromě toho působí na částici gravitační síla Země \vec{F}_g směřující do středu Země.

Výslednicí obou sil

$$\vec{F}_G = \vec{F}_s + \vec{F}_g \quad (1.14)$$

je tíhová síla \vec{F}_G . Směr tíhové síly \vec{F}_G na určitém místě povrchu Země se nazývá svislý směr. Tíhová síla \vec{F}_G uděluje volné částici o hmotnosti m tíhové zrychlení

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} \quad (1.15)$$

Odchylka směru tíhové síly \vec{F}_G od směru gravitační síly Země \vec{F}_g na daném povrchu Země určuje velmi malý úhel δ . Rozdíl velikosti sil \vec{F}_g a \vec{F}_G působících na částici o hmotnosti m na určitém místě povrchu Země je nulový na pólech Země a dosahuje maximální hodnoty na rovníku (asi 0,3 % velikosti příslušné gravitační síly \vec{F}_g).

Měřením bylo zjištěno, že všechna tělesa, bez ohledu na jejich hmotnost, padají volně na určitém místě povrchu Země se stejným tíhovým zrychlením g podle vztahu $F_G = mg$, kde F_G je velikost tíhové síly působící na částici na určitém místě povrchu Země. Tato síla je úměrná hmotnosti tělesa. Velikost tíhového zrychlení se mění od nejmenší hodnoty na rovníku asi $9,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ k největší hodnotě na pólu Země asi $9,83 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Mezinárodní dohodou je stanoveno normální tíhové zrychlení $9,806 65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (přesně).

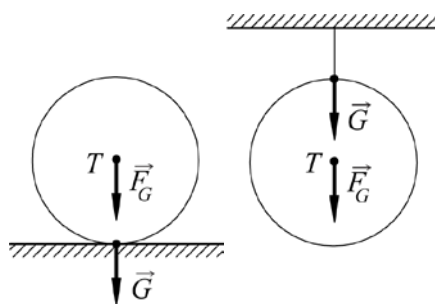
Vektorem tíhového zrychlení \vec{g} lze popsat vektorové pole na povrchu Země a v blízkosti povrchu Země. Uvedené pole, jehož intenzitou je vektor \vec{g} se nazývá tíhové pole.

Kromě pojmu tíhová síla používáme pojem tíha tělesa \vec{G} . Je to síla, mající svůj původ v tíhovém poli Země a projevuje se např. jako tlaková síla, kterou působí těleso na nehybnou vodorovnou podložku nebo jako tahová síla, kterou působí těleso na nehybný svislý závěs. Působíště tíhové síly leží v těžišti tělesa T . Působíště tíhy klademe do stykové plochy tělesa a podložkou nebo pevného bodu závěsu.

Na daném místě povrchu Země má tíha tělesa v klidu stejnou velikost i směr jako tíhová síla:

$$F_G = G, \quad \vec{F}_G \parallel \vec{G}$$

Tíhová síla F_G a tíha G tělesa jsou znázorněny na obr. 1.10.



Obr. 1.10 Tíhová síla F_G a tíha G tělesa

1.2.5 Keplerovy zákony

V kapitole 1 jsme poznali gravitační pole. Každý pohyb vznikající účinkem gravitační síly nazýváme planetárním. Patří zde pohyby planet kolem Slunce, ale i pohyb Měsíce kolem Země a umělých družic kolem Země.

Pohyby planet kolem Slunce byly poprvé popsány J. Keplerem ve formě tří zákonů:

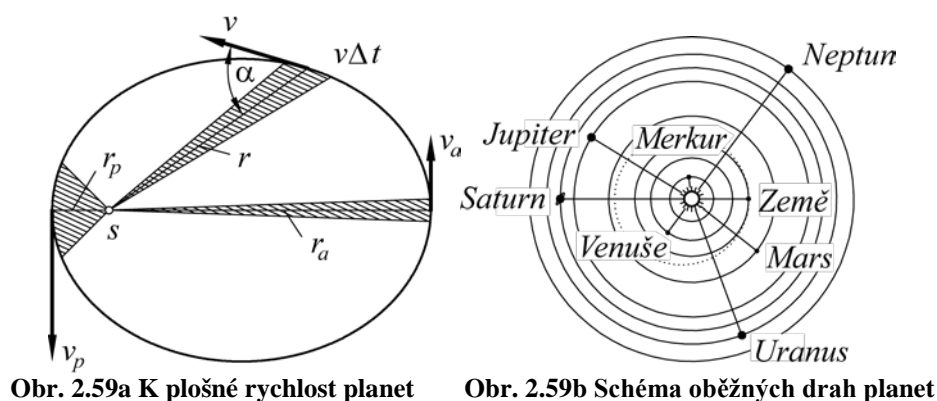
1. Planety se pohybují kolem Slunce po eliptických trajektoriích o malé výstřednosti, v jejichž společném ohnisku je Slunce.



2. Plochy opsané průvodičem (spojnice středů planety a Slunce, obr. 2.59a) ve stejných dobách jsou stejně velké. Matematicky $\frac{dS}{dt} = w = konst.$, což vyjadřuje, že plošná rychlost planety je stálá.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií, matematicky

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = konst.} \quad \text{nebo} \quad \boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}} \quad (2.187)$$

Schéma oběžných drah planet je na obr. 2.59b.



Obr. 2.59a K plošné rychlosti planet

Obr. 2.59b Schéma oběžných drah planet

Obdobné zákony pak platí i pro pohyb umělých družic. Trajektoriemi planetárních pohybů jsou obecně kuželosečky (kružnice, elipsa, parabola nebo hyperbola).

1.2.6 Kosmické rychlosti

- První kosmická rychlost

Určíme první kosmickou rychlost v_1 tělesa o hmotnosti m . První kosmická (kruhová) rychlost je rychlost, kterou musí mít těleso, aby mohlo obíhat kolem Země rovnoměrně po kruhové trajektorii.

Těleso obíhá rovnoměrně po kruhové trajektorii ve výšce h nad povrchem Země.

Poloměr trajektorie je $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země. Odstředivá síla $\frac{m v_1^2}{r}$ potřebná k udržení rovnoměrného kruhového pohybu musí kompenzovat gravitační sílu, tedy

$$\boxed{\frac{m v_1^2}{r} = \kappa \frac{M_Z m}{r^2}} \quad (2.188)$$

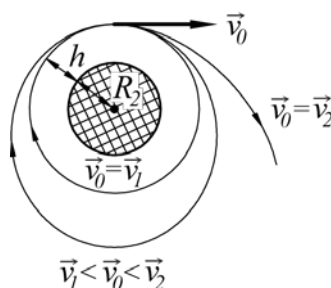
Pak dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{R_Z + h}} \quad (2.189)$$

První kosmická rychlost nezávisí na hmotnosti obíhajícího tělesa. Pro $h = 0$ m je $v_1 = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Je-li tělesu v dané výšce h nad povrchem Země udělena počáteční rychlost v_0 o málo větší než je v_1 , pohybuje se po eliptické trajektorii, v jejímž jednom ohnisku leží střed Země.

- Druhá kosmická rychlost

Určíme druhou kosmickou rychlost v_2 tělesa o hmotnosti m . Druhá kosmická rychlost je velikost minimální rychlosti, kterou musíme udělit tělesu ve výšce h nad povrchem Země, aby se vzdálilo do nekonečné vzdálenosti od povrchu Země, tj. do vzdálenosti, ve které je jeho kinetická energie $W_{k\infty}$ a gravitační potenciální energie $W_{p\infty}$ nulová (rychlost úniková nebo parabolická) – viz obr. 2.60.



Obr. 2.60 Ke druhé kosmické rychlosti

Použijeme zákona zachování mechanické energie. Budou-li $W_{k\infty}$ i $W_{p\infty}$ nulové, pak

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \kappa M m \frac{1}{R_Z + h} = 0 \quad (2.190)$$

a odtud

$$v_2 = \sqrt{2 \kappa M_Z \frac{1}{R_Z + h}} \quad (2.191)$$

Pro $h \doteq 0$ je $v_2 = v_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Druhá kosmická rychlost nezávisí na hmotnosti tělesa.

- Třetí kosmická rychlost

Je nutná k tomu, aby se těleso vzdálilo z gravitačního pole Slunce, $v_2 = 16,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Čtvrtá kosmická rychlost k tomu, aby se vzdálilo z Galaxie.



2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Hmotnost a gravistatická interakce
- Silový účinek gravitačního pole ve formě Newtonova gravitačního zákona
- Pojem intenzity pole, nutný k porovnání působení pole v různých místech
- Pojem potenciální pole, jako veličina nezávisající na vlastnostech materiálního objektu v poli
- Charakteristika gravitačního a tíhového pole Země
- Pohyby planet kolem Slunce, které jsou popsány Keplerovými zákony
- Vyjádření první, druhé a třetí kosmické rychlosti



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

**Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený translační
pohyb**

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová,
Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ TRANSLAČNÍ POHYB.....	3
1.1	Úvod	4
1.2	Definice.....	4
1.2.1	Souřadnice a polohový vektor částice.....	4
1.2.2	Průměrná a okamžitá rychlost	5
1.2.3	Průměrné a okamžité zrychlení.....	6
1.2.4	Tečné a normálové zrychlení.....	8
1.2.5	Charakteristika pohybu podle rychlosti a zrychlení	9
1.2.6	Klasifikace posuvných pohybů.....	10
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	12



1 ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ TRANSLAČNÍ POHYB



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Poloha částice, souřadnice a polohový vektor

Trajektorie pohybu

Průměrná a okamžitá rychlost

Průměrné a okamžité zrychlení

Tečné a normálové zrychlení

Pohyb přímočarý rovnoměrný

Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený



MOTIVACE:

Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený translační pohyb je důležitý pro všechny lidské činnosti. Polohu částice (tělesa) je nutné stanovit při popisu jakékoliv události. Z pojmů jako je dráha, rychlost a zrychlení se počítá při popisu jakéhokoliv tělesa, zejména při popisu dopravních prostředků, pohybu těles při manipulaci a popisu zvláštních druhů pojmů, při kterých částice nebo těleso vykovává posuvný pohyb.

1.1 ÚVOD

Pohyb částice z hlediska kinematiky lze popsat vyjádřením funkční závislosti parametrů vyjadřujících polohu částice na čase. Kinematika popisuje pohyb částice pomocí veličiny jako je dráha, rychlost, zrychlení.

1.2 DEFINICE

1.2.1 Souřadnice a polohový vektor částice

Polohu částice můžeme popsat souřadnicemi nebo polohovým vektorem \vec{r} v dané souřadnicové soustavě.

Souřadnicemi se určuje místo (bod), v němž se částice nachází v určitém časovém okamžiku. Jsou to tři (trojrozměrný prostor) nebo dva (dvojměrný prostor) nezávislé parametry.

Ve fyzice používáme nejčastěji následující souřadnice v rovině:

- Kartézská (ortonormální) souřadnicová soustava $(0; x, y)$.
- Polární souřadnicová soustava $(0; r, \varphi)$, kde $\overline{OP} = r$ je tzv. průvodič (radiusvektor) bodu P , orientovaný úhel φ je polární úhel a jeho velikost se nazývá argument.

Polohovým vektorem \vec{r} (radiusvektorem) je určena poloha částice jen jednou rovnicí

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)} \text{ nebo } x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2.6)$$

Rovnice (2.6) se nazývají parametrické rovnice trajektorie pro posuvný pohyb (čas t je parametr).

Trajektorie pohybu je souhrn všech poloh, kterými projde částice při svém plynulém časovém postupu.

Polohový vektor \vec{r} hmotného bodu P vzhledem k počátku souřadnicové soustavy 0 je orientovaná úsečka, jejíž počátek je v bodě 0 a konec v bodě P . V kartézské souřadnicové soustavě platí

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}} \quad (2.7)$$

kde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory a x, y, z jsou kartézské souřadnice bodu P .

Pro určení směru vektoru \vec{r} a jeho velikosti platí vztahy

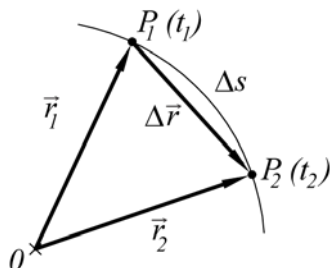
$$\boxed{\cos \alpha = \frac{x}{r}; \cos \beta = \frac{y}{r}; \cos \gamma = \frac{z}{r}; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.8)$$

kde úhlům α, β, γ se říká směrové úhly a jejich kosinům směrové kosiny.



1.2.2 Průměrná a okamžitá rychlost

Rozdíl polohových vektorů ve dvou dostatečně blízkých časech $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (obr. 2.8) udává směr pohybu a velikost dráhy Δs a to tím přesněji, čím je tento interval menší. Pak platí $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$. V limitě je shoda úplná, proto lze psát $|d\vec{r}| = ds$, kde ds je tzv. element dráhy.



Obr. 2.8 K popisu střední rychlosti

K popisu pohybu je důležitá znalost změny dráhy za čas (rychlost) a změny rychlosti za čas (zrychlení).

Nachází-li se částice v čase t_1 v bodě P_1 (obr. 2.8) a v čase t_2 v bodě P_2 a je-li Δs dosažená dráha mezi P_1 a P_2 , pak pro $\Delta t = t_2 - t_1$ definujeme tzv. průměrnou rychlost (velikost rychlosti) mezi body P_1 a P_2

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(2.9)

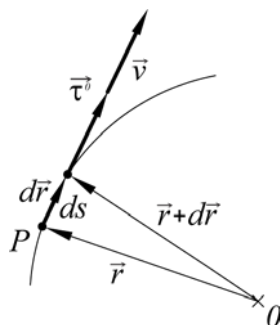
Pro $\Delta t \rightarrow 0$ je

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

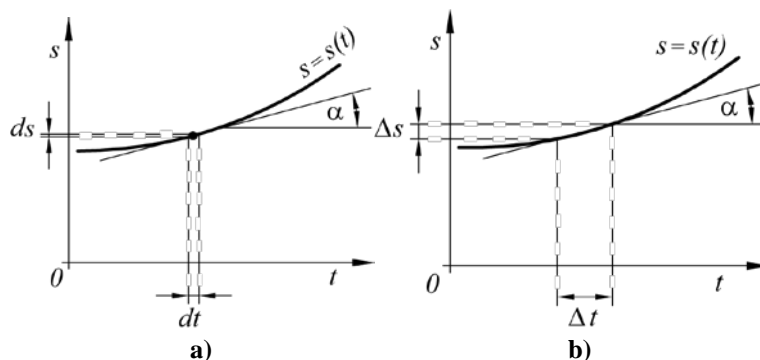
(2.10)

a velikost okamžité rychlosti v (obr. 2.9) vyjadřuje

**podíl elementárních přírůstků dráhy ds a času dt
první derivaci dráhy podle času
časovou změnu dráhy.**



Obr. 2.9 K popisu okamžité rychlosti

Obr. 2.10 Graf funkce $s = s(t)$

Geometricky je podíl vyjadřující průměrnou rychlost roven směrnicí sečny ($\operatorname{tg} \alpha$), (obr. 2.10a) a podíl vyjadřující okamžitou rychlost roven směrnicí tečny v grafu funkce $s = s(t)$ (obr. 2.10b). Vektorově

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}^0 \quad (2.11)$$

kde $\vec{\tau}^0$ je jednotkový vektor určený tečnou v daném bodě a směrem pohybu. Pak

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (2.12)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \text{ kde } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.13)$$

Velikost a směr rychlosti určují pomocí souřadnic rychlosti v_x, v_y, v_z vztahy

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad (2.14)$$

1.2.3 Průměrné a okamžité zrychlení

Má-li částice v čase t_1 rychlost \vec{v}_1 a v čase t_2 rychlost \vec{v}_2 , pak pro $\Delta t = t_2 - t_1$ a $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ definujeme

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.15)$$

jako průměrné zrychlení na úseku trajektorie mezi body P_1 a P_2 .

