



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdelávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní



APLIKOVANÝ MECHANIK JAKO SOUČÁST TÝMU KONSTRUKTÉRŮ A VÝVOJÁŘŮ: ČÁST DYNAMIKA ROTORŮ

Učební text

prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.

Ostrava 2011/2012



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu OP VK CZ.1.07/2.3.00/09.0147 „Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu“.

Název: Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů:
část Dynamika rotorů

Autor: prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.

Vydání: první, 2012

Počet stran: 46

Náklad:

Studijní materiály pro studijní obor Aplikovaná mechanika Fakulty strojní

Jazyková korektura: nebyla provedena.



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu
Číslo: CZ.1.07/2.3.00/09.0147
Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© Jaroslav Zapoměl

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2754-4

POKYNY KE STUDIUI

Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Dynamika rotorů

Určení studijního materiálu

Studijní materiál je určen studentům studujícím problematiku dynamiky rotorů, jejíž výuka je zařazena do 1. semestru magisterského studia oboru Aplikovaná mechanika studijního programu Strojní inženýrství.

Prerekvizity

Předpokladem studia dynamiky rotorů přednášené v rámci předmětu Aplikovaná dynamika je absolvování předmětů kinematiky, dynamiky a mechanického kmitání v rozsahu vyučovaném na konstrukčních oborech na technických univerzitách v České republice.

Cíl studijního materiálu

Cílem studijního materiálu je seznámit studenty se základními pojmy z oblasti dynamiky rotorů. Po jeho prostudování by měli rozumět základním zákonitostem kmitání rotorových soustav, příčinám jeho vzniku a měli by umět na inženýrské úrovni rozlišení kvalitativně i kvantitativně předvídat jejich chování.

Struktura studijního materiálu

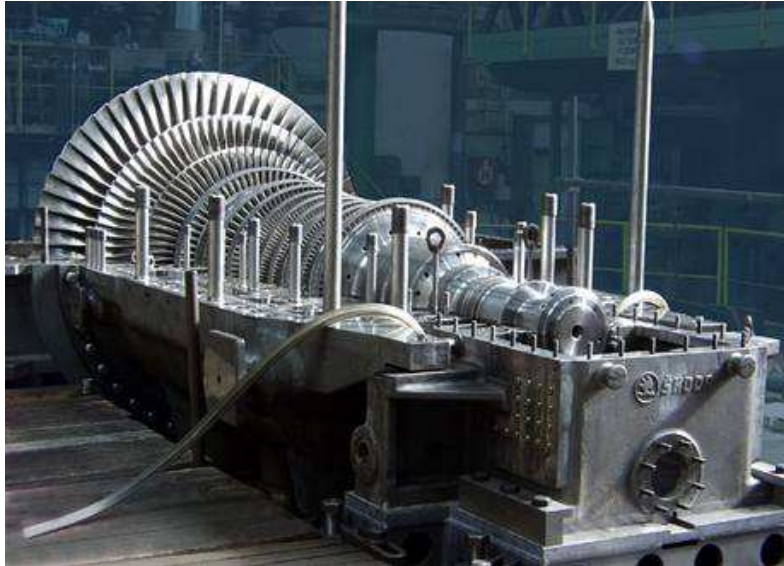
Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému členění studované látky. Nejsou stejně obsáhlé, proto jsou velké kapitoly dále děleny na číslované podkapitoly. Předpokládaná doba ke studiu jednotlivých kapitol je jen orientační a u jednotlivých studentů se může výrazně lišit.

OBSAH

ÚVOD	6
1 STABILITA POHYBU	9
1.1 Stabilita pohybu podle Ljapunova	9
1.2 Posouzení stability pohybu lineární soustavy	10
1.3 Kritéria stability pohybu	11
2 TEORETICKÉ ROTORY	15
3 KMITÁNÍ JEFFCOTTOVA ROTORU TLUMENÉHO VNĚJŠÍ A VNITŘNÍM TLUMENÍM	18
3.1 Odvození pohybové rovnice ve spolurotující souřadné soustavě	18
3.2 Odvození pohybové rovnice v nepohyblivé souřadné soustavě	22
3.3 Posouzení stability příčného kmitání	23
3.4 Analýza vynuceného kmitání - ustálená složka odezvy na buzení nevyváhou	26
4 KMITÁNÍ NETLUMENÉHO ROTORU S UVÁŽENÍM GYROSKOPICKÝCH ÚČINKŮ	28
4.1 Odvození pohybové rovnice	28
4.2 Analýza volného kmitání	32
4.3 Analýza vynuceného kmitání - ustálená složka odezvy na buzení nevyváhou	33
5 DYNAMIKA ROTORŮ S HYDRODYNAMICKÝMI LOŽISKY	36
5.1 Základy klasické teorie hydrodynamických ložisek	38
5.2 Dynamika absolutně tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách	41
6 LITERATURA	46

ÚVOD

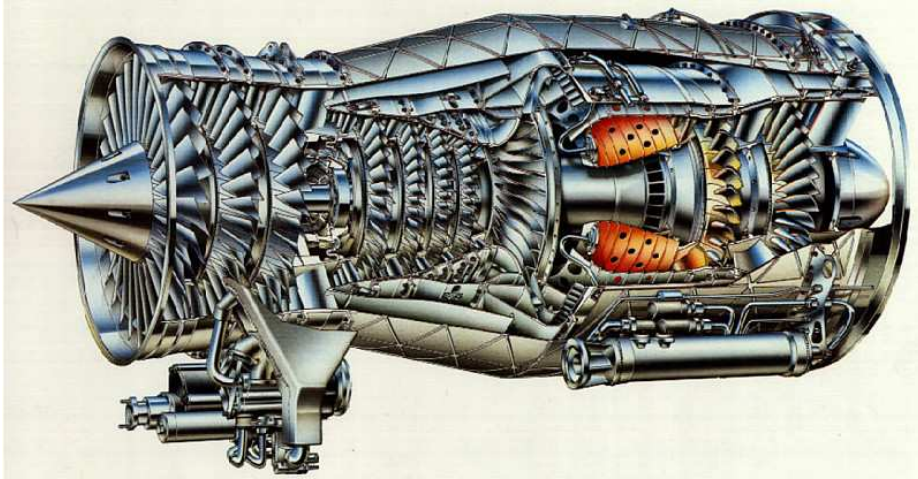
Rotory a hřídele patří k základním komponentům strojních zařízení jako jsou parní a plynové turbíny stacionárních i leteckých motorů, čerpadla, vodní turbíny, ventilátory kompresory, elektromotory, vřetena, hřídele v převodovkách a další (obrázky U.1-U.4).



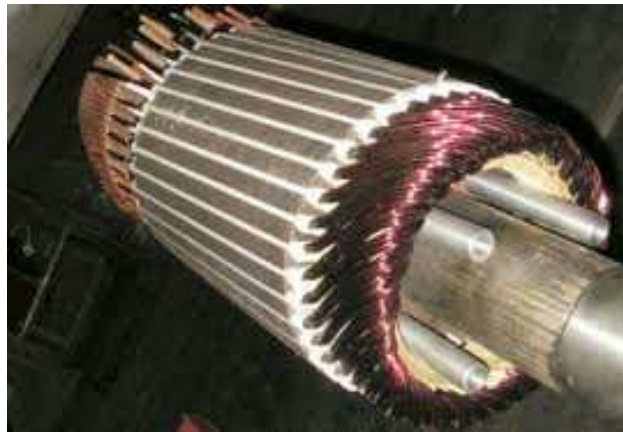
Obrázek U.1 – Parní turbína 50 MW typu Škoda MTD 30 CE



Obrázek U.2 – Parní turbína



Obrázek U.3 – Plynová turbína leteckého motoru



Obrázek U.4 – Rotor elektromotoru



Obrázek U.5 – Oběžné kolo Kaplanovy turbíny



Obrázek U.6 – Rotor ventilátoru

Společenský vývoj doprovázený prudkým rozvojem techniky vede ke stále se zvyšujícím požadavkům, které jsou kladeny na chod a konstrukci rotačních strojů. Patří k nim především snižování energetické náročnosti, zvyšování výkonu, účinnosti, bezpečnosti, spolehlivosti a šetrnosti k životnímu prostředí. Protože příčné kmitání rotorů je jednou z hlavních příčin mnoha nežádoucích účinků, významná třída technických problémů řešených na řadě konstrukčních, ale i výzkumných pracovištích je spojena s jeho tlumením.

Správné konstrukční řešení rotačních strojů vyžaduje poznat jejich chování už ve fázi návrhu. Jako významného nástroje lze k tomu použít metodu počítačového modelování.

Příspěvkem k seznámení se se základními vlastnostmi rotorů a s faktory, které podstatně ovlivňují jejich chování, patří i tento studijní materiál.

1 STABILITA POHYBU



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budou studenti

- ✚ znát základy teorie stability podle Ljapunova
- ✚ umět posoudit stabilitu pohybu lineární soustavy
- ✚ umět posoudit stabilitu pohybu soustavy podle kritérií stability



Výklad:

Stabilita soustavy je definována jako její schopnost vrátit se do původního stavu, jestliže skončilo působení rušivého faktoru, který ji z tohoto stavu vyvedl. Protože stav soustavy je určen řadou stavových parametrů, je vždy nutné uvést, z jakého hlediska je stabilita zkoumána.

Označení pohybu za stabilní nebo nestabilní záleží na způsobu hodnocení vlivu velikosti a druhu rušivých faktorů. Podle toho existují různé definice stability. K nim patří i definice stability pohybu podle Ljapunova.

1.1 Stabilita pohybu podle Ljapunova

Nechť je pohyb mechanické soustavy popsán soustavou n diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

necht' $x_j(t)$, $x_j^*(t)$ jsou stavové parametry po řadě rozrušeného a nerozrušeného pohybu a necht'

$$x_j(t_0) = x_{j0} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \quad \text{a} \quad t = t_0, \quad (1.2)$$

$$x_j^*(t_0) = x_{j0}^* \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \quad \text{a} \quad t = t_0 \quad (1.3)$$

jsou jejich počáteční podmínky.

Definice : Nerozrušený pohyb je stabilní (podle Ljapunova) vzhledem k veličinám x_j , jestliže pro každé kladné libovolně malé číslo ε lze nalézt takové kladné číslo η , že pro všechny rozrušené pohyby, pro které platí

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \eta, \quad (1.4)$$

bude platit pro všechna $t > t_0$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Jestliže neexistuje takové číslo $\eta > 0$, pak původní (nerozrušený) pohyb je nestabilní.

V definičních vztazích jsou $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*(t)$ vektory stavových parametrů rozrušeného a nerozrušeného pohybu

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (1.6)$$

$$\mathbf{x}^*(t) = [x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t)]^T \quad (1.7)$$

a $\|\cdot\|$ označuje Eukleidovskou normu vektorů.

Stabilita pohybu lineární soustavy je vlastností samotné soustavy (její hmotnosti a jejího rozložení, tuhosti, tlumení) a nezávisí ani na okamžitých hodnotách jejích stavových parametrů, ani na okamžité velikosti vnějšího zatížení nebo počátečních podmínkách. Lineární soustava je stabilní nebo nestabilní v celém stavovém prostoru.

Stabilita nelineární soustavy není pouze vlastností samotné soustavy. Závisí na okamžitých hodnotách stavových parametrů, konstatní i časově proměnné velikosti vnějšího zatížení, počátečních podmínkách i samotných rušivých vlivech. Pohyb těže soustavy může být pro určitý rozsah hodnot stavových parametrů stabilní, pro jiný rozsah pak nestabilní.

1.2 Posouzení stability kmitání lineární soustavy

Posuzování stability pohybu lineární soustavy se provádí za základě zkoumání odchylky jejího rozrušeného pohybu od pohybu, který by nastal, kdyby soustava nebyla rozrušena, a to od okamžiku, kdy rušivý účinek přestal na soustavu působit.

Pohybové rovnice nerozrušeného a rozrušeného pohybu transformované do stavového prostoru pak mají tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (1.8)$$

$$\dot{\mathbf{x}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) + \mathbf{f} \quad (1.9)$$

\mathbf{A} je matice koeficientů soustavy, \mathbf{f} je vektor obecných sil, \mathbf{x} je vektor stavových parametrů (obecných posuvů a rychlostí), $\Delta\mathbf{x}$ vyjadřuje odchylku stavových parametrů rozrušeného a nerozrušeného pohybu a $(\dot{\cdot})$ označuje první derivaci podle času. Zatížení nerozrušené i rozrušené soustavy po té, co přestal působit rušivý účinek, je stejné a v rovnicích (1.8) a (1.9) je vyjádřeno vektorem \mathbf{f} . V dalším se předpokládá, že matice \mathbf{A} je konstantní, což odpovídá mechanické soustavě s konstantními parametry (konstantní hmotností, tuhostí, tlumením).

Po odečtení pohybové rovnice nerozrušeného pohybu (1.8) od pohybové rovnice rozrušeného pohybu (1.9) se získá maticová rovnice pro časový průběh odchylek stavových veličin

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (1.10)$$

Maticová rovnice (1.10) představuje soustavu homogenních lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Její řešení závisí na řešení charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1.11)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice a λ je vlastní číslo (kořen charakteristické rovnice).

Obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \Delta \mathbf{x}_j \quad (1.12)$$

kde jednotlivá řešení $\Delta \mathbf{x}_j$ závisejí na vlastních číslech. Není-li λ_j násobným kořenem charakteristické rovnice, pak j -té partiální řešení soustavy rovnic (1.10) má tvar

$$\Delta \mathbf{x}_j = \Delta \bar{\mathbf{x}}_{A_j} e^{\lambda_j t} \quad (1.13)$$

Je-li vlastní číslo λ_j k -násobným kořenem charakteristické rovnice, t.j. vlastní čísla $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{j+k-1}$ jsou stejná, pak pro jednotlivá partiální řešení platí

$$\Delta \mathbf{x}_j = \Delta \bar{\mathbf{x}}_{A_j} e^{\lambda_j t} \quad (1.14)$$

$$\Delta \mathbf{x}_{j+1} = t \Delta \bar{\mathbf{x}}_{A_{j+1}} e^{\lambda_j t} \quad (1.15)$$

....

$$\Delta \mathbf{x}_{j+k-1} = t^{k-1} \Delta \bar{\mathbf{x}}_{A_{j+k-1}} e^{\lambda_j t} \quad (1.16)$$

Vlastní čísla λ_j i vektory $\Delta \mathbf{x}_j$ mohou být reálné nebo komplexní. Podmínkou proto, aby nerozrušený pohyb mechanické soustavy byl stabilní, je, aby velikost odchylky $\Delta \mathbf{x}$ s rostoucím časem konvergovala k nule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{x}(t)\| = 0. \quad (1.17)$$

To nastane, když všechna reálná nebo reálné části všech komplexních vlastních čísel budou záporné. Proto platí následující věta :

Mají-li všechna vlastní čísla lineární mechanické soustavy záporné reálné části, pak její pohyb je stabilní.