Pro $\Delta t \rightarrow 0$ je

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.16)$$



vektor okamžitého zrychlení a vyjadřuje

**podíl elementárních přírůstků rychlosti $d\vec{v}$ a času dt
první derivaci rychlosti podle času
časovou změnu rychlosti
druhou derivaci polohového vektoru podle času.**

Geometricky je podíl vyjadřující průměrné zrychlení roven směrnici sečny a podíl vyjadřující okamžité zrychlení roven směrnici tečny v grafu $v = v(t)$.

V souřadnicích

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad (2.17)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \text{kde} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (2.18)$$

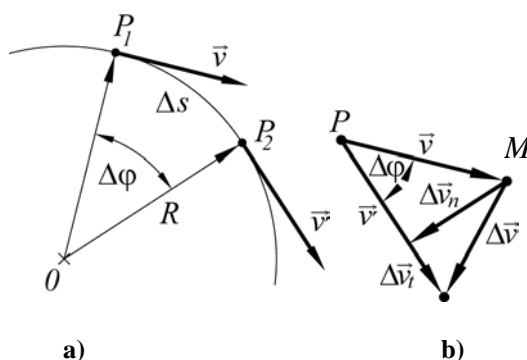
Velikost a směr zrychlení určují vztahy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}, \quad (2.19)$$

Jednotka dráhy $[s] = \text{m}$, rychlosti $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, zrychlení $[a] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Z rozkladu vektoru zrychlení \vec{a} do dvou na sebe kolmých složek (směr tečny ke křivce a směr hlavní normály) najdeme vztahy pro tzv. tečné a normálové zrychlení.

Na trajektorii v obr. 2.11a) zvolme dva body P_1 a P_2 a vektory rychlosti \vec{v} a \vec{v}' . Posuňme vektory rychlosti \vec{v} a \vec{v}' do jednoho bodu P a jejich rozdíl označme $\Delta\vec{v}$ (obr. 2.11b). Rozložme vektor $\Delta\vec{v}$ na $\Delta\vec{v}_t$ ve směru vektoru \vec{v}' a na $\Delta\vec{v}_n$ tak, že z bodu M spustíme kolmici na vektor rychlosti \vec{v}' .



Obr. 2.11 K určení tečného a normálového zrychlení

Pak platí:

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_t + \Delta \vec{v}_n \quad (2.20)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n} \quad (2.21)$$

Z obr. 2.11b) plyne $\Delta v_t = v' - v \cos \Delta \varphi$. Pak

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

poněvadž $\cos \Delta \varphi$ v limitě pro $\Delta t \rightarrow 0$ konverguje k jedné.

1.2.4 Tečné a normálové zrychlení

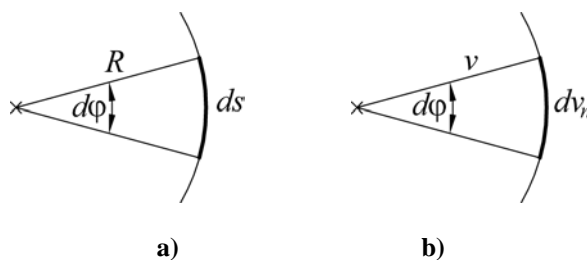
Tečné zrychlení \vec{a}_t souvisí se změnou velikosti rychlosti a má směr jednotkového vektoru \vec{e}^0

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}^0 \quad (2.22)$$

Normálové zrychlení \vec{a}_n souvisí se změnou zakřivení trajektorie a má směr jednotkového vektoru \vec{R}^0 (normály ke křivce)

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt} \vec{R}^0 \quad (2.23)$$

Podle obr. 2.12 a), b) platí



Obr. 2.12 K určení délky oblouku křivky

$$ds = R d\varphi$$

$$dv_n = v d\varphi$$

odtud

$$dv_n = v \frac{ds}{R}$$

Pak pro normálové zrychlení je

$$a_n = \frac{v ds}{R dt} = \frac{v^2}{R}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{R}^0, \quad (2.24)$$

kde \vec{R}^0 je jednotkový vektor ve směru hlavní normály křivky orientovaný ke středu křivosti.

Zrychlení lze vyjádřit pomocí tečného a normálového zrychlení ve tvaru

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{v}^0 + \frac{v^2}{R} \vec{R}^0 \quad (2.25)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad (2.26)$$

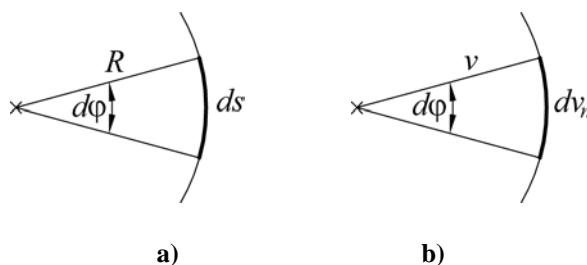
1.2.5 Charakteristika pohybu podle rychlosti a zrychlení

Tečné zrychlení \vec{a}_t souvisí se změnou velikosti rychlosti a má směr jednotkového vektoru \vec{v}^0

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{v}^0 \quad (2.22)$$

Normálové zrychlení \vec{a}_n souvisí se změnou zakřivení trajektorie a má směr jednotkového vektoru \vec{R}^0 (normály ke křivce)

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt} \vec{R}^0 \quad (2.23)$$



Obr. 2.12 K určení délky oblouku křivky

Podle obr. 2.12 a), b) platí

$$ds = R d\varphi$$

$$dv_n = v d\varphi$$

odtud

$$dv_n = v \frac{ds}{R}$$

Pak pro normálové zrychlení je

$$a_n = \frac{v ds}{R dt} = \frac{v^2}{R}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{R}^0, \quad (2.24)$$

kde \vec{R}^0 je jednotkový vektor ve směru hlavní normály křivky orientovaný ke středu křivosti.

Zrychlení lze vyjádřit pomocí tečného a normálového zrychlení ve tvaru

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{v}^0 + \frac{v^2}{R} \vec{R}^0 \quad (2.25)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad (2.26)$$

1.2.6 Klasifikace posuvných pohybů

Z definice rychlosti (2.11) plyne nejjednodušší klasifikace posuvných pohybů částice. Je-li jednotkový vektor rychlosti $\vec{\tau}^0 = konst.$, pohyby jsou přímočaré, $\vec{\tau}^0 \neq konst.$, pohyby jsou křivočaré. V následujícím odstavci budeme řešit přímočaré pohyby jako funkční závislosti kinematických veličin dráhy s , rychlosti v , zrychlení a na čase t .

Z definice zrychlení a lze určit závislost $v = v(t)$

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad dv = a dt, \quad \int dv = \int a dt$$

$$v = \int a dt + konst. \quad (2.37)$$

Z definice rychlosti v lze určit závislost $s = s(t)$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds = v dt, \quad \int ds = \int v dt$$

$$s = \int v dt + konst. \quad (2.38)$$

Pohyb přímočarý rovnoměrný:

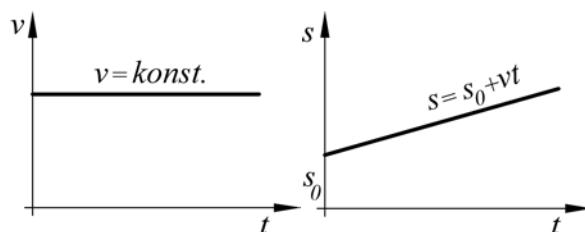
$$a = 0$$

$$v = \int 0 dt = konst. \quad s = v \int dt = vt + C, \quad C = s_0 \quad \boxed{s = s_0 + vt} \quad (2.39)$$

Kde s_0 je počáteční dráha.

Grafy pro přímočarý rovnoměrný pohyb jsou na obr. 2.15.



Obr. 2.15 Graf funkce $v = v(t)$ a $s = s(t)$ pro přímočarý rovnoměrný pohyb**Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený:**

$$a = konst.$$

$$v = a \int dt = at + C_1, \quad C_1 = v_0$$

$$v = v_0 + at$$

(2.40)

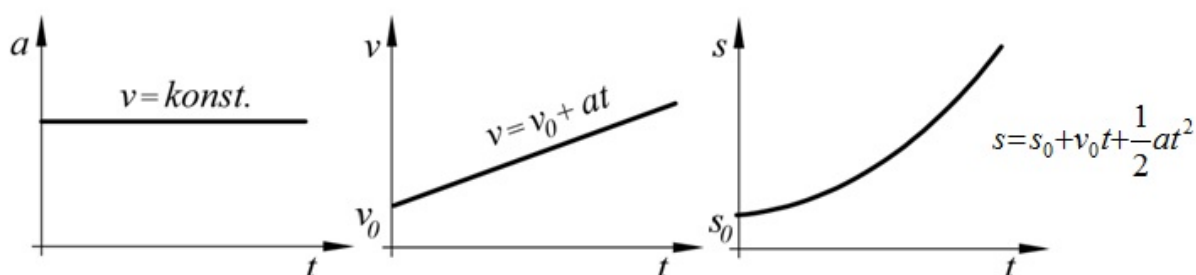
a dosazením (2.40) do vztahu (2.38)

$$s = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C_2, \quad C_2 = s_0$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

(2.41)

Grafy pro přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb jsou na obr. 2.16.

Obr. 2.16 Graf funkce $a = a(t)$, $v = v(t)$ a $s = s(t)$ pro přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb

2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Kartézské a polární souřadnice, parametrické rovnice trajektorie pro posuvný pohyb
- Charakteristika pohybu částic podle rychlosti a podle zrychlení
- Klasifikace posuvných pohybů



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

**Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený rotační
pohyb**

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová,
Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ ROTAČNÍ POHYB	3
1.1	Úvod	4
1.2	Definice.....	4
1.2.1	Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení	4
1.2.2	Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.....	5
1.2.3	Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením	6
1.2.4	Velikost tečného a normálového zrychlení otáčivého pohybu.....	6
1.2.5	Klasifikace otáčivých pohybů	6
1.2.6	Pohyb rovnoměrný po kružnici.....	7
1.2.7	Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici	7
1.2.8	Moment síly.....	7
1.2.9	Moment dvou sil působících na dvě částice.....	8
1.2.10	Dvojice sil	9
1.2.11	Moment hybnosti.....	9
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	11



1 ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ ROTAČNÍ POHYB



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením

Pohyb rovnoměrný po kružnici

Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici



MOTIVACE:

S otáčivým pohybem částice nebo tělesa se setkáme v podstatě u každého pohybu tělesa. Výjimku tvoří pohyb částic nebo těles po přímce. S otáčivým pohybem je nutno počítat téměř ve všech technických problémech. Jde o rotaci turbíny, setrvačnicků, dopravních vozidel, aj.



1.1 ÚVOD

Pro popis rovnoměrného, rovnoměrně zrychleného a nerovnoměrně zrychleného rotačního pohybu je třeba znalost základních veličin otáčivého pohybu, které jsou uvedeny v dalším textu.

1.2 DEFINICE

1.2.1 Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení

Při otáčivém pohybu hmotného bodu je trajektorií pohybu kružnice. Kromě kinematických veličin \vec{r} , \vec{v} a \vec{a} při vyšetřování otáčivých pohybů pracujeme s úhlovými veličinami $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ a $\vec{\varepsilon}$, které jsou také funkcí času.

Úhlová dráha je jako vektor vyjádřena funkční závislostí:

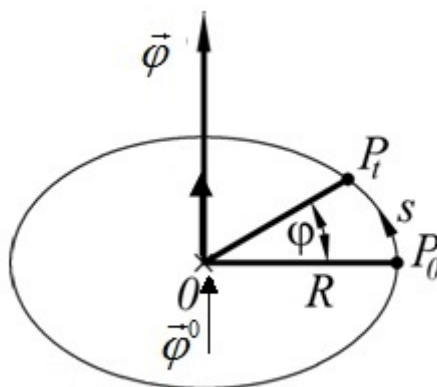
$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t) \quad (2.28)$$

Velikost úhlové dráhy je rovna velikosti středového úhlu φ příslušejícího oblouku délky s mezi polohami bodu P_0 v čase $t = 0$ s a P_t v následujícím čase t , kde $\varphi = \frac{s}{R}$.

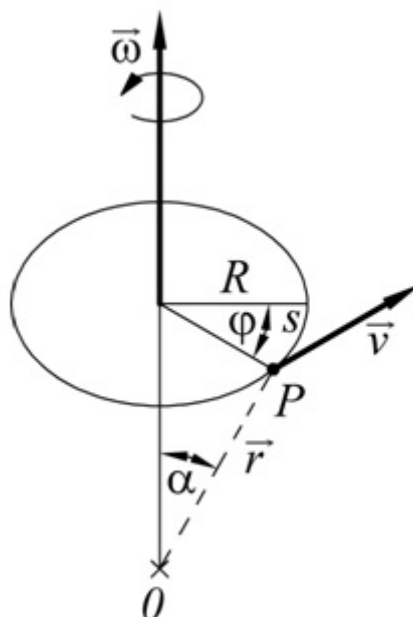
Platí

$$\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{\varphi}^0, \quad (2.29)$$

kde $\vec{\varphi}^0$ je jednotkový vektor kolmý na osu otáčení a je orientován na tu stranu, ze které vidíme otáčení bodu P v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček), viz obr. 2.13.



Obr. 2.13 K definici úhlové dráhy $\vec{\varphi}$

Obr. 2.14 K určení vztahu mezi obvodovou (v) a úhlovou (φ) rychlostí

Úhlovou rychlost $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ definujeme jako časovou změnu úhlové dráhy $\vec{\varphi}$

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}} \quad (2.30)$$

Platí $\vec{\omega} = \omega \vec{\varphi}^0$, kde $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t)$ definujeme jako časovou změnu úhlové rychlosti $\vec{\omega}$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}} \quad (2.31)$$

Platí $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{\varphi}^0$, kde $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Úhlové zrychlení lze vyjádřit i jinak

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \quad (2.32)$$

Jednotka úhlové dráhy $[\varphi] = \text{rad}$, úhlové rychlosti $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, úhlového zrychlení $[\varepsilon] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.2.2 Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Odvodíme vztah mezi obvodovou \vec{v} a úhlovou $\vec{\omega}$ rychlostí. V obr. 2.14 jsou vyznačeny veličiny charakterizující pohyb částice v bodě P . Poloha bodu P je určena vůči počátku O polohovým vektorem \vec{r} , který s osou rotace svírá úhel α . Z definice velikosti okamžité rychlosti (2.10) a použitím vztahu $ds = R d\varphi$ plyne

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Z obr. 2.14 také plyne, že $R = r \sin \alpha$, pak

$$\boxed{v = r \omega \sin \alpha} \quad a \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (2.33)$$

1.2.3 Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením

Dále odvodíme vztah mezi obvodovým \vec{a} a úhlovým $\vec{\varepsilon}$ zrychlením. Z definice (2.16) plyne

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.34)$$

Vektor $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ je vektor kolmý k \vec{r} a ose rotace, v níž leží $\vec{\omega}$, tj. má stejný směr s vektorem \vec{v} . Je to vektor tečného zrychlení \vec{a}_t .

Vektor $\vec{\omega} \times \vec{v}$ je vektor kolmý na $\vec{\omega}$ a \vec{v} a má směr do středu křivosti. Je to vektor normálového zrychlení \vec{a}_n .