1.3 Kritéria stability pohybu

Základním způsobem posouzení stability pohybu lineární soustavy je výpočet jejích vlastních čísel a stabilita se pak posuzuje podle znamének jejich reálných částí.

Z toho však plyne, že k posouzení stability pohybu není třeba znát samotná vlastní čísla, stačí znát jen znaménka jejich reálných částí. Na této myšlence byla vypracována řada kritérií stability. K nim patří

- kritérium Routh-Hurwitzovo,
- kritérium Routh-Schurovo,
- kritérium Bilharzovo,
- a další.

Všetchna kritéria stability vyžadují sestavení charakteristického polynomu, neboť vycházejí z operací s jeho koeficienty.

Routh-Hurwitzovo kritérium slouží k posouzení stability pohybu soustav, u kterých výpočet vlastních čísel vede k sestavení charakteristického polynomu s reálnými koeficienty

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (1.18)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou koeficienty charakteristického polynomu a λ je vlastní číslo a necht' dále platí

$$a_n > 0. \quad (1.19)$$

Použití Hurwitzova kritéria vyžaduje sestavení Hurwitzovy matice

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Pro všechna $k > n$ ve (1.20) je $a_k = 0$.

Matice \mathbf{H} je sestavena z koeficientů charakteristického polynomu je čtvercová řádu n a její prvky jsou reálné.

Nutnou a postačující podmínkou proto, aby charakteristická rovnice (1.18) měla všechny kořeny se zápornou reálnou částí, je, aby všechny determinanty matic sestavených podle Hurwitze byly kladné

$$|a_1| > 0 \quad (1.21)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (1.22)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (1.23)$$

atd.

Bilharzovo kritérium je rozšířením kritéria Routh-Hurwitzova na soustavy, u kterých výpočet vlastních čísel vede k charakteristickému polynomu s komplexními koeficienty

$$(a_m + ia_{im})\lambda^n + (a_{m-1} + ia_{i(m-1)})\lambda^{n-1} + \dots + (a_{r_2} + ia_{i_2})\lambda^2 + (a_{r_1} + ia_{i_1})\lambda + a_{r_0} + ia_{i_0} = 0. \quad (1.24)$$

a_{rk}, a_{ik} pro $k = 0, 1, 2, \dots, n$ jsou reálné a imaginární částí koeficientů charakteristické rovnice a i je imaginární jednotka.

Použití Bilharzova kritéria vyžaduje sestavení Bilharzovy matice

$$B = \begin{bmatrix} a_{r_0} & -a_{i_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{i_1} & a_{r_1} & a_{r_0} & -a_{i_0} & 0 & 0 & \dots \\ -a_{r_2} & a_{i_2} & a_{i_1} & a_{r_1} & a_{r_0} & -a_{i_0} & \dots \\ -a_{i_3} & -a_{r_3} & -a_{r_2} & a_{i_2} & a_{i_1} & a_{r_1} & \dots \\ a_{r_4} & -a_{i_4} & -a_{i_3} & -a_{r_3} & -a_{r_2} & a_{i_2} & \dots \\ a_{i_5} & a_{r_5} & a_{r_4} & -a_{i_4} & -a_{i_3} & -a_{r_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Pro všechna $k > n$ v (1.25) jsou $a_{rk} = 0$, $a_{ik} = 0$.

Bilharzova matice je reálná, čtvercová, řádu $2n$ a její prvky jsou tvořeny reálnými a imaginárními částmi koeficientů charakteristické rovnice (1.24).

Nutnou a postačující podmínkou proto, aby charakteristická rovnice s komplexními koeficienty (1.24) měla všechny kořeny se zápornou reálnou částí, je, aby všechny determinanty matic sestavených podle Bilharze byly kladné

$$\begin{vmatrix} a_{r_0} & -a_{i_0} \\ a_{i_1} & a_{r_1} \end{vmatrix} > 0, \quad (1.26)$$

$$\begin{vmatrix} a_{r_0} & -a_{i_0} & 0 & 0 \\ a_{i_1} & a_{r_1} & a_{r_0} & -a_{i_0} \\ -a_{r_2} & a_{i_2} & a_{i_1} & a_{r_1} \\ -a_{i_3} & -a_{r_3} & -a_{r_2} & a_{i_2} \end{vmatrix} > 0, \quad (1.27)$$

$$\begin{vmatrix} a_{r_0} & -a_{i_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i_1} & a_{r_1} & a_{r_0} & -a_{i_0} & 0 & 0 \\ -a_{r_2} & a_{i_2} & a_{i_1} & a_{r_1} & a_{r_0} & -a_{i_0} \\ -a_{i_3} & -a_{r_3} & -a_{r_2} & a_{i_2} & a_{i_1} & a_{r_1} \\ a_{r_4} & -a_{i_4} & -a_{i_3} & -a_{r_3} & -a_{r_2} & a_{i_2} \\ a_{i_5} & a_{r_5} & a_{r_4} & -a_{i_4} & -a_{i_3} & -a_{r_3} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.28)$$

atd.

Společnou výhodou stabilitních kritérií je, že pro posouzení stability pohybu lineární soustavy nevyžadují výpočet jejích vlastních čísel (řešení problému vlastních hodnot). K

nevýhodám většiny z nich však patří, že vyžadují výpočet většího (nebo velkého) počtu determinantů, což vede v nutnosti provedení velkého počtu aritmetických operací.



Shrnutí pojmů

Hlavní pojmy kapitoly 1 : stabilita, stabilita pohybu podle Ljapunova, charakteristická rovnice, kritéria stability, kritérium stability podle Hurwitze, podle Bilharze.



Otázky

1. Jak je definována stabilita soustavy ?
2. Jak je definována stabilita pohybu soustavy podle Ljapunova ?
3. Jak se posuzuje stabilita pohybu lineární soustavy ?
4. Vysvětlete použití stabilitních kritérií.

2 TEORETICKÉ ROTORY



Čas ke studiu: 30 minut



Cíl: Po prostudování této kapitoly budou studenti znát
 základní teoretické rotory a jejich charakteristiky.



Výklad:

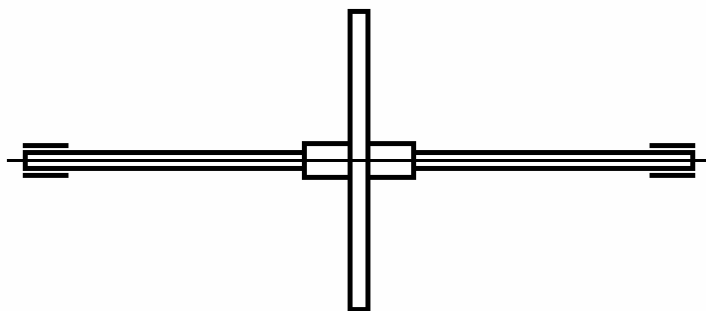
K objasnění a ke zkoumání chování rotorů cestou výpočetních simulací bylo navrženo několik teoretických rotorů, jejichž vlastnosti jsou na určité úrovni rozlišení obrazem určitého rozsahu vlastností rotorů reálných. Patří k nim

- absolutně tuhý rotor,
- Jeffcottův (Lavalův) rotor (obrázek 1.1),
- Stodolův rotor (obrázek 1.2).

Jeffcottův (Lavalův) rotor je to teoretický rotor, který splňuje předpoklady :

- je tvořen hřídelem a jedním kotoučem,
- celá soustava je symetrická vzhledem k rovině kolmé na osu hřídele,
- hřídel je nehmotný a poddajný,
- je uložen ve dvou ložiskách,
- kotouč je hmotný, absolutně tuhý,
- jeho střednicová rovina je kolmá k ose hřídele,
- kotouč může být zatížen silově a momentově v místě kotouče.

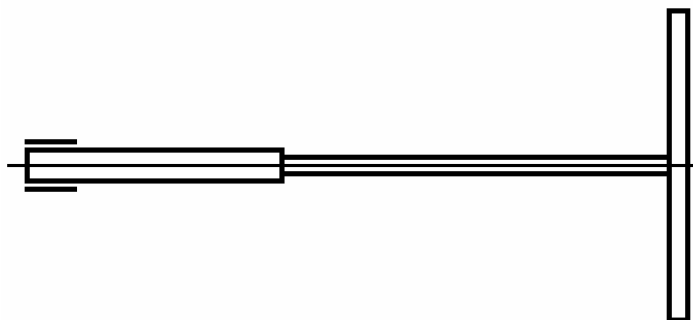
Z uvedených předpokladů vyplývá, že hřídel může být lineárně nebo nelineárně pružný nebo i nepružný (např. deformace hřídele mohou být i plastické). Jeho průřez může být kruhový nebo nekruhový, může se spojitě nebo nespojitě měnit po jeho délce (např. může být prizmatický, osazený), avšak vždy musí být splněna podmínka symetrie soustavy. Kotouč může být nekonečně tenký nebo tloušťky konečné velikosti a leží uprostřed meziložiskové vzdálenosti. Jeho střednicová rovina je vždy kolmá k ose hřídele. Aby byla splněna podmínka symetrie soustavy, síly zatěžující rotor mohou působit pouze ve směru kolmém na jeho střednici a momenty pouze ve směru jeho střednice. Uložení Jeffcottova rotoru je absolutně tuhé nebo poddajné (lineárně nebo nelineárně). Poddajné uložení zahrnuje vliv poddajnosti a tlumení vazbových prvků (ložisek, tlumičů, ucpávek, atd.) a ložiskových těles nebo stojanů. Může být isotropní, ortotropní nebo obecně anisotropní. Jeffcottův rotor může být netlumený nebo tlumený vnějším i vnitřním tlumením. Rotor se může otáčet konstantní nebo proměnnou úhlovou rychlostí.



Obrázek 2.1 – Jeffcottův rotor

Stodolův rotor je to teoretický rotor, který splňuje předpoklady :

- je tvořen hřídelem a jedním kotoučem,
- kotouč je nasazen na hřídel na jednom jeho konci,
- hřídel je nehmotný, poddajný,
- kotouč je hmotný, absolutně tuhý,
- kotouč může být zatížen silově a momentově v místě kotouče,
- hřídel je uložen v jednom ložisku a to na opačném konci, než je nasazen kotouč.



Obrázek 2.2 – Stodolův rotor

Hřídel Stodolova rotoru může být lineárně nebo nelineárně pružný nebo i nepružný (např. deformace hřídele mohou být i plastické). Jeho průřez může být kruhový nebo nekruhový, může se spojitě nebo nespojitě měnit po jeho délce (např. prizmatický, osazený). Kotouč může být nekonečně tenký nebo tloušťky konečné velikosti. Jeho střednicová rovina nemusí být kolmá k ose hřídele. Síly a momenty zatěžující kotouč mohou působit v libovolném směru. Uložení Stodolova rotoru je absolutně tuhé nebo poddajné (lineárně nebo nelineárně), vždy umožňuje jeho rotaci kolem osy hřídele. Poddajné uložení zahrnuje vliv poddajnosti a tlumení vazbových prvků (ložisek, tlumičů, ucpávek, atd.) a ložiskových těles nebo stojanů. Může být isotropní, ortotropní nebo obecně anisotropní. Stodolův rotor může

být netlumený nebo tlumený vnějším a vnitřním tlumením. Rotor se může otáčet konstantní nebo proměnnou úhlovou rychlostí.

Teoretické rotory slouží především k objasnění základních charakteristik chování rotorů a mohou být použity k sestavení výpočtových modelů jednoduchých rotačních strojů, které na požadované úrovni rozlišení splňují uvedené předpoklady.



Shrnutí pojmů

Hlavní pojmy kapitoly 2 : teoretický rotor, Jeffcottův rotor, Stodolův rotor.



Otázky

5. Co je to Jeffcottův rotor a jaké jsou jeho charakteristiky ?
6. Co je to Stodolův rotor a jaké jsou jeho charakteristiky ?

3 KMITÁNÍ JEFFCOTTOVA ROTORU TLUMENÉHO VNĚJŠÍM A VNITŘNÍM TLUMENÍM



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budou studenti

- ✚ umět sestavit pohybovou rovnici tlumeného Jeffcottova rotoru vyjádřenou ve spolurotující souřadné soustavě,
- ✚ umět sestavit pohybovou rovnici tlumeného Jeffcottova rotoru vyjádřenou v nepohyblivé souřadné soustavě,
- ✚ umět posoudit stabilitu kmitání Jeffcottova rotoru s vnějším a vnitřním tlumením,
- ✚ znát odezvu Jeffcottova rotoru tlumeného vnějším a vnitřním tlumením na buzení nevývahou kotouče.



Výklad:

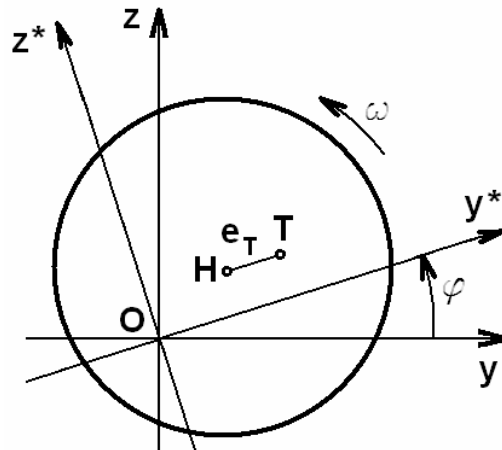
O soustavě se předpokládá, že :

- zkoumanou soustavou je Jeffcottův rotor,
- hřídel je pružný, kruhového průřezu,
- pohyb kotouče je tlumen vnějším tlumením a tlumením v materiálu hřídele,
- vnější i vnitřní tlumení jsou lineární a isotropní,
- uložení rotoru je absolutně tuhé,
- kotouč je zatížen vlastní tíhou a je buzen svou nevývahou,
- rotor se otáčí konstantní úhlovou rychlostí.

Zatímco vnější tlumení závisí na rychlosti kotouče vzhledem k vnějšímu okolí, vnitřní (materiálové) tlumení závisí na časové změně přetvoření materiálu hřídele, což je dáno rychlostí deformace (rychlostí kotouče) vzhledem k prostoru, který se otáčí spolu s rotorem.

3.1 Odvození pohybové rovnice ve spolurotující souřadné soustavě

K sestavení pohybových rovnic jsou zavedeny dvě souřadné soustavy, nepohyblivá $Oxyz$ a spolurotující $Ox^*y^*z^*$ (obrázek 3.1). Osa x nepohyblivé souřadné soustavy je totožná se spojnicí středů ložisek a osy y (vodorovná) a z (svislá) leží ve střednicové rovině kotouče. Osa x^* je totožná s osou x , osy y^* a z^* leží ve střednicové rovině kotouče a otáčejí se spolu s prostorem pevně spojeným s rotorem. Osa y^* je zvolena tak, aby stále zůstávala rovnoběžná se spojnicí středu kotouče a jeho těžiště.



Obrázek 3.1 – Nepohyblivá a spolurotující souřadná soustava

Na obrázku 3.1 bod H označuje střed kotouče, což je průsečík jeho střednicové roviny a střednice hřídele, a bod T označuje těžiště (střed hmotnosti) kotouče.