1.2.4 Velikost tečného a normálového zrychlení otáčivého pohybu

Velikosti tečného a normálového zrychlení jsou:

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2} \quad \text{nebo} \quad \boxed{a_n = v \frac{v}{R} = v\omega} \quad (2.36)$$

1.2.5 Klasifikace otáčivých pohybů

Klasifikace vychází z analogie vztahů mezi veličinami φ , ω a ε u otáčivých pohybů a veličinami s , v a a u pohybů posuvných. Stejný otáčivý pohyb popsany veličinami φ , ω a ε konají všechny body tělesa (vyjma středu otáčení) – kapitola 2.1.2.

Z definice úhlového zrychlení ε lze určit závislost $\omega = \omega(t)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \varepsilon dt, \quad \int d\omega = \int \varepsilon dt$$

$$\boxed{\omega = \int \varepsilon dt + konst.} \quad (2.42)$$

Z definice úhlové rychlosti ω lze určit závislost $\varphi = \varphi(t)$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad d\varphi = \omega dt, \quad \int d\varphi = \int \omega dt$$



$$\varphi = \int \omega dt + konst. \quad (2.43)$$

1.2.6 Pohyb rovnoměrný po kružnici

Pohyb rovnoměrný po kružnici:

$$\varepsilon = 0$$

$$\omega = \int 0 dt = konst.$$

$$\varphi = \omega \int dt = \omega t + C, \text{ kde } C = \varphi_0 \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (2.44)$$

Pro $\varphi_0 = 0$ je $\varphi = \omega t$ a pro $\varphi = 2\pi$ je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{a} \quad \frac{1}{T} = f \quad (2.45)$$

kde T je perioda (doba, za kterou se částice otočí o plný úhel) a f je frekvence.

1.2.7 Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici

Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici:

$$\varepsilon = konst.$$

$$\omega = \varepsilon \int dt = \varepsilon t + C_1, \text{ kde } C_1 = \omega_0 \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (2.46)$$

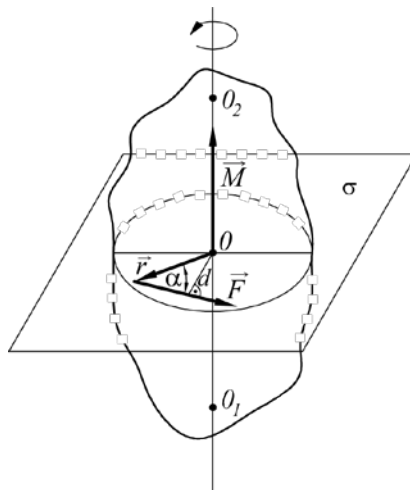
a dosazením (2.46) do vztahu (2.43)

$$\varphi = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + C_2, \text{ kde } C_2 = \varphi_0 \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad (2.47)$$

1.2.8 Moment síly

Označme \vec{F} výslednici vnějších sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy $O_1 O_2$ (obr. 2.33). Předpokládejme, že vektorová přímka síly \vec{F} neprotíná osu otáčení a není s ní rovnoběžná, dále že leží v rovině σ kolmé k ose otáčení.





Obr. 2.33 K definici momentu síly

Velikost momentu síly M je součin velikosti síly F a kolmé vzdálenosti bodu O od vektorové přímky vektoru \vec{F} v rovině σ , tzv. ramene síly d

$$M = Fd \quad (2.140)$$

Z obr. 2.33 je $d = r \sin \alpha$, pak

$$M = rF \sin \alpha \quad (2.141)$$

což je velikost vektorového součinu polohového vektoru \vec{r} působišťe síly a vektoru síly \vec{F}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.142)$$

kde \vec{M} je moment síly \vec{F} vzhledem k bodu O .

V souřadnicích

$$M_x = y F_z - z F_y$$

$$M_y = z F_x - x F_z$$

$$M_z = x F_y - y F_x$$

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je $\sin \alpha = 1$ a $M = Fr$.

Směr vektoru \vec{M} určuje směr vektoru úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$, jež by charakterizovalo rotační pohyb částice, vyvolaný tímto momentem. Je proto velmi důležitou veličinou při sledování a popisu rotačních pohybů.

1.2.9 Moment dvou sil působících na dvě částice

Výsledný moment dvou sil \vec{F}_{12} a \vec{F}_{21} působících na dvě částice podle obr. 2.34 je

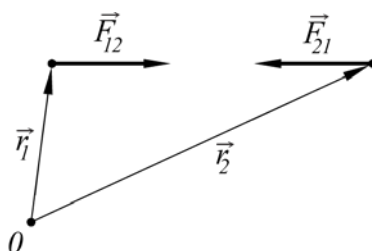
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

a s ohledem na $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ je



$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}, \quad (2.143)$$

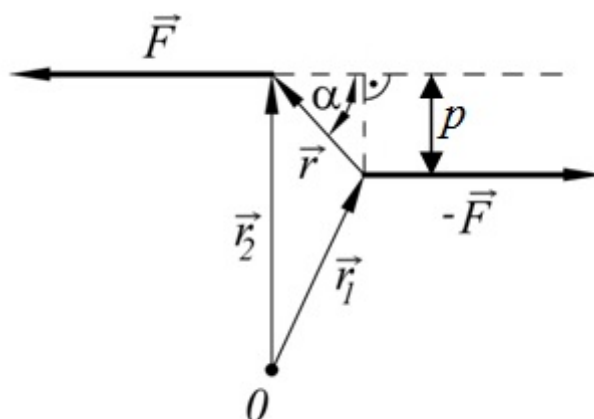
neboť vektor $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ je rovnoběžný s vektorem \vec{F}_{12} .



Obr. 2.34 K výpočtu momentu dvou sil

Obr. 2.35

K výpočtu momentu dvojice sil



Obr. 2.35 K výpočtu momentu dvojice sil

1.2.10 Dvojice sil

Uuríme výsledný moment dvou rovnoběžných stejně velikých sil opačně orientovaných, které působí v různých bodech tuhého tělesa (obr. 2.35). Nazývají se dvojice sil.

Z obr. 2.35 $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$ a podle definice momentu sil je

$$\vec{M}_d = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F} = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + (\vec{r}_1 + \vec{r}) \times \vec{F} = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_d = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}_d| = r F \sin \alpha = p F$$

(2.144)

kde $p = r \sin \alpha$ je rameno dvojice sil (obr. 2.35).

1.2.11 Moment hybnosti

Moment hybnosti \vec{b} částice je definován jako vektorový součin polohového vektoru \vec{r} částice a její hybnosti \vec{p} (obr. 2.36) a uvádí se někdy jako točivost.



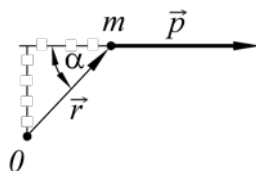
Jeho velikost

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

(2.145)

$$b = r p \sin \alpha = r m v \sin \alpha$$

(2.146)



Obr. 2.36 K definici momentu hybnosti částice

Jednotky:

$$[M] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m}$$

$$[b] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Veličiny otáčivého pohybu
- Odvození vztahu mezi obvodovou a úhlovou rychlostí
- Odvození vztahu mezi obvodovým a úhlovým zrychlením
- Klasifikace otáčivých pohybů
- Moment síly, dvojice sil a moment hybnosti



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Harmonický pohyb

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	HARMONICKÝ POHYB.....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Kinematika harmonického pohybu částice	4
1.1.2	Dynamika harmonického pohybu.....	4
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	6



1 HARMONICKÝ POHYB



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Harmonický kmitavý pohyb

Okamžitá výchylka, amplituda výchylky, fáze a počáteční fáze

Rychlost a zrychlení harmonického kmitavého pohybu

Dynamika harmonického pohybu částice



MOTIVACE:

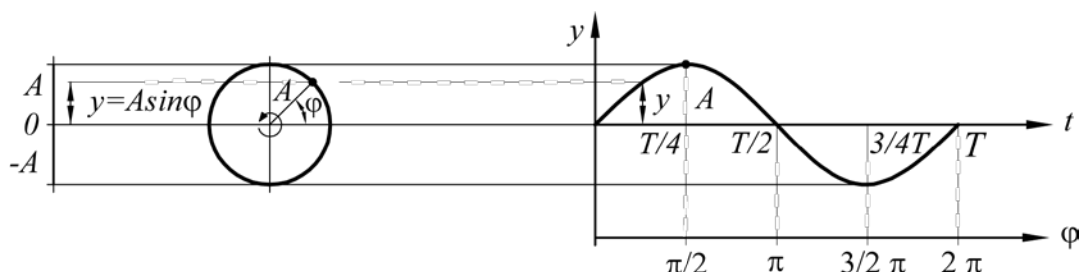
Harmonický pohyb koná řada těles při svém složeném pohybu v průmyslové praxi. Harmonický pohyb koná jej jakékoliv těleso zavěšené na pružině, částice na kmitající podložce.

1.1 DEFINICE

1.1.1 Kinematika harmonického pohybu částice

Z kinematického hlediska pozorujeme pohyb, který koná průmět bodu pohybujícího se rovnoměrně po kružnici do některého průměru kružnice.

Průmět bodu koná podle obr. 2.17 harmonický kmitavý pohyb. Je-li $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, pak převod



Obr. 2.17 K vyjádření harmonického pohybu

mezi časovou a úhlovou stupnicí je $\varphi = \varphi_0 + 2\pi \frac{t}{T}$.

Z obr. 2.17 vyplývá pro okamžitou výchylku

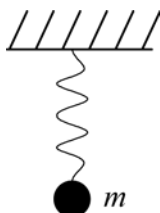
$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.48)$$

kde A je amplituda výchylky, $\omega t + \varphi_0$ je fáze a φ_0 počáteční fáze. Derivací pak pro rychlost v a zrychlení a platí

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.49)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y \quad (2.50)$$

kde ωA je amplituda rychlosti a $\omega^2 A$ je amplituda zrychlení.



Obr. 2.21 Harmonický oscilátor

1.1.2 Dynamika harmonického pohybu

Částice o hmotnosti m kmitá kolem rovnovážné polohy ve směru osy y . Na částici působí jediná síla, pružná síla o souřadnicích

$$F_x = 0$$

$$F_y = -k y$$

$$F_z = 0,$$

která se snaží uvést částici o hmotnosti m do původní polohy, obr. 2.21. Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k y$$

(2.67)

což po úpravě a označení $\frac{k}{m} = \omega^2$ vede na homogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

(2.68)

a další úpravou na

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

(2.74)

což vyjadřuje okamžitou výchylku harmonického pohybu (viz vztah 2.48).



2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Vznik harmonického pohybu z pohybu částice po kruhové trajektorii
- Vyjádření okamžité výchylky harmonického pohybu pomocí amplitudy výchylky, fáze a počáteční fáze
- Určení rychlosti a zrychlení tohoto pohybu
- Pohybová rovnice harmonického pohybu částic



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Složené pohyby (vrh šikmý)

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová,
Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	SLOŽENÉ POHYBY (VRH ŠIKMÝ).....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Vrh šikmý vzhůru jako pohyb složený	4
1.1.2	Řešení rovnice křivky z hlediska kinematiky.....	4
1.1.3	Řešení rovnice vrhu šikmého z hlediska dynamiky.....	4
1.1.4	Výška výstupu a délka šikmého vrhu	5
1.1.5	Vodorovný a svislý vrh, volný pád.....	6
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	7



1 SLOŽENÉ POHYBY (VRH ŠIKMÝ)



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Vrh šikmý vzhůru jako pohyb složený
Rovnice vrhu šikmého vzhůru a její řešení
Výška výstupu a délka šikmého vrhu
Vodorovný a svislý vrh, volný pád



MOTIVACE:

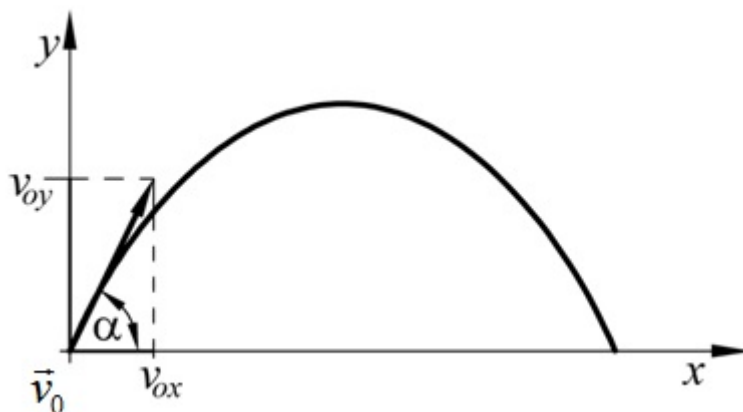
Popis kinematiky složených pohybů vychází z popisu všech základních veličin, které popisují postupný a rotační pohyb. Nejjednodušším složeným pohybem je šikmý vrh vzhůru. Konají ho všechna tělesa, vržená jistou rychlostí pod určitým úhlem, např. vrh oštěpem, vrh koulí, Výkop fotbalového míče, výstřel z děla, aj.



1.1 DEFINICE

1.1.1 Vrh šikmý vzhůru jako pohyb složený

Ze kterých pohybů je složen vrh šikmý vzhůru? Tento pohyb je zadán počáteční podmínkou, že těleso je vrženo rychlostí \vec{v}_0 pod úhlem α vzhledem k vodorovnému zemskému povrchu. Odpor prostředí při pohybu zanedbáme. Podle obr. 2.18 jsou velikosti složek počáteční rychlosti



Obr. 2.18 Vrh šikmý vzhůru jako pohyb složený

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Ve směru osy x jde o pohyb rovnoměrný přímočarý

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \quad (2.51)$$

Ve směru osy y jde o pohyb složený z pohybu rovnoměrného přímočarého vzhůru a volného pádu

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.52)$$

1.1.2 Řešení rovnice křivky z hlediska kinematiky

Ze vztahu (2.51) plyne

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

a dosazením do vztahu (2.52) obdržíme rovnici paraboly:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (2.53)$$

což je křivka, po které se pohybuje částice vržená pod úhlem α .

1.1.3 Řešení rovnice vrhu šikmého z hlediska dynamiky

Řešení



$$\begin{aligned}
 a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, & & v_x = v_x(0), & & \frac{dx}{dt} = v_x(0), & & x = v_x(0)t + x_0 \\
 a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g, & & v_y = v_y(0) - gt, & & \frac{dy}{dt} = v_y(0) - gt, & & y = -\frac{g}{2}t^2 + v_y(0)t + y_0 \\
 a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0, & & v_z = 0, & & \frac{dz}{dt} = 0, & & z = z_0
 \end{aligned}$$

Vrheme-li těleso z počátku soustavy souřadnic, tj. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, pak

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (2.75)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.76)$$

$$z = 0$$

Vyjádríme-li t z rovnice (2.75) a dosazením do rovnice (2.76) dostaneme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (2.77)$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (2.78)$$

kde rovnice (2.78) je obecnou rovnicí paraboly ($y = Ax - Bx^2$).

1.1.4 Výška výstupu a délka šikmého vrhu

Výška výstupu:

$$v_y = 0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

$$t_A = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

$$y_A = h = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

a pro $\alpha = \pi/2$ je

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.79)$$



Délka vrhu:

$$y_B = 0, \quad t_B = 2t_A$$

$$x_B = d = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

a pro $\alpha = \pi/4$ je

$$d = \frac{v_0^2}{g}$$

(2.80)

1.1.5 Vodorovný a svislý vrh, volný pád

Zvláštní případy:

Vodorovný vrh: $\alpha = 0,$ $v_x = v_0,$ $x = v_0 t$

$$v_y = -gt, \quad y = -\frac{gt^2}{2} \quad (2.81)$$

Svislý vrh: $\alpha = \pi/2$ $v_x = 0,$ $x = 0$

(vzhůru) $v_y = v_0 - gt,$ $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (2.82)

$\alpha = -\pi/2$ $v_x = 0,$ $x = 0$

(dolů) $v_y = -v_0 - gt,$ $y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Volný pád: $a_y = -g,$ $v_y = -gt,$ $y = -\frac{1}{2}gt^2$ (2.83)

Ze vztahu (2.80) vyplývá, že pro $\alpha = 45^\circ$ je délka vrhu největší. Pro úhly α a $(90^\circ - \alpha)$ platí $\sin 2\alpha = \sin 2(90^\circ - \alpha)$. To znamená, že částice vržena stejnou rychlostí pod dvěma navzájem doplňkovými úhly dopadne na totéž místo.