Kotouč vykonává obecný rovinný pohyb. Jeho silové pohybové rovnice, za předpokladu, že jeho pohyb je tlumen pouze vnějším tlumením, mají tvar

$$m\ddot{y}_T = -b_p y - ky, \quad (3.1)$$

$$m\ddot{z}_T = -b_p z - kz - mg. \quad (3.2)$$

m je hmotnost kotouče, k je tuhost hřídele, b_p je součinitel vnějšího tlumení (lineárního), g je tíhové zrychlení, z_T , y_T jsou deformační posuvy těžiště kotouče T, y , z jsou deformační posuvy středu kotouče H a (\cdot) , $(\ddot{\cdot})$ označují první a druhou derivaci podle času.

Závislost mezi deformačními posuvy středu kotouče a jeho těžiště je dány vztahy

$$y_T = y + e_T \cos \varphi, \quad (3.3)$$

$$z_T = z + e_T \sin \varphi. \quad (3.4)$$

e_T je excentricita těžiště (středu hmotnosti) kotouče a φ je úhel jeho natočení. Pro konstantní rychlost otáčení rotoru lze polohový úhel φ vyjádřit

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (3.5)$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení rotoru (konstantní), φ_0 je fázový posuv a t je čas.

Po provedení druhých derivací (3.3) a (3.4) podle času, jejich dosazení do (3.1), (3.2) a po jednoduché úpravě nabývají pohybové rovnice rotoru tvar

$$m\ddot{y} + b_p \dot{y} + ky = F_{cy}, \quad (3.6)$$

$$m\ddot{z} + b_p \dot{z} + kz = F_{cz}, \quad (3.7)$$

kde

$$F_{cy} = me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.8)$$

$$F_{cz} = me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg. \quad (3.9)$$

V dalším se rovnice (3.7) pronásobí imaginární jednotkou i a obě rovnice (3.6) a (3.7) se sečtou. Po těchto úpravách pak platí

$$m(\ddot{y} + i\ddot{z}) + b_p(\dot{y} + i\dot{z}) + k(y + iz) = F_{cy} + iF_{cz}. \quad (3.10)$$

F_{cy} a F_{cz} jsou složky celkové síly zatěžující kotouč vyjádřené v nepohyblivé souřadné soustavě.

Zavedením substitucí

$$\bar{r} = y + iz, \quad (3.11)$$

$$\bar{F}_c = F_{cy} + iF_{cz} \quad (3.12)$$

přechází pohybová rovnice (3.10) v komplexním tvaru na tvar

$$m\ddot{\bar{r}} + b_p\dot{\bar{r}} + k\bar{r} = \bar{F}_c. \quad (3.13)$$

\bar{r} je komplexní deformační posuv středu kotouče vzhledem k nepohyblivé souřadné soustavě a \bar{F}_c je celková komplexní síla.

Pro transformaci deformačních posuvů ze spolurotující souřadné soustavy do soustavy nepohyblivé platí

$$y = y^* \cos \varphi - z^* \sin \varphi, \quad (3.14)$$

$$z = y^* \sin \varphi + z^* \cos \varphi. \quad (3.15)$$

y^* , z^* jsou deformační posuvy středu kotouče ve spolurotující souřadné soustavě a φ je nejenom úhel natočení rotoru, ale také natočení spolurotující souřadné soustavy vzhledem k souřadné soustavě nepohyblivé. Komplexní výchylku \bar{r} lze vyjádřit po dosazení (3.14) a (3.15) do (3.11)

$$\bar{r} = y^* \cos \varphi - z^* \sin \varphi + i(y^* \sin \varphi + z^* \cos \varphi). \quad (3.16)$$

Po následné úpravě platí

$$\bar{r} = y^* (\cos \varphi + i \sin \varphi) + z^* (i \cos \varphi - \sin \varphi), \quad (3.17)$$

$$\bar{r} = y^* (\cos \varphi + i \sin \varphi) + iz^* (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (3.18)$$

$$\bar{r} = (y^* + iz^*) (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3.19)$$

S využitím Eulerových vztahů a substituce

$$\bar{r}^* = y^* + iz^* \quad (3.20)$$

přechází vztah (3.19) na tvar

$$\bar{r} = \bar{r}^* e^{i\varphi}. \quad (3.20)$$

Po provedení první a druhé derivace \bar{r} podle času a s ohledem na (3.5)

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} + i\omega \bar{r}^* e^{i\varphi}, \quad (3.21)$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} + 2i\omega \dot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} - \omega^2 \bar{r}^* e^{i\varphi} \quad (3.22)$$

a po dosazení (3.20), (3.21) a (3.22) do (3.13) transformuje se komplexní pohybová rovnice do souřadnic spolurotující souřadné soustavy

$$m(\ddot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} + 2i\omega \dot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} - \omega^2 \bar{r}^* e^{i\varphi}) + b_p(\dot{\bar{r}}^* e^{i\varphi} + i\omega \bar{r}^* e^{i\varphi}) + k\bar{r}^* e^{i\varphi} = \bar{F}_c. \quad (3.23)$$

Po provedení roznásobení nabývá komplexní pohybová rovnice vyjádřená ve spolurotující souřadné soustavě tvar

$$m\ddot{\bar{r}}^* + (b_p + 2m\omega i)\dot{\bar{r}}^* + (k - m\omega^2 + b_p\omega i)\bar{r}^* = \bar{F}_c e^{-i\varphi}. \quad (3.23)$$

Rovnice (3.23) je vztažena ke spolurotující souřadné soustavě. V této souřadné soustavě je materiálové tlumení úměrné rychlosti kotouče (časové změně deformačních posuvů). Jeho uvážení se zajistí přidáním příslušného členu do rovnice (3.23)

$$m\ddot{\bar{r}}^* + (b_p + b_M + 2m\omega i)\dot{\bar{r}}^* + (k - m\omega^2 + b_p\omega i)\bar{r}^* = \bar{F}_c e^{-i\varphi}. \quad (3.24)$$

b_M je součinitel vnitřního (materiálového) tlumení.

V dalším se do rovnice (3.24) dosadí za \bar{r}^* a za jeho první a druhou derivaci podle času s využitím vztahu (3.20)

$$m(\dot{y}^* + i\dot{z}^*) + (b_p + b_M + 2m\omega i)(y^* + iz^*) + (k - m\omega^2 + b_p\omega i)(y^* + iz^*) = \bar{F}_c e^{-i\varphi}. \quad (3.25)$$

Pro pravou stranu rovnice (3.25) platí

$$\bar{F}_c e^{-i\varphi} = (F_{cy} + iF_{cz})(\cos\varphi - i\sin\varphi). \quad (3.26)$$

V dalším kroku se provede roznásobení rovnic (3.25) a (3.26) a porovnání jejich reálných a imaginární části na levé a pravé straně. Tím se rovnice (3.25) převede na dvě rovnice v reálném oboru

$$m\dot{y}^* + (b_p + b_M)\dot{y}^* - 2m\omega\dot{z}^* + (k - m\omega^2)y^* - b_p\omega z^* = F_{cy} \cos\varphi + F_{cz} \sin\varphi, \quad (3.27)$$

$$m\dot{z}^* + 2m\omega\dot{y}^* + (b_p + b_M)\dot{z}^* + b_p\omega y^* + (k - m\omega^2)z^* = -F_{cy} \sin\varphi + F_{cz} \cos\varphi. \quad (3.28)$$

Pohybové rovnice rotoru vztažené ke spolurotující souřadné soustavě (3.27), (3.28) lze pak vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p + b_M & -2m\omega \\ 2m\omega & b_p + b_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -b_p\omega \\ b_p\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} F_{cy} \cos\varphi + F_{cz} \sin\varphi \\ -F_{cy} \sin\varphi + F_{cz} \cos\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

nebo také

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{B}^* \dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{x}^* = \mathbf{f}^*. \quad (3.30)$$

\mathbf{M}^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{K}^* jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti rotoru vztažené ke spolurotující souřadné soustavě, \mathbf{x}^* , \mathbf{f}^* jsou vektory deformačních posuvů a sil vyjádřených ve spolurotující souřadné soustavě.