Částice ve skutečnosti neopisuje parabolu, nýbrž křivku, kterou nazýváme balistickou křivkou. Při řešení pohybové rovnice jsme neuvažovali odpor prostředí.



2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Vrh šikmý vzhůru jako pohyb složený
- Využití pohybu rovnoměrně přímočarého vzhůru a volného pádu
- Určení křivky vrhu
- Výška výstupu při vrhu šikmém
- Určení délky šikmého vrhu
- Zvláštní případy vrhů
- Balistická křivka



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



FYZIKA I

Newtonovy pohybové zákony

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	První pohybový zákon (zákon setrvačnosti)	4
1.1.2	Druhý pohybový zákon (zákon síly)	4
1.1.3	Třetí pohybový zákon (zákon akce a reakce).....	5
1.1.4	Podmínka rovnováhy soustavy sil.....	6
1.1.5	Dynamické účinky soustavy sil.....	6
1.1.6	Síly při křivočarém pohybu.....	6



1 NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Zákon setrvačnosti
Zákon síly
Zákon akce a reakce
Podmínka rovnováhy soustavy sil
Dynamické účinky soustavy sil
Síly při křivočarém pohybu



1.1 DEFINICE

1.1.1 První pohybový zákon (zákon setrvačnosti)

Příčinami změn pohybového stavu se zabývá dynamika. Změny pohybu těles vznikají v důsledku interakce materiálních objektů. Popisují je Newtonovy zákony, které tvoří základ klasické mechaniky.

První pohybový zákon (zákon setrvačnosti)

Těleso setrvává ve stavu klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu, není-li nuceno vnějšími příčinami svůj stav změnit.

Pohyb vždy uvažujeme vzhledem ke vztažné soustavě. Zákon setrvačnosti platí pro takovou soustavu, která je buď v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Soustava se nazývá inerciální (viz kapitola 2.2.2.).

Mírou setrvačných vlastností tělesa je jeho hmotnost m . Rozlišujeme klidovou hmotnost m_0 (pro těleso, které je v inerciální vztažné soustavě v klidu) a pohybovou hmotnost m . Podle Einsteina platí

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.54)$$

kde v je rychlost částice (tělesa) vzhledem k inerciální vztažné soustavě a c je rychlost světla ve vakuu (odmocnina viz kap. 2.1.2.).

Pohybový stav částice (tělesa) je z hlediska kinematiky určen vektorem rychlosti \vec{v} , z hlediska dynamiky vektorem hybnosti \vec{p} , kde

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Pak lze formulovat první pohybový zákon jako

$$\vec{p} = \text{konst.} \quad (2.55)$$

tj. hybnost částice (tělesa) je co do velikosti a směru konstantní, nepůsobí-li na částici (těleso) jiná částice (těleso) vynucující si změnu rychlosti. Jednotka hybnosti je $[p] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.1.2 Druhý pohybový zákon (zákon síly)

Časová změna vektoru hybnosti je úměrná působící síle.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (2.56)$$



Je-li $v \ll c$, lze hmotnost m považovat za konstantní ($m = konst.$) a platí

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

a tedy

$$\boxed{\vec{F} = m \vec{a}} \quad (2.57)$$

Druhý pohybový zákon umožňuje určit sílu na základě jejich dynamických účinků. O síle mluvíme, došlo-li k působení dvou nebo více částic (těles).

Jednotka síly je $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N}$ (newton).

Dosadíme-li do rovnice (2.57) za \vec{F} výslednou sílu, která způsobuje pohybový stav tělesa, říkáme jí pohybová rovnice (kap. 2.2.3).

1.1.3 Třetí pohybový zákon (zákon akce a reakce)

Dvě částice na sebe navzájem působí stejně velikými silami opačného směru.

$$F_{12} = F_{21}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.58)$$

Jednu z těchto sil nazýváme akce a druhou reakce. V inerciálních soustavách je vznik každé síly (akce) při vzájemném působení těles provázen vznikem stejně velké síly opačného směru (reakce). Akce a reakce současně vznikají a současně zanikají. Každá z těchto sil působí na jiné těleso, proto se ve svých účincích navzájem neruší (nelze je skládat).



Obr. 2.19 Silové působení dvou částic

Silové působení dvou částic o hmotnosti m_1 a m_2 je na obr. 2.19. Z druhého pohybového zákona je

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Aplikací třetího pohybového zákona dostaneme

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}} \quad (2.59)$$

Tělesa na sebe navzájem působící mají zrychlení opačné orientace a velikosti zrychlení jsou nepřímo úměrné jejich hmotnostem.

1.1.4 Podmínka rovnováhy soustavy sil

Síly působící na částici jsou v rovnováze, když výslednice sil je rovna nulovému vektoru

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (2.60)$$

a v souřadnicích

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \quad (2.61)$$

1.1.5 Dynamické účinky soustavy sil

Působí-li na částici o hmotnosti m současně síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, pak každá vyvolává zrychlení \vec{a}_i , pro sílu F_i platí $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m$ a výsledné zrychlení

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_i + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.62)$$

Částice o hmotnosti m se pohybuje se zrychlením \vec{a} , jaké by mu udělila výslednice sil $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$.

Z druhého pohybového zákona $\vec{F} = m \vec{a}$ plyne

$$\vec{F} - m \vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{F} + \vec{F}_s = \vec{0},$$

kde

$$\vec{F}_s = -m \vec{a} \quad (2.63)$$

má charakter síly a nazývá se setrvačná síla. Rovnice (2.63) charakterizuje dynamickou rovnováhu sil působících na částici a nazývá se d'Alembertův princip. Setrvačné síly jsou síly, které je nutno přidat k reálným silám, vyjadřujeme-li pohyby vzhledem k neinerciální soustavě. Nejvýznamnější z nich jsou Coriolisova a odstředivá síla.

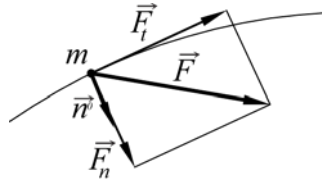
1.1.6 Síly při křivočarém pohybu

Tečnému \vec{a}_t a normálovému \vec{a}_n zrychlení odpovídají síly

$$\vec{F}_t = m \vec{a}_t \quad \text{a} \quad \vec{F}_n = m \vec{a}_n = \vec{F}_d,$$



kde \vec{F}_d říkáme síla dostředivá.



Obr. 2.20 Síly při křivočarém pohybu

Podle obr. 2.20 je pak s ohledem na velikost normálového zrychlení

$$\vec{F}_d = m \vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{n}^0 \quad \text{a} \quad \vec{F}_d - m \frac{v^2}{R} \vec{n}^0 = \vec{0}$$

Podle d'Alembertova principu je $-m \frac{v^2}{R} \vec{n}^0$ setrvačná síla, které říkáme síla odstředivá \vec{F}_0 .

Z hlediska pozorovatele v inerciální soustavě je tato síla reakcí na sílu dostředivou F_0 . Platí

$$\vec{F}_0 = -\vec{F}_d \quad (2.64)$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Pohybová rovnice

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	POHYBOVÁ ROVNICE	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Inerciální a neinerciální vztažná soustava.....	4
1.1.2	Pohybová rovnice posuvného pohybu.....	6
1.1.3	Pohybová rovnice otáčivého pohybu.....	6
1.1.4	Moment setrvačnosti tělesa.....	7
1.1.5	Steinerova věta.....	9



1 POHYBOVÁ ROVNICE



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Inerciální a neinerciální vztažná soustava

Pohybová rovnice posuvného pohybu

Pohybová rovnice otáčivého pohybu

Moment setrvačnosti tělesa

Steinerova věta



1.1 DEFINICE

1.1.1 Inerciální a neinerciální vztažná soustava

Klid nebo rovnoměrný přímočarý pohyb ve formulaci prvního pohybového zákona jsou vzhledem k volbě vztažné soustavy pojmy relativní. Položme si otázku, zda první pohybový zákon platí ve všech vztažných soustavách.

Předpokládejme např., že pozorovatel uvnitř vagónu rozjíždějícího se vzhledem k Zemi rovnoměrně zrychleným pohybem položí na ideálně hladkou podlahu vagónu kuličku. Zjistí, že se bude pohybovat vzhledem k vagónu rovnoměrně zrychleným pohybem (proti směru jízdy), i když na ni okolní tělesa nepůsobí silami. To znamená, že v soustavě souřadnic spojené s rozjíždějícím se vlakem první pohybový zákon neplatí. První pohybový zákon neplatí také v rotující soustavě.

Vztažná soustava nebo soustava souřadnic, v níž platí první pohybový zákon, se nazývá inerciální (inertia - setrvačnost). Pohybuje-li se soustava souřadnic S' vzhledem k jiné inerciální soustavě souřadnic S rovnoměrně přímočaře, pak soustava S' je opět inerciální, pohybuje-li se zrychleně, je neinerciální.

Částice (těleso), na které okolní částice (tělesa) nepůsobí silami, nazýváme volnou částicí (volným tělesem).

V inerciální vztažné soustavě je zrychlení volné částice (volného tělesa) rovno nule.

Podle toho, zda zrychlení volného tělesa se rovná nule nebo je různé od nuly, může se pozorovatel v určité vztažné soustavě (např. ve vlaku, na Zemi, apod.) měřením provedeným uvnitř této soustavy přesvědčit, zda soustava je inerciální nebo neinerciální.

Inerciální soustava je ideální. Každá reálná vztažná soustava je spojena s konkrétním reálným tělesem (např. se Zemí, s umělou družicí obíhající kolem Země, s automobilem, s pohybující se kabinou výtahu), vzhledem k němuž se sleduje pohyb jiných těles. Protože ve vesmíru neexistují nehybná tělesa, může být libovolná vztažná soustava považována za inerciální jen s určitým (dohodnutým) stupněm přesnosti.

Na těleso vzhledem k neinerciální vztažné soustavě působí setrvačná síla. V inerciální vztažné soustavě setrvačná síla neexistuje.

Význačné vlastnosti inerciální a neinerciální soustav

- Těleso pohybující se v určitém okamžiku vzhledem k jedné inerciální vztažné soustavě se zrychlením \vec{a} se v témže okamžiku pohybuje se stejným zrychlením vzhledem ke každé jiné inerciální vztažné soustavě.
- Při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k jiné používáme pro vyjádření vztahů mezi prostorovými souřadnicemi vektorových veličin a časem v klasické Newtonově mechanice Galileovy transformace a v relativistické mechanice Lorencovy transformace.
- Těleso, pohybující se v určitém okamžiku vzhledem k neinerciální vztažné soustavě se zrychlením \vec{a} se pohybuje v témž okamžiku vzhledem k jiným neinerciálním



vztažným soustavám obecně s jinými zrychleními. Tato zrychlení závisí na vlastnostech různých neinerciálních vztažných soustav.

Poznámka:

Skládání setrvačné síly \vec{F}_s a tíhové síly \vec{F}_G , které působí současně na určité těleso vzhledem k neinerciální vztažné soustavě lze objasnit na následujícím příkladě:

Na vodorovnou podlahu kabiny výtahu je upevněn dolní konec pružiny siloměru se svislou osou. Na horním konci pružiny je upevněna vodorovná deska, na které leží těleso o hmotnosti m . Jak velkou sílu naměříme na siloměru

- je-li kabina výtahu v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu
- stoupá-li kabina výtahu se stálým zrychlením \bar{a} vzhledem k Zemi
- klesá-li kabina výtahu se stálým zrychlením \bar{a} vzhledem k Zemi.

Na podlaze kabiny stojí experimentátor, který je v klidu vzhledem ke kabině.

Zvolme kabinu jako vztažnou soustavu.

- V tomto případě je kabina inerciální vztažnou soustavou. Těleso působí na vodorovnou podložku tlakovou silou \vec{F}_1 svisle dolů, $F_1 = mg$. Uvedenou velikost naměří experimentátor.
- V tomto případě je kabina stoupající se stálým zrychlením \bar{a} vzhledem k Zemi neinerciální vztažnou soustavou. Na těleso působí setrvačná síla \vec{F}_s svisle dolů a ta uděluje tělesu zrychlení $\bar{a}_s = -\bar{a}$. Na těleso působí také tíhová síla \vec{F}_G , takže výslednice je $\vec{F}_2 = \vec{F}_G + \vec{F}_s$. Její velikost je $F_2 = m(g + a_s)$. Stejně velikou tlakovou silou působí těleso svisle dolů na podložku. Experimentátor naměří větší hodnotu než v případě a); $F_2 > mg$. (Podobný jev nastává v kabině rakety po dobu zrychleného výstupu rakety z povrchu Země). Ve stoupající kabině nastává přetížení těles.
- I v tomto případě je kabina klesající se stálým zrychlením \bar{a} vzhledem k Zemi neinerciální vztažnou soustavou. Na těleso působí setrvačná síla \vec{F}_s svisle vzhůru, která uděluje tělesu zrychlení $\bar{a}_s = -\bar{a}$. Dále působí tíhová síla \vec{F}_G , takže výslednice je $\vec{F}_3 = \vec{F}_G + \vec{F}_s$. Její velikost je $F_3 = m(g - a_s)$. Stejně velikou tlakovou silou působí těleso svisle dolů na podložku, je-li $a < g$. Experimentátor naměří na siloměru menší hodnotu než v případě a); $F_3 < mg$.

V mezním případě pro $a = g$ je $F_3 = 0$ N. Těleso nepůsobí na podložku žádnou silou a i siloměr zaznamenává nulovou hodnotu. Uvedený stav tělesa vzhledem k neinerciální vztažné soustavě se nazývá beztížný stav. Kabina i všechna tělesa uvnitř padají se stejným tíhovým zrychlením \bar{g} k Zemi.

- Družice obíhající kolem Země po kružnici a všechna tělesa, která se v ní nacházejí, se pohybují v určitém okamžiku se stejným gravitačním zrychlením.



1.1.2 Pohybová rovnice posuvného pohybu

Pohybovou rovnicí posuvného pohybu částice (tělesa), jejíž hmotnost m je stálá, rozumíme rovnici

$$\boxed{\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}} \quad (2.65)$$

kde \vec{F} je výslednice všech sil, které na částici (těleso) působí.

Vektorová rovnice (2.65) představuje tři skalární rovnice pro souřadnice

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (2.66)$$

Z rovnice (2.65) je možno získat následující informace:

- ze známé síly \vec{F} působící na částici lze stanovit rychlost částice \vec{v} a její polohový vektor \vec{r} v závislosti na čase t

a obráceně

- ze známé polohy \vec{r} v závislosti na čase t lze vypočítat vnější sílu \vec{F} .

1.1.3 Pohybová rovnice otáčivého pohybu

Předpokládejme, že tuhé těleso otáčivé kolem osy se skládá z velkého počtu částic (hmotných bodů) o stálých hmotnostech m_1, m_2, \dots , jejichž vzdálenosti od osy otáčení jsou postupně r_1, r_2, \dots

Nechť r_i je vzdálenost částice hmotnosti m_i od osy rotace (obr. 2.37), a_i je tečné zrychlení částice, pak podle druhého pohybového zákona je síla F_i ve směru pohybu $F_i = m_i a_i$ a vzhledem ke vztahu mezi tečným zrychlením a_i a úhlovým zrychlením ε_i ve tvaru $a_i = r_i \varepsilon_i$ je $F_i = m_i r_i \varepsilon_i$.

Uvedená síla vyvolá vzhledem k ose rotace moment síly velikosti

$$M_i = F_i r_i = m_i r_i^2 \varepsilon_i \quad (2.148)$$

Sečteme rovnice (2.148) pro všechny částice, a poněvadž všechny se otáčejí se stejným úhlovým zrychlením, je $\varepsilon_i = \varepsilon$ a pro velikost celkového momentu tečných sil dostaneme

$$M = \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Veličina

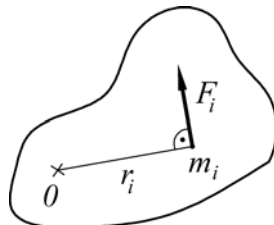
$$\boxed{J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2} \quad (2.149)$$



se nazývá moment setrvačnosti tuhého tělesa (sestavajícího z velkého počtu částic) vzhledem k ose otáčení.

Jednotka momentu setrvačnosti $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Působením síly \vec{F} (obr. 2.37) se uvede tuhé těleso s konstantním momentem setrvačnosti J vzhledem k ose 0 do otáčivého pohybu s úhlovým zrychlením ε .



Obr. 2.37 Působení síly na tuhé těleso

Tento pohyb popisuje pohybová rovnice otáčivého pohybu tuhého tělesa

$$M = J\varepsilon \quad (2.150)$$

nebo vektorově

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

Rovnice umožňuje určit úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$, úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ a úhlovou dráhu $\vec{\varphi}$ pohybu tuhého tělesa, známe-li výsledný moment sil \vec{M} . Proto je výhodné ji zapsat ve tvaru

$$\vec{M} = J \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} \quad (2.151)$$

Důsledky pohybové rovnice:

- Pro $\vec{M} = \vec{0}$ je $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ a $\vec{\omega} = \text{konst.}$, což charakterizuje rovnoměrný pohyb po kružnici.
- Pro $\vec{M} = \text{konst.}$ je $\vec{\varepsilon} = \text{konst.}$, což charakterizuje rovnoměrný zrychlený pohyb po kružnici.

1.1.4 Moment setrvačnosti tělesa

Užitím integrálního počtu můžeme upřesnit definici momentu setrvačnosti vzhledem k dané ose (2.149). Tuhé těleso rozložíme na elementy dm o vzdálenosti r od osy otáčení (obr. 2.38). Moment setrvačnosti dJ vzhledem k ose otáčení elementu tělesa o hmotnosti dm , který můžeme pokládat za částici (hmotný bod) je

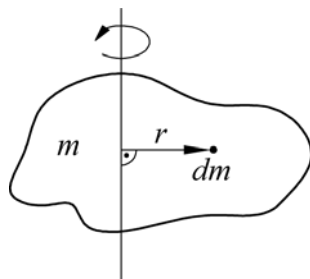
$$dJ = r^2 dm$$

Moment setrvačnosti vzhledem k dané ose je skalární veličina a proto celkový moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose je roven součtu elementárních momentů dJ , tj.

$$J = \int_{(m)} r^2 dm \quad (2.152)$$

kde (m) znamená, že integrujeme přes celé těleso.

Moment setrvačnosti homogenního tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení závisí na hmotnosti tělesa, na jeho tvaru a na poloze osy otáčení vzhledem k tělesu.



Obr. 2.38 K definici momentu setrvačnosti

Vztah (2.152) lze převést na integraci přes objem (V) celého tělesa vyjádřením

$$J = \int_{(V)} \rho r^2 dV \quad (2.153)$$

Zavedením poloměru setrvačnosti (gyračního poloměru) R_s , tj. vzdálenosti od osy, v níž by musela být soustředěna celá hmotnost tělesa, aby její moment setrvačnosti J byl týž jako při daném rozdělení hmotnosti m kolem osy otáčení, je $J = mR_s^2$,

kde

$$R_s = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (2.154)$$

Pro tuhé těleso jednoduchého tvaru lze moment setrvačnosti vzhledem k dané ose určit výpočtem. Např. pro stálou hmotnost m vzhledem k ose, která prochází těžištěm tuhého tělesa pro homogenní kouli o poloměru r :

$$J = \frac{2}{5} mr^2 \quad (2.155)$$

pro tenkostěnnou dutou kouli o poloměru r :

$$J = \frac{2}{3} mr^2 \quad (2.156)$$

pro homogenní válec o poloměru r :

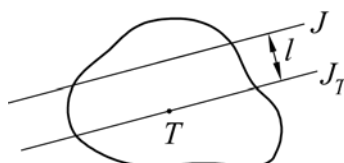
$$J = \frac{1}{2} mr^2 \quad (2.157)$$

pro tenkostěnný dutý válec o poloměru r :

$$J = mr^2 \quad (2.158)$$



1.1.5 Steinerova věta



Obr. 2.39 Ke Steinerově větě

Změní-li se poloha osy otáčení vzhledem k tuhému tělesu, změní se jeho moment setrvačnosti vzhledem k nové ose. Známe-li moment setrvačnosti tuhého tělesa J_T vzhledem k ose, která prochází jeho těžištěm, dovedeme určit moment setrvačnosti J téhož tělesa vzhledem k ose, která je s touto osou rovnoběžná, použitím Steinerovy věty

$$J = J_T + ml^2$$

(2.159)

kde m je hmotnost tělesa, l kolmá vzdálenost osy otáčení od osy, která je s ní rovnoběžná a prochází těžištěm T tělesa (obr. 2.39).

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Impulsové věty

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	IMPULSOVÉ VĚTY.....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	První impulsová věta.....	4
1.1.2	Druhá impulsová věta	6



1 IMPULSOVÉ VĚTY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

První impulsové věty

Druhá impulsové věty



1.1 DEFINICE

1.1.1 První impulsová věta

Newtonovy pohybové zákony rozšíříme na pohyb soustavy částic. Reálnou fyzikální soustavu částic lze považovat za soubor pevně vázaných částíček (atomů a molekul), které splňují požadavky kladené na částici. Tak lze přejít k popisu pohybu tuhých těles.

Na soustavu částic (případně těleso) působí vnitřní síly \vec{F}' , tzv. vazebné, které zajišťují vzájemnou vazbu částic.

Vyberme v soustavě i -tou částici o hmotnosti m_i a označme výslednici vnitřních sil, kterým ostatní částice působí na i -tou částici $\vec{F}'_i = \sum_j \vec{F}'_{ij}$ a výslednici vnějších sil, které působí na i -tou částici \vec{F}_i .

Pohybová rovnice i -té částice je podle 2. Newtonova zákona

$$\boxed{m_i \vec{a}_i = \vec{F}'_i + \vec{F}_i} \quad (2.132)$$

kde \vec{a}_i je zrychlení i -té částice.

Uvedenou rovnici lze napsat pro každou částici (j -tou, k -tou, ...) a součtem obdržíme rovnici

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.133)$$

v níž podle 3. Newtonova zákona je

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \vec{0}.$$

Pro posuvný pohyb, kdy zrychlení všech částic jsou stejná $\vec{a}_i = \vec{a}$, pak pro $m = \sum_{i=1}^n m_i$

a $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ platí

$$\boxed{m \vec{a} = \vec{F}} \quad (2.134)$$

což vyjadřuje pohybovou rovnici pro soustavu částic (tuhé těleso) o hmotnosti m , pohybující se se zrychlením \vec{a} , kde \vec{F} je součet všech vnějších sil na soustavu částic (tuhé těleso) působících.

Vyšetřeme pohyb těžiště při posuvném pohybu soustavy hmotných bodů, částic (tělesa). Z rovnice (2.125) můžeme psát

$$m \vec{r}_T = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (2.135)$$

a dvojí derivací podle času



$$m \frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

$$m \vec{a}_T = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (2.136)$$

kde \vec{a}_T je zrychlení těžiště soustavy částic nebo tělesa a \vec{a}_i zrychlení i -té částice.

Pro $\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$ je rovnice

$$\boxed{m \vec{a}_T = \vec{F}} \quad (2.137)$$

matematickým vyjádřením věty o pohybu těžiště.

Při posuvném pohybu se těžiště soustavy hmotných bodů, částic (tělesa) pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmotnost soustavy a působila na něj výsledná síla působící na soustavu.

Při posuvném pohybu můžeme soustavu hmotných bodů nahradit jediným bodem – těžištěm.

- Pro izolovanou soustavu platí $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$ a podle věty (2.137) je $\vec{a}_T = \vec{0}$ a tedy $\vec{v}_T = konst.$

Rychlost těžiště izolované soustavy se nemění.

Upravujeme rovnici (2.133)

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.138)$$

kde $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ je celková hybnost soustavy částic (tělesa).

Rovnici (2.138) dosadíme do vztahu (2.133) a obdržíme první impulsovou větu

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \quad (2.139)$$

Součet všech vnějších sil působících na soustavu částic (těleso) je roven časové změně celkové hybnosti soustavy částic (tělesa).

První impulsová věta je fyzikálně rovnocenná s větou o pohybu těžiště.

- Pro izolovanou soustavu platí $\vec{F} = \vec{0}$ a podle věty (2.139) je $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ a tedy

$$\boxed{\vec{p} = \overrightarrow{konst.}}$$



což je matematické vyjádření zákona zachování hybnosti izolované soustavy. Odtud pak

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{konst.}}$$

1.1.2 Druhá impulsová věta

První impulsová věta umožňuje zkoumat soustavu částic jako celek, pojednává o postupném pohybu. Druhá impulsová věta umožňuje popsat rotační pohyb soustavy částic.

Zapisujeme ji ve tvaru

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

(2.147)

Součet momentů všech vnějších sil, působících na soustavu částic nebo těleso, je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy (tělesa).

- Pro izolovanou soustavu platí pro moment vnějších sil $\vec{M} = \vec{0}$ a podle věty (2.147) je

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = 0$$

tj.

$$\vec{b} = \text{konst.}$$

což je matematické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti izolované soustavy.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Časový účinek síly

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	ČASOVÝ ÚČINEK SÍLY.....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Časový účinek síly, impuls síly	4
1.1.2	Věta o impulsu síly a změně hybnosti	4
1.1.3	Důsledky	4



1 ČASOVÝ ÚČINEK SÍLY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Časový účinek síly, impuls síly

Věta o impulsu síly a změně hybnosti

Důsledky



1.1 DEFINICE

1.1.1 Časový účinek síly, impuls síly

Z druhého pohybového zákona (2.56) vyjádříme

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (2.84)$$

Je-li \vec{p}_1 hybnost částice v čase t_1 a \vec{p}_2 hybnost částice v čase t_2 , platí pro změnu hybnosti $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ za čas $\Delta t = t_2 - t_1$ vlivem vnější síly

$$\int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

a po integraci

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{I} \quad (2.85)$$

kde \vec{I} je impuls síly jako vektorová veličina určující časový účinek síly a je definován jako časový integrál síly

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (2.86)$$

1.1.2 Věta o impulsu síly a změně hybnosti

Rovnici (2.85) lze napsat ve tvaru

$$\Delta\vec{p} = \vec{I} \quad (2.87)$$

a vyjadřuje větu o impulsu síly a změně hybnosti.

Impuls síly je roven změně hybnosti.

Jednotka impulsu síly je $[I] = \text{N} \cdot \text{s}$.

1.1.3 Důsledky

- Pro $\vec{F} = \text{konst.}$ je

$$\vec{I} = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F} \Delta t \quad (2.88)$$



- Působí-li na částici o hmotnosti m síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ a vyjádříme-li výslednici sil

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

pak

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt \right) = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i \quad (2.89)$$

Těleso, které bylo původně v klidu, může nabýt konečné hybnosti buď tak, že na ně působí velká síla po krátkou dobu (např. při prudké srážce, výbuchu) nebo tak, že malá síla působí po delší dobu (např. raketový pohon).



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Dráhový účinek síly

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Mechanická práce. Konstantní síla.....	4
1.1.2	Dráhový účinek síly. Proměnná síla.....	5
1.1.3	Práce při změně polohy částice	5
1.1.4	Práce při protažení pružiny.....	6



1 DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Mechanická práce.

Elementární a celková práce

Práce při změně polohy částice

Práce při protažení pružiny

Výkon a účinnost



1.1 DEFINICE

1.1.1 Mechanická práce. Konstantní síla

Při změně polohy částice (tělesa) je třeba na ni působit silou. Míra účinku síly, kterým částice mění svou polohu, se vyjadřuje veličinou zvanou práce.

Působí-li na částici konstantní síla tak, že se účinkem této síly posune po dráze s a je-li směr dráhy a síly stejný, práce A se rovná součinu velikosti síly F a dráhy s

$$A = Fs \quad (2.90)$$

Není-li směr síly a dráhy stejný, uplatní se průmět velikosti síly \vec{F} do směru dráhy \vec{s} (obr. 2.23) a platí

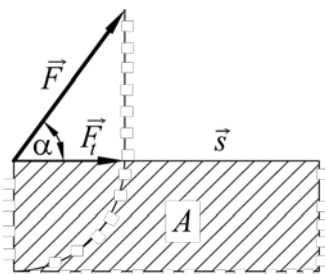
$$A = F_t s = Fs \cos \alpha \quad (2.91)$$

Vztah vyjadřuje velikost skalárního součinu vektorů síly \vec{F} a vektoru dráhy \vec{s}

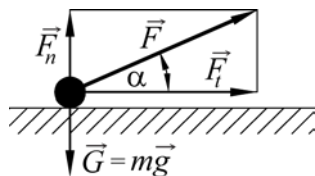
$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (2.92)$$

kde α je úhel mezi vektory síly \vec{F} a dráhy \vec{s} .

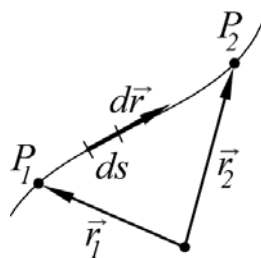
Podle obr. 2.24 koná práci pouze složka síly \vec{F} ve směru dráhy \vec{F}_t , na ni kolmá složka \vec{F}_n práci nekoná, způsobuje nadlehčení.



Obr. 2.23 K definici práce



Obr. 2.24 Rozklad síly \vec{F}



Obr. 2.25 Proměnná síla

1.1.2 Dráhový účinek síly. Proměnná síla

Působí-li na částici proměnná síla, je nutné dráhu rozdělit na malé intervaly $ds = |d\vec{r}|$, abychom mohli v každém intervalu považovat sílu \vec{F} za konstantní (obr. 2.25).

Elementární práce dA v intervalu ds se rovná skalárnímu součinu síly \vec{F} a elementu posunutí $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.93)$$

Mezi body P_1 a P_2 při změně polohy částice se koná celková práce

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.94)$$

Integrál (2.94) vyjadřuje dráhový účinek síly (křivkový integrál).