3.2 Odvození pohybové rovnice ve nepohyblivé souřadné soustavě

Komplexní výchylku kotouče ve spolurotující souřadné soustavě lze vyjádřit pomocí vztahu (3.20)

$$\bar{r}^* = \bar{r}e^{-i\varphi}. \quad (3.31)$$

Její první a druhá derivace podle času mají tvar

$$\dot{\bar{r}}^* = \dot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - i\omega\bar{r}e^{-i\varphi}, \quad (3.32)$$

$$\ddot{\bar{r}}^* = \ddot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - 2i\omega\dot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - \omega^2\bar{r}e^{-i\varphi}. \quad (3.33)$$

Dosazením (3.31), (3.32) a (3.33) do (3.24) se získá pohybová rovnice v komplexním tvaru

$$m(\ddot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - 2i\omega\dot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - \omega^2\bar{r}e^{-i\varphi}) + (b_p + b_M + 2m\omega i)(\dot{\bar{r}}e^{-i\varphi} - i\omega\bar{r}e^{-i\varphi}) + (k - m\omega^2 + b_p\omega i)\bar{r}e^{-i\varphi} = \bar{F}_c e^{-i\varphi}, \quad (3.34)$$

kteřou lze po roznásobení zjednodušit

$$m\ddot{\bar{r}} + (b_p + b_M)\dot{\bar{r}} + (k - b_M\omega i)\bar{r} = \bar{F}_c. \quad (3.35)$$

Za komplexní výchylku \bar{r} a její první a druhou derivaci podle času se dosadí z (3.11)

$$m(\dot{y} + i\dot{z}) + (b_p + b_M)(\dot{y} + i\dot{z}) + (k - b_M\omega i)(y + iz) = F_{cy} + iF_{cz}. \quad (3.36)$$

Následně se provede roznásobení v rovnici (3.36) a porovnání reálných a imaginárních částí na její levé a pravé straně. Tím přechází komplexní rovnice (3.36) na dvě rovnice reálné

$$m\ddot{y} + (b_p + b_M)\dot{y} + ky + \omega b_M z = F_{cy}, \quad (3.37)$$

$$m\ddot{z} + (b_p + b_M)\dot{z} - \omega b_M y + kz = F_{cz}. \quad (3.38)$$

To může být vyjádřeno i pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p + b_M & 0 \\ 0 & b_p + b_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & b_M \\ -b_M & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

nebo také

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \omega\mathbf{K}_C)\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (3.40)$$

\mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti rotoru, \mathbf{K}_C je cirkulační matice a \mathbf{x} a \mathbf{f} jsou vektory deformačních posuvů a sil vyjádřených v nepohyblivé souřadné soustavě. Cirkulační matice je čtvercová, druhého stupně a její struktura je antisymetrická. Proto celková matice

úměrná vektoru deformačních posuvů nemusí být pozitivně definitní, což za jistých podmínek může vést ke ztrátě stability řešení.

3.3 Posouzení stability příčného kmitání

Stabilitu pohybu rotoru s uvážením vlivu vnějšího a vnitřního tlumení lze posoudit několika způsoby. První spočívá ve stanovení vlastních čísel soustavy. Charakteristická rovnice sestavená na základě pohybové rovnice vyjádřené ve spolurotující souřadné soustavě (3.30) má tvar

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M}^* + \lambda \mathbf{B}^* + \mathbf{K}^*) = 0 \quad (3.41)$$

a také

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m + \lambda(b_p + b_M) + k - m\omega^2 & -2\lambda m\omega - b_p\omega \\ 2\lambda m\omega + b_p\omega & \lambda^2 m + \lambda(b_p + b_M) + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

kde λ je vlastní číslo. (3.42)

Charakteristickou rovnici lze získat i z pohybové rovnice vyjádřené pomocí souřadnic nepohyblivé souřadné soustavy (3.40)

$$\det[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C] = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m + \lambda(b_p + b_M) + k & \omega b_M \\ -\omega b_M & \lambda^2 m + \lambda(b_p + b_M) + k \end{vmatrix} = 0. \quad (3.44)$$

V obou případech po roznásobení determinantů (3.42) a (3.44) se získá charakteristická rovnice ve tvaru

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.45)$$

kde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 jsou její koeficienty. Řešení charakteristické rovnice dává vlastní čísla soustavy a stabilita pohybu se posuzuje podle znamének jejich reálných částí.

Protože uvedený postup vede ke stanovení koeficientů charakteristické rovnice, druhou možností k posouzení stability pohybu je použití některého stabilitního kriteriá, např. Routh-Hurwitzova.

Třetí možností je vypočítat vlastní čísla soustavy na základě pohybové rovnice rotoru vyjádřené pomocí komplexních výchylek ve spolurotující souřadné soustavě (3.24). Charakteristická rovnice pak má tvar

$$\lambda^2 m + \lambda(b_p + b_M + 2m\omega i) + k - m\omega^2 + b_p\omega i = 0 \quad (3.46)$$

a její kořeny (vlastní čísla soustavy) jsou dány vztahy

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(b_p + b_M + 2m\omega i) \pm \sqrt{(b_p + b_M + 2m\omega i)^2 - 4m(k - m\omega^2 + b_p\omega i)}}{2m}. \quad (3.47)$$

Po vydělení čitatele i jmenovatele zlomku $2m$ a zavedení substitucí

$$\delta_P = \frac{b_P}{2m}, \quad (3.48)$$

$$\delta_M = \frac{b_M}{2m} \quad (3.49)$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.50)$$

přechází vztah (3.47) na tvar

$$\lambda_{1,2} = -\delta_P - \delta_M - \omega i \pm \sqrt{(\delta_P + \delta_M + \omega i)^2 - \Omega^2 + \omega^2 - 2\delta_P \omega i}. \quad (3.51)$$

δ_P , δ_M jsou součinitele dozívání vnějšího a vnitřního tlumení a Ω je vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání.

Odmocninu ve vztahu (3.51) lze upravit

$$\sqrt{(\delta_P + \delta_M + \omega i)^2 - \Omega^2 + \omega^2 - 2\delta_P \omega i} = \Omega \sqrt{\left[\left(\frac{\delta_P}{\Omega} + \frac{\delta_M}{\Omega} + \frac{\omega}{\Omega} i \right)^2 - 1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} - 2 \frac{\delta_P}{\Omega} \frac{\omega}{\Omega} i \right]}. \quad (3.52)$$

Po zavedení poměrných útlumů vnějšího a vnitřního tlumení ξ_P , ξ_M a součinitele naladění η

$$\xi_P = \frac{\delta_P}{\Omega}, \quad (3.53)$$

$$\xi_M = \frac{\delta_M}{\Omega}, \quad (3.54)$$

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega} \quad (3.55)$$

přechází vztah pro vlastní čísla (3.51) na tvar

$$\lambda_{1,2} = -\delta_P - \delta_M - \omega i \pm \Omega \sqrt{(\xi_P + \xi_M + \eta i)^2 - 1 + \eta^2 - 2\xi_P \eta i}. \quad (3.56)$$