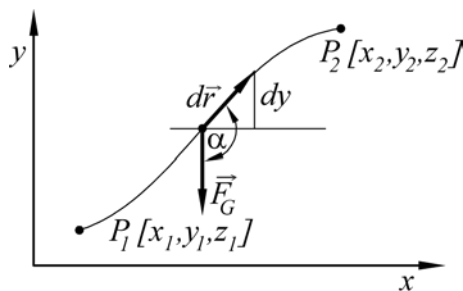
V souřadnicích pro vektory $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ a pro souřadnice bodů $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $P_2 = [x_2, y_2, z_2]$ je práce

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \quad (2.95)$$

Práce je skalární veličina a její velikost závisí na úhlu α . Pro $\alpha < 90^\circ$ je práce kladná (síla práci koná), pro $\alpha > 90^\circ$ je práce záporná (síla práci spotřebovává) a pro $\alpha = 90^\circ$ je práce rovna nule (síla práci nekoná). Pro $\alpha = 0$ je $A = Fs$, což je vztah (2.90).

1.1.3 Práce při změně polohy částice

Uřídíme práci, která se vykoná při změně polohy částice z bodu P_1 do bodu P_2 v tíhovém poli Země (obr. 2.26).



Obr. 2.26 Práce při změně polohy částice

Tíhová síla má souřadnice

$$\vec{F}_G = (0, -mg, 0)$$

Z definice práce

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} mg \, ds \cos \alpha = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy,$$

neboť $ds \cos \alpha$ udává průmět $d\vec{r}$ do osy y , tj. dy .

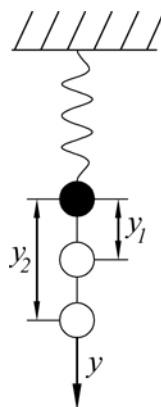
Pak

$$A = mg(y_1 - y_2) \quad (2.96)$$

Pro $y_2 > y_1$ je $A < 0$, $y_2 < y_1$ je $A > 0$, $y_2 = y_1$ je $A = 0$.

1.1.4 Práce při protažení pružiny

Uřídíme práci, kterou koná pružná síla o souřadnicích $F_x = 0$, $F_y = -ky$, $F_z = 0$ při protahování pružiny z polohy y_1 do polohy y_2 (obr. 2.27) – viz kap. 2.2.3.š



Obr. 2.27 Práce při protažení pružiny

Z definice práce

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} F_y dy = -k \int_{y_1}^{y_2} y dy$$

$$A = \frac{1}{2}k(y_1^2 - y_2^2)$$

(2.97)

Pro $y_1 = 0$, $y_2 = y$ je

$$A = -\frac{1}{2}ky^2$$

(2.98)

Práce je záporná, pružina práci spotřebovává.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Mechanická energie

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	MECHANICKÁ ENERGIE.....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Kinetická energie	4
1.1.2	Potenciální energie.....	5
1.1.3	Potenciální energie částice v poli pružných sil.....	5
1.1.4	Potenciální energie částice v tíhovém poli Země.....	6
1.1.5	Potenciální energie částice v gravitačním poli	7
1.1.6	Zákon zachování energie	7



1 MECHANICKÁ ENERGIE



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinetická energie

Potenciální energie

Potenciální energie částice v poli pružných sil

Potenciální energie částice v tíhovém poli Země

Potenciální energie částice v gravitačním poli

Zákon zachování mechanické energie



1.1 DEFINICE

1.1.1 Kinetická energie

Stav částice (obecně soustavy částic) lze charakterizovat skalární veličinou W . Mějme částici nacházející se ve stavu, ve kterém je hodnota této veličiny W_1 . Působí-li na částici vnější síla, přejde částice v důsledku konané práce do stavu s hodnotou této veličiny W_2 . Veličina W stavu částice tedy souvisí s prací vnějších sil působících na částici, říkáme ji energie.

Energie charakterizuje stav částice (soustavy) tak, že její změna se rovná práci, konané vnějšími silami působícími na částici (soustavu).

Podle charakteru působících sil se hovoří o energii mechanické, elektrické, chemické, jaderné, aj.

V případě, že se práce projeví tím, že částice změní svoji rychlost (svůj pohybový stav), hovoříme o kinetické (pohybové) energii. Práce této síly je

$$\begin{aligned} A &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = m \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv_x}{dt} dx + \int_{y_1}^{y_2} \frac{dv_y}{dt} dy + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dv_z}{dt} dz \right\} = \\ &= m \left\{ \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} v_x dv_x + \int_{v_{1y}}^{v_{2y}} v_y dv_y + \int_{v_{1z}}^{v_{2z}} v_z dv_z \right\} = \frac{1}{2} m \left[(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2), \end{aligned} \quad (2.106)$$

což můžeme psát

$$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (2.107)$$

Výraz $\frac{1}{2} m v^2$ nazveme kinetická energie částice o rychlosti v a označíme W_k

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.108)$$

Z uvedeného plyne

$$A = \Delta W_k \quad (2.109)$$

Práce je rovna změně kinetické energie W_k .

Při počáteční rychlosti $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je kinetická energie částic rovna práci, kterou částice potřebuje na přechod ze stavu klidu do stavu, ve kterém má rychlost v .

Kinetickou energii lze vyjádřit také pomocí hybnosti p



$$W_k = \frac{p^2}{2m} \quad (2.110)$$

1.1.2 Potenciální energie

Potenciální energie částice je veličina, jejíž změna je rovna práci A' vykonané proti silám pole při změně polohy částice v daném poli

$$\Delta W_p = A' = -A, \quad (2.111)$$

kde A je práce sil pole.

Uvažujme částici v silovém poli a vykonějme práci A' při přemístění částice z polohy charakterizované vektorem \vec{r}_1 do polohy charakterizované vektorem \vec{r}_2

$$A' = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta W_p(\vec{r}) = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

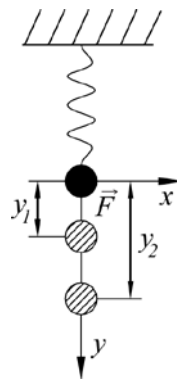
Veličinu $W_p(\vec{r})$ nazveme potenciální energií částice v silovém poli.

Práce vykonaná silami pole je konána na úkor potenciální energie.

$$A = -\Delta W_p \quad (2.112)$$

1.1.3 Potenciální energie částice v poli pružných sil

Určíme potenciální energii pro částici v silovém poli (obr. 2.28) charakterizovaném pružnou silou



Obr. 2.28 K určení potenciální energie částice v poli pružných sil

$$F_y = -ky$$

Z definice mechanické práce:

$$A' = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{y_1}^{y_2} (-ky) dy = \int_{y_1}^{y_2} ky dy$$

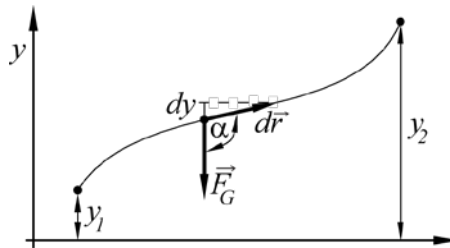
$$A' = \frac{1}{2} k y_2^2 - \frac{1}{2} k y_1^2 = \Delta W_p$$

Je-li $y_1 = 0$ a $y_2 = y$, pak

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2} k y^2} \quad (2.113)$$

1.1.4 Potenciální energie částice v tíhovém poli Země

Uřídíme potenciální energii částice o hmotnosti m v tíhovém poli Země (obr. 2.29).



Obr. 2.29 K určení potenciální energie částice v tíhovém poli Země

V obr. 2.29 je tíhová síla

$$\vec{F}_G = m\vec{g} = mg\vec{j},$$

kde \vec{j} je jednotkový vektor ve směru osy y

$$dy = dr \cos \alpha$$

Podle vztahu (2.111) je

$$\Delta W_p = A' = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} mg dy = mg(y_2 - y_1) \quad (2.114)$$

Zvolíme-li $y_1 = 0$ a $y_2 = y$ pak

$$\boxed{W_p(y) = mgy} \quad (2.115)$$

Tato potenciální energie se nazývá potenciální energie tíhová.

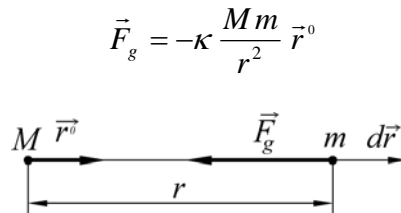
Změna tíhové potenciální energie nezávisí na tvaru trajektorie, po které částici posouváme, ale jen na počáteční a konečné poloze částice v tíhovém poli Země.



1.1.5 Potenciální energie částice v gravitačním poli

Určíme potenciální energii částice o hmotnosti m v gravitačním poli částice o hmotnosti M .

Na částici hmotnosti m působí gravitační pole částice M gravitační silou (viz kap. 1.1.1) podle obr. 2.30



Obr. 2.30 K určení gravitační potenciální energie

Podle vztahu (2.112) je

$$\Delta W_p = A' = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \kappa \frac{Mm}{r^2} \vec{r}^0 dr = \int_{r_1}^{r_2} \kappa \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\Delta W_p = \kappa Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.116)$$

Pro $r_2 \rightarrow \infty$ je $1/r_2 \rightarrow 0$ a označíme-li $r_1 = r$, dostaneme

$$W_p(r) = -\kappa \frac{Mm}{r} \quad (2.117)$$

Výraz (2.117) definuje gravitační potenciální energii částice o hmotnosti m , která se nachází v poli částice o hmotnosti M ve vzdálenosti r od této částice.

Změna gravitační potenciální energie částice nezávisí na tvaru trajektorie, po které částici posouváme, ale jen na počáteční a konečné poloze částice v gravitačním poli.

1.1.6 Zákon zachování energie

Zákony mechaniky umožňují najít takové veličiny, které se v soustavě částic v čase zachovávají i při změně polohy a rychlosti soustavy. Nazývají se invarianty. Tři invarianty umožňují formulovat tři zákony zachování. Zákony zachování platí v izolované soustavě částic (těles). Je to soustava, na kterou nepůsobí žádné vnější síly. Např. v soustavě Země - těleso je tíhová síla silou vnitřní a odpor prostředí proti pohybu tělesa silou vnější.

Při pohybu částice v silovém poli je práce sil pole rovna úbytku potenciální energie W_p a přírůstku kinetické energie W_k . V diferenciálním tvaru jde o rovnice

$$dA = -dW_p, \quad dA = dW_k,$$



jejichž odečtením je

$$d(W_k + W_p) = 0$$

a odtud

$$W_k + W_p = konst.$$

(2.118)

V izolované soustavě se mechanická energie (součet kinetické a potenciální energie) zachovává.

Ve skutečnosti se vlivem odporu prostředí (působí jiné síly než síly pole) celková mechanická energie zmenšuje. Vzniká např. teplo, které je rovno úbytku mechanické energie. Protože je teplo energie, platí zákon zachování energie obecně.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Pohyb setrvačnicku

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	POHYB SETRVAČNÍKU	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Setrvačnick.....	4
1.1.2	Volný setrvačnick.....	4
1.1.3	Těžký setrvačnick.....	6
1.1.4	Precese a nutace.....	7



1 POHYB SETRVAČNÍKU



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Setrvačnick

Volný setrvačnick

Těžký setrvačnick

Precese a nutace



1.1 DEFINICE

1.1.1 Setrvačník

Setrvačník (gyroskop) je tuhé homogenní osově souměrné těleso s velkým momentem setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti. Ta je současně volnou osou, vzhledem k níž je rotace tohoto tělesa stabilní. Setrvačníky se roztáčejí na vysoké otáčky, u technických setrvačnicků je počet otáček až $50\,000\text{ min}^{-1}$. Získávají velkou kinetickou energii

$$\frac{J\omega^2}{2}$$

a velký moment hybnosti

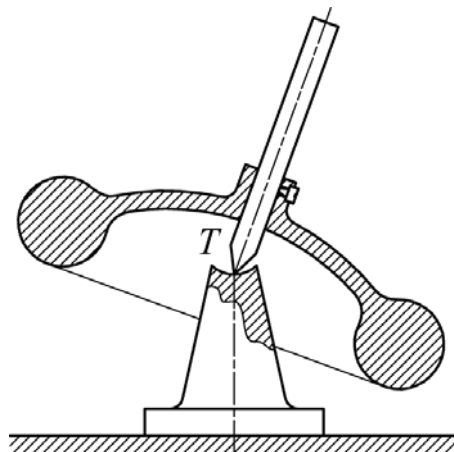
$$J\omega$$

Rotující setrvačník s velkou kinetickou energií se užívá k rovnoměrnému chodu strojů, např. výbušných motorů. Řešení jeho pohybu v inerciální vztažné soustavě je jednoduché. Setrvačník rotuje kolem pevné osy.

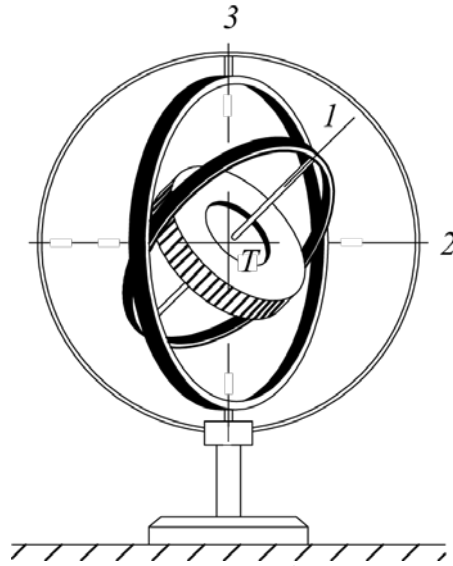
Složitější je pohyb setrvačníku, u něhož bude v inerciální soustavě pevný jen jeden bod, kterým může být buď hmotný střed (těžiště) anebo jiný bod osy souměrnosti. Setrvačník pak vykonává prostorový rotační pohyb, který lze rozložit na vlastní rotaci, precesi a nutaci. Technické setrvačníky se otáčejí velkými úhlovými rychlostmi a mají velké momenty setrvačnosti vzhledem k ose rotace, proto moment síly, působící na setrvačník vyvolá jen takovou precesi, případně nutaci, že lze zanedbat příspěvky k momentu hybnosti od precesních a nutačních pohybů, které setrvačník koná vzhledem k jiným osám.

1.1.2 Volný setrvačník

Volným (bezsilovým) setrvačnickem se nazývá gyroskop, u něhož moment vnějších působících sil je nulový. Setrvačník, na který působí jen tíha a je podepřen v těžišti, se nazývá Maxwellův setrvačník (obr. 2.41). Setrvačník, kde osy, kolem nichž se může otáčet, procházejí těžištěm, se nazývá setrvačník v Cardanově závěsu (obr. 2.42).



Obr. 2.41 Maxwellův setrvačník



Obr. 2.42 Cardanův závěs

U volného setrvačníku je moment síly $\vec{M} = 0$. Roztočí-li se kolem jedné volné osy, která je osou symetrie, je moment hybnosti $\vec{b} = J \vec{\omega}$. Podle druhé impulsové věty

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = 0$$

Platí

$$\vec{b} = J\vec{\omega} = \text{konst.}$$

(2.163)

kde \vec{b} je vektor stálé velikosti a stálého směru.

Protože při rotaci kolem volné osy mají vektory \vec{b} a $\vec{\omega}$ stejný směr, shodný se směrem osy symetrie setrvačníku,

zachovává osa volného setrvačníku v prostoru stálý směr.

Pokud volnému setrvačníku neudělíme rotaci úhlovou rychlostí ω_1 jen vzhledem k jedné hlavní centrální ose, nýbrž i další rotaci úhlovou rychlostí ω_2 vzhledem k jiné hlavní centrální ose, např. tak, že klepneme na vnitřní kruh Cardanova závěsu, bude pohyb setrvačníku složitější.

Zatímco pro výsledný moment hybnosti bude stále platit

$$\vec{b} = \text{konst.},$$

pro výslednou úhlovou rychlost platí

$$\vec{\omega} \neq \text{konst.}$$

Osa setrvačníku vykonává tzv. regulární precesi, což si lze představit jako valení kužele spojeného se setrvačnickem po vnitřní (případně po vnější) ploše pevného kužele.