Po provedení úprav výrazů pod odmocninou a po zanedbání druhých mocnin a vzájemných součinů poměrných útlumů (poměrné útlumy jsou velmi malá čísla) lze (3.56) přepsat na tvar

$$\lambda_{1,2} = -\delta_P - \delta_M - \omega i \pm \Omega \sqrt{2\eta \xi_M i - 1} \quad (3.57)$$

a také

$$\lambda_{1,2} = -\delta_P - \delta_M - \omega i \pm \Omega i \sqrt{1 - 2\eta \xi_M i}. \quad (3.58)$$

Použitím rozvoje do binomické řady lze odmocninu v (3.58) po zanedbání členů vyšších řádů přibližně vyjádřit

$$\sqrt{1-2\eta\xi_M i} \doteq 1-\eta\xi_M i. \quad (3.59)$$

Pro vlastní čísla pak s dostatečnou přesností platí

$$\lambda_1 = -\delta_p - \delta_M - \eta\Omega\xi_M - i(\omega + \Omega), \quad (3.60)$$

$$\lambda_2 = -\delta_p - \delta_M + \eta\Omega\xi_M - i(\omega - \Omega). \quad (3.61)$$

Reálná část vlastního čísla λ_1 je vždy záporná, avšak u vlastního čísla λ_2 může být záporná, nulová i kladná. Proto podmínkou stability pohybu je, aby reálná část vlastního čísla λ_2 byla záporná

$$-\delta_p - \delta_M + \eta\Omega\xi_M < 0. \quad (3.62)$$

Po několika malých úpravách lze podmínku stability vyjádřit

$$1 + \frac{\delta_p}{\delta_M} - \frac{\omega}{\Omega} > 0, \quad (3.63)$$

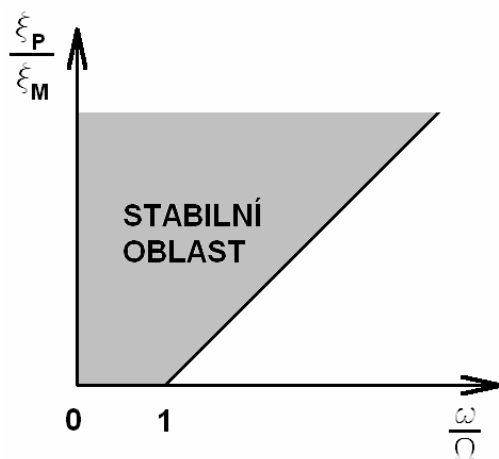
$$1 + \frac{\xi_p}{\xi_M} - \frac{\omega}{\Omega} > 0, \quad (3.64)$$

$$1 + \frac{b_p}{b_M} - \frac{\omega}{\Omega} > 0. \quad (3.65)$$

Soustava se dostává na mez stability, když výraz na levé straně nerovností (3.63) - (3.65) je nulový. Z toho lze určit mezní hodnotu úhlové rychlosti otáčení rotoru, při jejímž překročení dojde ke ztrátě stability pohybu

$$\omega_{mez} = \Omega \left(1 + \frac{\xi_p}{\xi_M} \right). \quad (3.66)$$

ω_{mez} je mezní úhlová rychlost rotoru.



Obrázek 3.2 – Oblast stabilního kmitání Jeffcottova rotoru

Z nerovností (3.63) - (3.65) plyne, že pro úhlovou rychlost otáčení, která je menší než vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání rotoru, je jeho příčné kmitání stabilní pro jakoukoliv hodnotu poměrného útlumu materiálového tlumení. Pro vyšší úhlovou rychlost stabilita kmitání závisí na poměru poměrných útlumů vnějšího a vnitřního tlumení (obrázek 3.2). Podmínkou stability kmitání je, aby vnější tlumení bylo dostatečně velké. Konkrétní hodnoty parametrů vnějšího tlumení plynou ze vztahů (3.63) až (3.65).

3.4 Analýza vynuceného kmitání - ustálená složka odezvy na buzení nevývahou

S ohledem na (3.12), (3.8) a (3.9) má pohybová rovnice (3.35) Jeffcottova rotoru buzeného pouze nevývahou a vlastní tíhou vyjádřená pomocí komplexní výchylky v nepohyblivé souřadné soustavě tvar

$$m\ddot{\bar{r}} + (b_p + b_M)\dot{\bar{r}} + (k - b_M\omega i)\bar{r} = me_T\omega^2 \cos\varphi + ime_T\omega^2 \sin\varphi - img, \quad (3.67)$$

kde úhel φ je dán vztahem (3.5). S využitím Eulerových vztahů lze rovnici (3.6) přepsat

$$m\ddot{\bar{r}} + (b_p + b_M)\dot{\bar{r}} + (k - b_M\omega i)\bar{r} = me_T\omega^2 e^{i\varphi} - img. \quad (3.68)$$

Ustálenou složku komplexního řešení rovnice (3.68) je možno odhadnout podle tvaru pravé strany

$$\bar{r} = \bar{r}_A e^{i\varphi} + \bar{r}_G, \quad (3.69)$$

kde \bar{r}_A je komplexní amplituda kmitání a \bar{r}_G komplexní stacionární posuv středu kotouče.

V dalším se provede první a druhá derivace komplexní výchylky podle času

$$\dot{\bar{r}} = i\omega\bar{r}_A e^{i\varphi}, \quad (3.70)$$

$$\ddot{\bar{r}} = -\omega^2\bar{r}_A e^{i\varphi} \quad (3.71)$$

a dosadí se do pohybové rovnice (3.68). Po jednoduché úpravě se dostane

$$[-m\omega^2 + i\omega(b_p + b_M) + k - ib_M\omega]\bar{r}_A e^{i\varphi} + (k - ib_M\omega)\bar{r}_G = me_T\omega^2 e^{i\varphi} - img. \quad (3.72)$$

Z porovnání stejných mocnin Eulerova čísla na levé a pravé straně rovnice (3.72) se získají vztahy pro komplexní výchylku

$$\bar{r}_A = \frac{me_T\omega^2}{k - m\omega^2 + i\omega b_p}, \quad (3.73)$$

$$\bar{r}_G = \frac{-img}{k - i\omega b_M}. \quad (3.74)$$

Pro velikost amplitudy ustálené složky vynuceného kmitání pak platí

$$|\bar{r}_A| = \frac{me_T\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b_p^2}}. \quad (3.75)$$

Po zavedení součinitele naladění η a poměrného útlumu vnějšího tlumení ξ_P přechází vztah (3.75) na tvar

$$|\bar{r}_A| = e_T \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\eta^2\xi_P^2}}. \quad (3.76)$$

Vztah pro komplexní stacionární posuv vyvolaný vlastní tíhou je možno přepsat do tvaru

$$\bar{r}_G = \frac{mg\omega b_M}{k^2 + \omega^2 b_M^2} - i \frac{kmg}{k^2 + \omega^2 b_M^2}. \quad (3.77)$$

Ze vztahu (3.75) a také (3.76) vyplývá, že velikost amplitudy ustálené složky vynuceného kmitání závisí pouze na vnějším tlumení. Ze vztahů (3.74) a (3.77) je patrné, že působením vlastní tíhy nedojde jen k posuvu středu kotouče Jeffcottova rotoru ve svislém směru (obecně nenulová imaginární část komplexní stacionární výchylky), ale také k jeho posuvu ve směru vodorovném (obecně nenulová reálná část komplexní stacionární výchylky). Tento jev je způsoben materiálovým tlumením hřídele a jeho rotací. Kdyby se rotor neotáčel, reálná část \bar{r}_G by byla nulová a hřídel by se prohnul jen ve svislém směru.



Shrnutí pojmů

Hlavní pojmy kapitoly 3 : nepohyblivá souřadná soustava, spolurotující souřadná soustava, pohybová rovnice tlumeného Jeffcottova rotoru, podmínka stability.