Vlastnosti volného setrvačníku zachovávat směr volné osy, kolem níž jej roztočíme, se využívá v letectví u indikačních a stabilizačních přístrojů, jako je např. umělý horizont indikující polohu letadla v mlze, zatačkoměr, setrvačnickový kompas a tzv. automatický pilot, který slouží k automatickému řízení a ke stabilizaci kurzu letu letadla. Dále v raketové technice k řízení pohybu raket a u tanku ke stabilizaci polohy hlavně kanónu při střelbě za jízdy v terénu.

1.1.3 Těžký setrvačník

Rotující gyroskop v tíhovém poli uchycený v bodě mimo jeho těžiště se nazývá těžký setrvačník. Setrvačník podepřený v bodě O pod těžištěm T je na obr. 2.43.

Setrvačník roztočíme úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem volné osy ζ , osy rotační symetrie odkloněné od svislé osy o úhel ϑ , který se nazývá nutační úhel. Udělíme mu tak moment hybnosti $\vec{b} = J \vec{\omega}$. Tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ působí vzhledem k bodu O momentu síly o velikosti

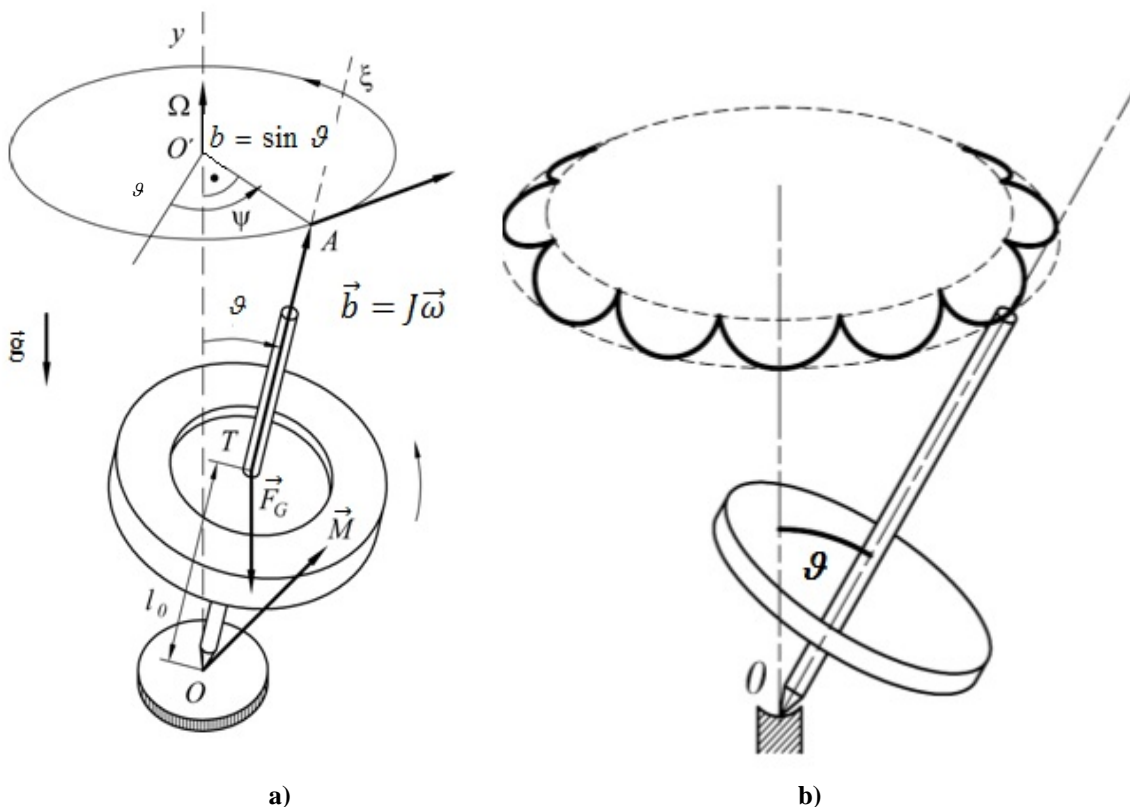
$$M = mgl_0 \sin \vartheta \quad (2.164)$$

kde m je hmotnost setrvačníku a l_0 vzdálenost bodů O, T .

Moment síly \vec{M} působí kolmo k rovině vymezené svislicí a osou ζ .

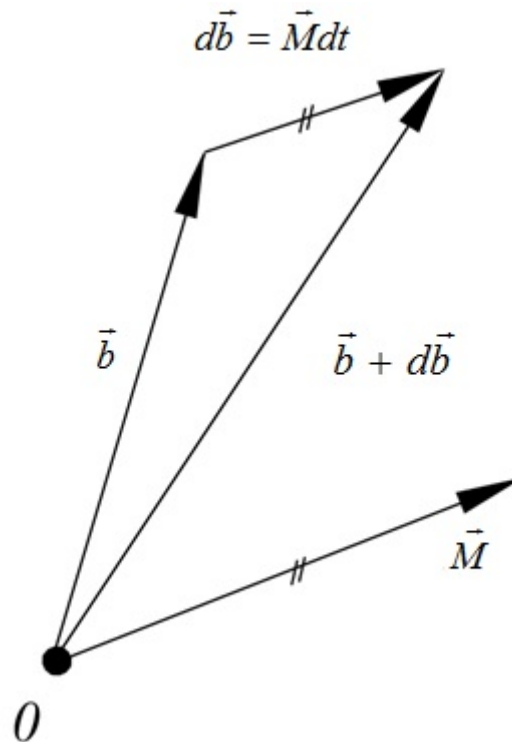
Moment \vec{M} vychýlí koncový bod A vektoru \vec{b} momentu hybnosti ve směru \vec{M} podle Resalovy věty (obr. 2.44), což je geometrická interpretace druhé impulsové věty $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}$. Ta je analogická

výrazu $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, který definuje rychlost hmotného bodu. Stejně se vychýlí i osa ζ .



Obr. 2.43 Těžký setrvačník

Vektor \vec{M} je mírou rychlosti změny vektoru \vec{b} , tedy rychlost koncového bodu \vec{b} momentu hybnosti tělesa je rovna výslednému momentu \vec{M} sil, který na těleso působí. Tím se změní také směr vektoru \vec{M} , který zůstává stále kolmý k ose ζ .



Obr. 2.44 K Resalově větě

Proces změny vektoru momentu síly je spojitý a bod A bude opisovat kružnici. Tento pohyb setrvačnicku se nazývá precese.

1.1.4 Precese a nutace

Úhlovou rychlost $\Omega = \frac{d\psi}{dt}$ precesního pohybu, kde ψ je precesní úhel, určíme užitím Resalovy věty. Bod A bude konat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru (obr. 2.43a)

$$b \sin \vartheta = J\omega \sin \vartheta$$

rychlostí o velikosti

$$M = mgl_0 \sin \vartheta$$

Analogicky vztahu pro rychlost

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

platí vztah pro moment síly

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$$

(2.165)



Pro velikost tohoto součinu bude $mg l_0 \sin \vartheta = \Omega J \omega \sin \vartheta$ a odtud úhlová rychlost precesního pohybu

$$\Omega = \frac{mg l_0}{J \omega}$$

(2.166)

Úhlová rychlost nezávisí na nutačním úhlu ϑ , tedy na odklonu osy ζ od svislice.

Působením rušivých momentů sil, např. při dotyku osy setrvačníku s podložkou, nebo při udělení příčného impulsu se udělí setrvačníku další rotace kolem jiné osy než je volná osa. Pak osa setrvačníku nebude opisovat plášť precesního kužele s $\vartheta = konst.$ (obr. 2.43b).

Nutační úhel ϑ se bude cyklicky měnit a vzniklý přídatný pohyb se nazývá nutace.

U výsledného pohybu jde o skládání dvou kruhových pohybů, které opisuje určitý bod osy setrvačníku. Křivka, kterou tento bod opisuje, je tedy epicykloida.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Pohyb těles po podložce

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová,
Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	POHYB TĚLES PO PODLOŽCE.....	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Posuvný pohyb (smykové tření) po vodorovné podložce	4
1.1.2	Posuvný pohyb (smykové tření) po nakloněné podložce.....	5
1.1.3	Valivý pohyb (Valivé tření) po vodorovné podložce.....	8
1.1.4	Valivý pohyb (Valivé tření) po nakloněné podložce	9
1.1.5	Valivý odpor.....	9



1 POHYB TĚLES PO PODLOŽCE



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Posuvný pohyb (smykové tření) po vodorovné podložce

Posuvný pohyb (smykové tření) po nakloněné podložce

Valivý pohyb (Valivé tření) po vodorovné podložce

Valivý pohyb (Valivé tření) po nakloněné podložce

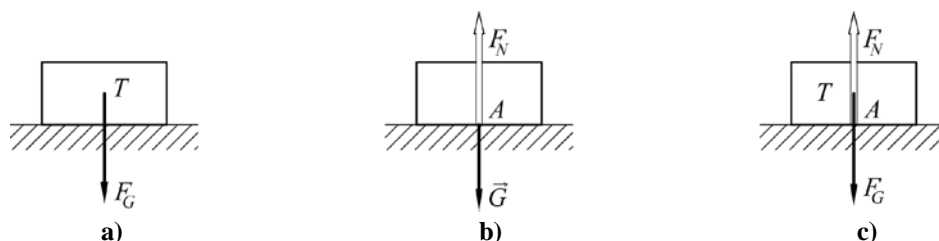
Valivý odpor



1.1 DEFINICE

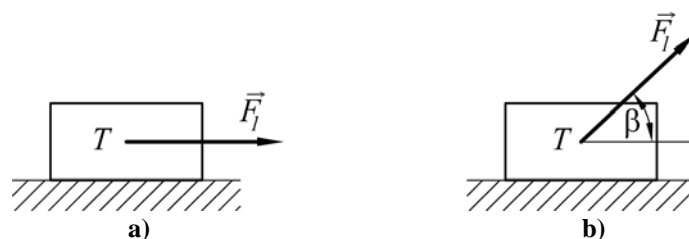
1.1.1 Posuvný pohyb (smykové tření) po vodorovné podložce

Na homogenní tuhé těleso tvaru kvádrů, které se nachází na vodorovné podložce, působí tíhová síla \vec{F}_G svisle dolů s působištem v těžišti T tělesa, $\vec{F}_G = m\vec{g}$, podle obr. 2.48a). Na těleso působí současně tlaková síla \vec{F}_N podložky svisle vzhůru, která zabraňuje pádu tělesa. Je to reakce na tíhu tělesa \vec{G} . Působíště je v bodě A , tj. ve středu dotykové plochy tělesa s podložkou podle obr. 2.48b). Obě síly jsou v rovnováze a platí $\vec{F}_G = -\vec{F}_N$. Nepůsobí-li na těleso žádná jiná síla, je těleso v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu (obr. 2.48c).



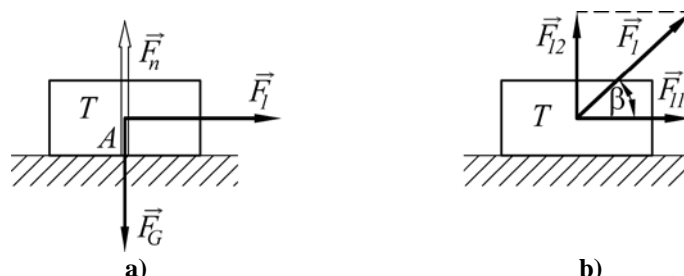
Obr. 2.48 Síly působící na tuhé těleso při posuvném pohybu na vodorovné rovině

Řešme pohyb tělesa (kvádrů) o hmotnosti m , které vlivem působící síly \vec{F}_1 koná posuvný pohyb na vodorovné podložce podle obr. 2.49a) a 2.49b). Třecí sílu mezi tělesem a podložkou neuvažujeme.



Obr. 2.49 Posuvný pohyb tuhého tělesa po vodorovné rovině za působení síly \vec{F}_1

Na těleso působí síly \vec{F}_G , \vec{F}_N a \vec{F}_1 podle obr. 2.50a). Podle pohybového zákona uděluje síla \vec{F}_1 tělesu zrychlení $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$ ve směru síly \vec{F}_1 , síly \vec{F}_G a \vec{F}_N jsou v rovnováze a nemají na těleso ve vodorovném směru pohybový účinek.



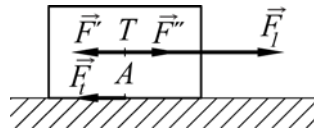
Obr. 2.50 Síly působící na tuhé těleso při posuvném pohybu po vodorovné rovině za působení síly

Podle obr. 2.50b) působí na těleso opět síly \vec{F}_G , \vec{F}_N a \vec{F}_1 . Sílu \vec{F}_1 lze rozložit na složku \vec{F}_{11} ve směru vodorovném a na složku \vec{F}_{12} ve směru svislém. Z nich se při pohybu tělesa na

vodorovné podložce uplatňuje jen složka \vec{F}_{11} o velikosti $F_{11} = F_1 \cos \beta$ a ta uděluje tělesu zrychlení $a_{11} = \frac{F_1 \cos \beta}{m}$, pro které platí $a_{11} < a_1$.

V případě podle obr. 2.50a) působí těleso na podložku tlakovou silou o velikosti rovné tíze tělesa $G = mg$ a v případě podle obr. 2.50b) tlakovou silou o velikosti $F = mg - F_1 \sin \beta$, kde $F < G$.

Řešme případ, není-li třecí síla \vec{F}_t mezi tělesem a podložkou zanedbatelná. Součinitel smykového tření je f .



Obr. 2.51 Třecí síla na vodorovnou podložku

Na těleso působí ještě třecí síla F_t podle obr. 2.51. Je to plošná brzdící síla, kterou působí podložka na podstavu kváдру při posuvném pohybu o velikosti

$$F_t = f F_N \quad (2.180)$$

Její působíště A je v geometrickém středu podstavu kváдру.

Ke zjištění pohybového účinku sil \vec{F}_1 a \vec{F}_t zvolme v těžišti dvě síly \vec{F}' a \vec{F}'' o stejné velikosti a směru jako třecí síla \vec{F}_t opačně orientované (obr. 2.51). Jejich pohybový účinek se ruší.

Síly \vec{F}_1 a \vec{F}' se skládají a mohou nastat uvedené situace:

- a) $F_1 > F'$ a jejich výslednice uděluje tělesu zrychlení o velikosti $a = \frac{F_1 - F_t}{m}$.

Těleso koná rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb.

- b) $F_1 = F'$ a zrychlení pohybu je nulové.

Těleso je v klidu nebo koná rovnoměrný přímočarý pohyb (pokud mělo před působením síly F_1 nějakou rychlost).

- c) $F_1 < F'$ Těleso je v klidu, smykové tření f je nahrazeno klidovým třením nebo je

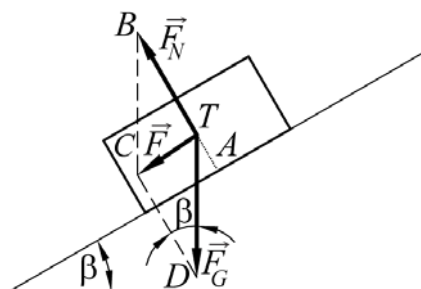
rovnoměrně brzděno s konstantním zpomalením velikosti $a = \frac{F_t - F_1}{m}$.

1.1.2 Posuvný pohyb (smykové tření) po nakloněné podložce

Homogenní tuhé těleso o hmotnosti m tvaru kváдру je na nakloněné rovině s úhlem sklonu β . Na těleso působí v těžišti T tíhová síla \vec{F}_G a v bodě A tlaková síla \vec{F}_N podložky. Účinek



síly \vec{F}_N se nezmění, posuneme-li její působiště po vektorové přímce z bodu A do bodu T (obr. 2.52). Jaký pohyb těleso koná? Uvedeme charakteristické veličiny pohybu.



Obr. 2.52 Síly působící na tuhé těleso při pohybu po nakloněné rovině

Podle obr. 2.52 je výslednice sil $F = F_G \sin \beta = mg \sin \beta$.

Těleso pak koná přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb po nakloněné rovině dolů se zrychlením

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$a = g \sin \beta$$

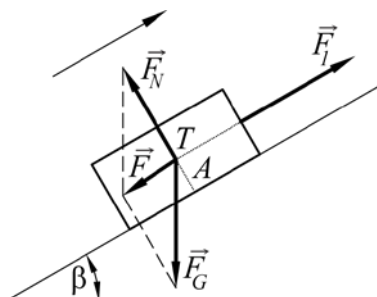
Řešme pohyb tělesa (kvádru) o hmotnosti m , které vlivem působící síly \vec{F}_1 koná posuvný pohyb na nakloněné rovině podle obr. 2.53. Tření neuvažujeme.

Pohyb závisí pouze na velikosti a směru výslednice sil \vec{F} a \vec{F}_1 .

Pro $F_1 > F$ koná těleso rovnoměrně zrychlený pohyb po nakloněné rovině vzhůru se zrychlením

$$a = \frac{F_1 - F}{m}$$

Pro $F_1 = F$ je těleso v rovnovážné poloze v klidu, zrychlení je nulové.



Obr. 2.53 Pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině za působení síly \vec{F}_1

Pro $F_1 < F$ koná těleso rovnoměrně zrychlený pohyb po nakloněné rovině dolů se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F - F_1}{m}$$

Řešme případ, kdy působí podle obr. 2.54 na těleso napjaté vlákno silou \vec{F}_1 . Součinitel smykového tření mezi podstavou kvádrů a nakloněnou rovinou je f . Kladka se nepohybuje, lano po ní volně klouže bez tření.

Na těleso o hmotnosti m působí výslednice sil $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}$ a na těleso o hmotnosti m_1 výslednice $\vec{F}'_2 = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_G$. Tělesa o hmotnostech m a m_1 konají rovnoměrně zrychlené pohyby se stejně velkým zrychlením a . Pohybové rovnice jsou

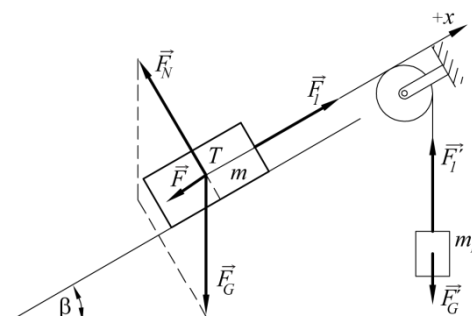
$$m a = F_1 - m g \sin \beta, \quad m_1 a = -F_1 + m_1 g$$

Odtud

$$a = \frac{m_1 - m \sin \beta}{m_1 + m} g \quad (2.181)$$

Působí-li navíc třecí síla \vec{F}'_t , uvažujme podle obr. 2.54 místo síly \vec{F}'_t sílu \vec{F}' , která má stejný směr a velikost jako síla \vec{F}'_t , ale její působiště je v bodě T . Platí:

$$F' = f m g \cos \beta$$



Obr. 2.54 Třecí síla na nakloněné rovině

Z pohybových rovnic

$$\begin{aligned} m a &= F_1 - m g \sin \beta - f m g \cos \beta \\ m_1 a &= -F_1 + m_1 g \end{aligned} \quad (2.182)$$

obdržíme

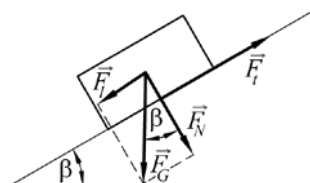
$$a = \frac{m_1 - m (\sin \beta + f \cos \beta)}{m_1 + m} g \quad (2.183)$$

což je zrychlení při pohybu tělesa vzhůru po nakloněné rovině.



V případě pohybu směřujícího dolů po nakloněné rovině je nutné v pohybové rovnici (2.182) sílu $F = m g \cos \beta$ přičíst a ve vztahu (2.183) bude v závorce znaménko mínus.

Určeme součinitel smykového tření f z pohybu tělesa na nakloněné rovině podle obr. 2.55, platí-li $\vec{F}_t = f \vec{F}_N$.



Obr. 2.55 K určení součinitele smykového tření f

Pro $F_1 \leq F_t$ se těleso nepohybuje, pro $F_1 > F_t$ se uvede do rovnoměrně zrychleného pohybu.

Pro určitý sklon nakloněné roviny budou síly \vec{F}_1 a \vec{F}_t v rovnováze a tedy

$$F_G \sin \beta = f F_G \cos \beta$$

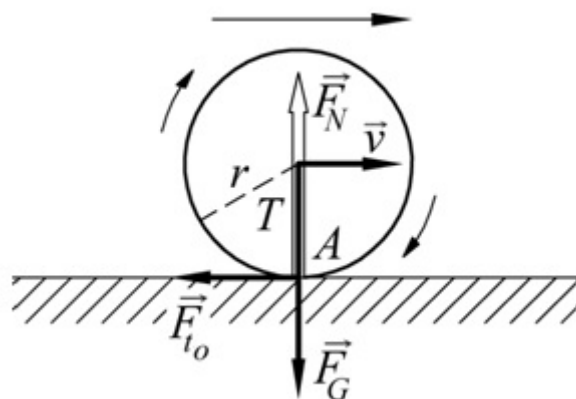
a odtud

$$f = \operatorname{tg} \beta$$

(2.184)

1.1.3 Valivý pohyb (Valivé tření) po vodorovné podložce

Tuhé rotační těleso o hmotnosti m koná valivý pohyb na vodorovné rovině na obr. 2.56. Na těleso působí tíhová síla \vec{F}_G a tlaková síla \vec{F}_N , které jsou v rovnováze. Vedle toho působí na těleso klidová třecí síla \vec{F}_{t_0} o velikosti



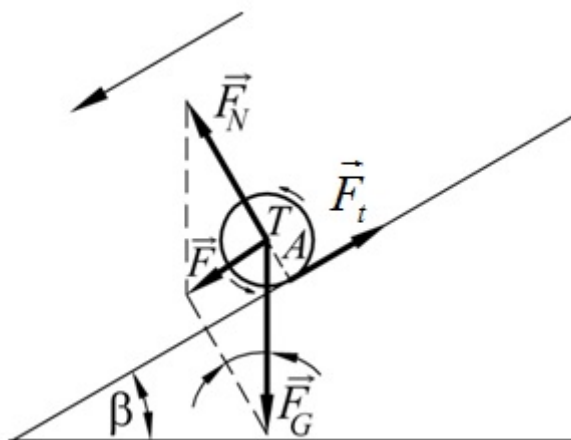
Obr. 2.56 Síly působící na tuhé rotační těleso při valivém pohybu po vodorovné rovině

$$F_{t_0} = f_0 F_N$$

kde f_0 je součinitel klidového tření, závislý na povrchových vlastnostech tělesa a podložky. Bod A je v každém okamžiku v klidu. Podložka ani těleso se nedeforují.

1.1.4 Valivý pohyb (Valivé tření) po nakloněné podložce

Tuhé rotační těleso koná valivý pohyb na nakloněné rovině, jestliže koná vzhledem k inerciální vztažné soustavě otáčivý pohyb kolem rotační osy a současně posuvný pohyb na nakloněné rovině ve směru její spádové přímky.



Obr. 2.57 Valivý pohyb tuhého rotačního tělesa po nakloněné rovině

Na těleso podle obr. 2.57 působí tíhová síla \vec{F}_G o velikosti $F_G = mg$ a tlaková síla \vec{F}_N nakloněné roviny o velikosti $F_N = m g \cos \beta$.

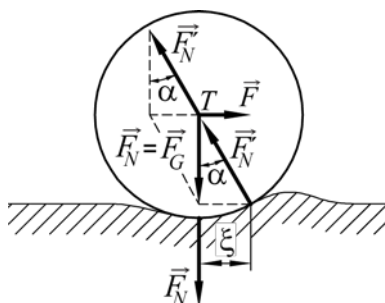
Výslednice obou sil \vec{F} má velikost $F = m g \sin \beta$.

Na těleso dále působí třecí síla \vec{F}_t s působištěm v bodě A.

Podmínka valivého pohybu je $0 \leq F_t \leq f_0 m g \cos \beta$, kde f_0 je součinitel klidového tření závisící na vlastnosti povrchů tělesa a nakloněné roviny. Těžiště T koná zrychlený pohyb se zrychlením \vec{a} a těleso jako celek koná otáčivý pohyb s úhlovým zrychlením $\vec{\varepsilon}$.

1.1.5 Valivý odpor

Na dokonale tuhé podložce by se dokonale tuhé těleso valilo bez tření. Ve skutečnosti se ale podložka vždy částečně deformuje, takže reakce podložky \vec{F}'_N je vlivem dopružování proti přímce procházející těžištěm posunuta o určitou vzdálenost ξ dopředu (obr. 2.58).



Obr. 2.58 K valivému odporu

Proto je na udržení pohybu potřebná síla \vec{F} , která vyrovnává společný účinek síly \vec{F}_N (tlakové síly na podložku) a síly \vec{F}'_N

$$\vec{F} = -(\vec{F}_N + \vec{F}'_N)$$

Poněvadž ξ je malé, platí pro velikost potřebné síly \vec{F} a těleso o poloměru r

$$F = F_N \operatorname{tg} \alpha \doteq F_N \sin \alpha = F_N \frac{\xi}{r}$$

Tečná složka reakce podložky \vec{F}'_N se nazývá valivý odpor a platí

$$\vec{F}_v = -\vec{F}$$

a pro velikost

$$\boxed{F_v = \frac{\xi}{r} F_N} \quad (2.186)$$

Velikost valivého odporu závisí na velikosti tlakové síly F_N na podložku, na poloměru r valícího se tělesa a na vzdálenosti ξ působíště reakce podložky od svislé přímky procházející středem tělesa. Vzdálenost ξ se nazývá rameno valivého odporu.

Jednotka ramene valivého odporu $[\xi] = \text{m}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



FYZIKA I

Kyvadlový pohyb

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



OBSAH

1	KYVADLOVÝ POHYB	3
1.1	Definice.....	4
1.1.1	Fyzikální kyvadlo.....	4
1.1.2	Matematické kyvadlo	5
1.1.3	Torzní kyvadlo	6



1 KYVADLOVÝ POHYB



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Fyzikální kyvadlo

Matematické kyvadlo

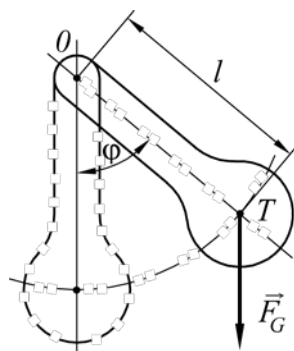
Torzní kyvadlo



1.1 DEFINICE

1.1.1 Fyzikální kyvadlo

Fyzikální kyvadlo je každé těleso, které vlivem vlastní tíhové síly kývá kolem vodorovné osy, jež neprochází těžištěm (obr. 2.45).



Obr. 2.45 Fyzikální kyvadlo

Pohybová rovnice pro fyzikální kyvadlo je podle 2.150

$$M = J \varepsilon,$$

kde

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

a

$$M = -mgl \sin \varphi$$

Po dosazení

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$$

(2.167)

Pro $\frac{mgl}{J} = \omega^2$ je

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \varphi$$

a rovnice se zjednoduší, omezíme-li se na výchylky $\varphi < 5^\circ$. Pak $\sin \varphi \approx \varphi$, což vede na diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi$$

Její řešení (viz odst. 2.2.3) je

$$\varphi = A \sin \omega t \quad (2.168)$$

pro počáteční podmínku, že kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy a volně pustíme.

Harmonickému pohybu, popsanému v kap. (2.1.7) odpovídá doba kmitu viz rovnice (2.45)

$$T_f = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (2.169)$$

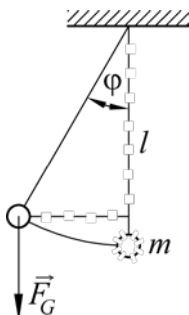
kde J je moment setrvačnosti vzhledem k ose, kolem které kyvadlo kývá a l je vzdálenost těžiště od této osy.

Při větších výkyvech už není pohyb kyvadla harmonický a dobu kmitu je třeba počítat z rovnice, která plyne z řešení diferenciální rovnice (2.167). Dostali bychom

$$T_f = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \right) \quad (2.170)$$

1.1.2 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je hmotný bod (částice) s hmotností m zavěšený na pevném závěsu délky l (těleso zanedbatelných rozměrů zavěšené na vlákne zanedbatelné hmotnosti) a je na obr. 2.46.



Obr. 2.46 Matematické kyvadlo

Pohybová rovnice pro matematické kyvadlo je podle 2.150 ve tvaru

$$M = J \varepsilon$$

kde

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

$$M = -mgl \sin \varphi \quad \text{a} \quad J = m l^2$$

Pak

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \quad (2.171)$$

Pro $\frac{g}{l} = \omega^2$ a $\varphi < 5^\circ$ ($\sin\varphi \approx \varphi$) je

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \quad (2.172)$$

Kde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.173)$$

Řešení rovnice (2.172) je uvedena v kap. (2.41) jako rovnice (2.168).

Doba kmitu matematického kyvadla je

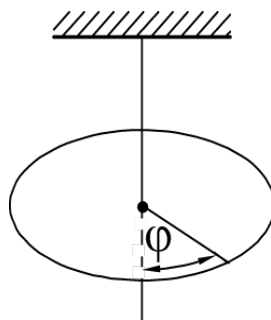
$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.174)$$

Z porovnání periody T_m matematického kyvadla a periody T_f fyzikálního kyvadla lze definovat redukovanou délku fyzikálního kyvadla jako délku takového matematického kyvadla, které kývá se stejnou dobou kmitu jako fyzikální kyvadlo.

Reverzní kyvadlo je fyzikální kyvadlo, ve kterém lze najít dvě osy o a o' , kolem nichž kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu.

1.1.3 Torzní kyvadlo

U torzního kyvadla je kmitavý pohyb okolo svislé osy vyvolán pružnými silami při kroucení vlákna (tzv. torzní síly). Takovým kyvadlem je např. deska upevněná v těžišti na svislém vlákně (obr. 2.47).



Obr. 2.47 Torzní kyvadlo

Moment torzních sil je úměrný výchylce z rovnovážné polohy (úhel φ) a je vyjádřen vztahem

$$M = -M_0\varphi \quad (2.175)$$

kde M_0 je tzv. direkční moment vlákna, závislý na elastických vlastnostech a geometrických rozměrech vlákna. Znaménko minus vyjadřuje to, že moment síly působí proti výchylce φ . Pak z rovnice (2.175) je pohybová rovnice torzního kyvadla

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M_0\varphi = 0 \quad (2.176)$$

a pro $\frac{M_0}{J} = \omega^2$ je

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \quad (2.177)$$

diferenciální rovnice o známém řešení (viz odst. 2.2.3.) ve tvaru

$$\varphi = A \sin \omega t \quad (2.178)$$

Doba kmitu torzního kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_0}} \quad (2.179)$$

Vztah (2.179) lze s výhodou užít pro experimentální určení momentu setrvačnosti symetrických těles, pro které je numerické řešení značně složité.