Otázky

7. Jak jsou zavedeny nepohyblivá a spolurotující souřadná soustava ?
8. Odvoďte pohybovou rovnici Jeffcottova rotoru s vnějším a vnitřním tlumením ve spolurotující souřadné soustavě.
9. Odvoďte pohybovou rovnici Jeffcottova rotoru s vnějším a vnitřním tlumením v nepohyblivé souřadné soustavě.
10. Odvoďte podmínku stability příčného kmitání Jeffcottova rotoru s vnějším a vnitřním tlumením.
11. Odvoďte vztahy pro stacionární polohu a ustálenou amplitudu kmitání odezvy Jeffcottova rotoru s vnějším a vnitřním tlumením na buzení neváhou.

4 KMITÁNÍ NETLUMENÉHO ROTORU S UVÁŽENÍM GYROSKOPICKÝCH ÚČINKŮ



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budou studenti

- ✚ umět odvodit pohybovou rovnici rotoru s uvážením vlivu gyroskopických účinků
- ✚ umět analyzovat volné kmitání rotoru s uvážením vlivu gyroskopických účinků
- ✚ umět stanovit ustálenou složku kmitání rotoru buzeného nevyváhou



Výklad:

O zkoumané soustavě se předpokládá, že :

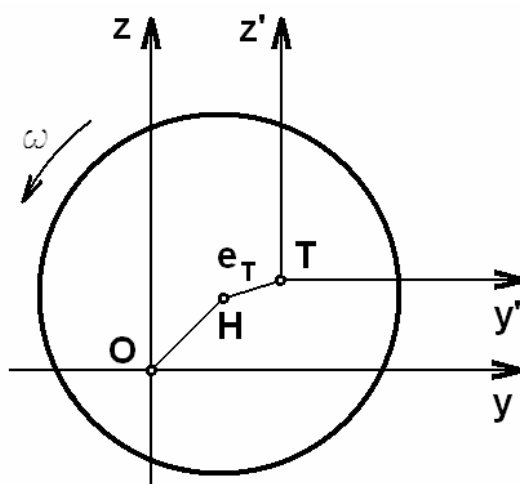
- zkoumaným rotorem je Stodolův rotor,
- jeho uložení je absolutně tuhé,
- mechanické tlumení (vnější ani materiálové) není uváženo,
- rotor je rotačně symetrický,
- kotouč je symetrický vzhledem k rovině kolmé k jeho ose rotace,
- je nevyvážený (těžiště neleží na ose rotace hřídele),
- je zatížený vlastní tíhou,
- rotor se otáčí konstantní úhlovou rychlostí,
- střednicová rovina kotouče je kolmá ke střednici hřídele.

4.1 Odvození pohybové rovnice

U Stodolova rotoru dochází nejenom k posuvu kotouče ve směru kolmém ke střednici hřídele, ale i k jeho naklápění, což má velký vliv na pohyb rotoru.

K popisu kmitání kotouče jsou zvoleny dvě souřadné soustavy (obrázek 4.1). Souřadná soustava $Oxyz$ má osu x totožnou s osou rotace hřídele v nedeformovaném stavu, osy y a z jsou k ní kolmé a leží ve střednicové rovině kotouče. Souřadná soustava $Tx'y'z'$ má svůj počátek v těžišti kotouče, její osy jsou v nedeformovaném stavu rovnoběžné s odpovídajícími osami x , y a z . Tato soustava se však pohybuje, vykonává translační pohyb určený pohybem těžiště T a její rovina $y'z'$ se naklápí spolu se střednicovou rovinou kotouče kolem os y a z (vykonává dva současné rotační pohyby kolem os y a z). Protože kotouč je rotačně symetrický, osy x' , y' , z' jsou hlavními osami setrvačnosti kotouče.

Z uvedeného rozboru vyplývá, že kotouč při kmitání Stodolova rotoru vykonává současně čtyři pohyby, dva posuvy ve směru os y a z a dvě natáčení kolem os y a z .



Obrázek 4.1 – Souřadné soustavy

K odvození pohybových rovnic kotouče jsou použity první a druhá impulsová věta. Podle první impulsové věty platí, že časová změna hybnosti kotouče je rovna součtu všech vnějších sil, které na něj působí. Proto

$$\frac{dH_y}{dt} = F_{ky}, \quad (4.1)$$

$$\frac{dH_z}{dt} = F_{kz} - mg. \quad (4.2)$$

H_z , H_y jsou složky vektoru hybnosti kotouče a F_{ky} , F_{kz} jsou elastické síly, kterými působí pružně deformovaný hřídel na kotouč.

Složky vektoru hybnosti jsou dány vztahy

$$H_y = m\dot{y}_T, \quad (4.3)$$

$$H_z = m\dot{z}_T. \quad (4.4)$$

y_T a z_T jsou souřadnice těžiště (středu hmotnosti) kotouče. Po dosazení (4.3), (4.4) do (4.1) a (4.2) a provedení derivace podle času se získají silové pohybové rovnice kotouče

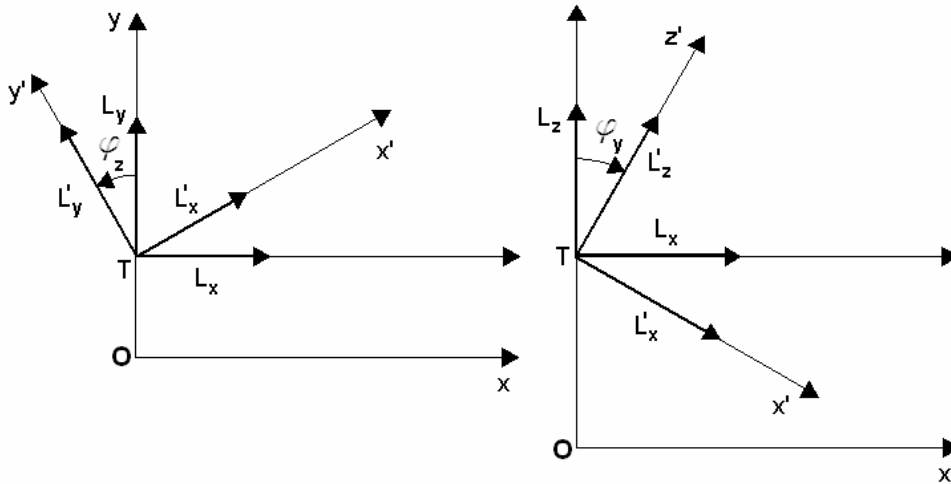
$$m\ddot{y}_T = F_{ky}, \quad (4.5)$$

$$m\ddot{z}_T = F_{kz} - mg, \quad (4.6)$$

které s využitím substitucí (3.3) a (3.4) lze přepsat do tvaru

$$m\ddot{y} = F_{ky} + me_T\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.7)$$

$$m\ddot{z} = F_{kz} + me_T\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg. \quad (4.8)$$



Obrázek 4.2 – Momenty hybnosti

Momentové pohybové rovnice se odvodí pomocí druhé impulsové věty. Složky momentu hybnosti kotouče vzhledem k osám x' , y' , z' mají tvar

$$L'_x = J_A \omega, \quad (4.9)$$

$$L'_y = J_D \dot{\varphi}_y, \quad (4.10)$$

$$L'_z = J_D \dot{\varphi}_z. \quad (4.11)$$

L'_x, L'_y, L'_z jsou složky momentu hybnosti kotouče vzhledem k osám x' , y' , z' , J_A, J_D jsou momenty setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho rotační a průměrové ose a φ_y, φ_z jsou úhly natočení kotouče kolem os y a z . Za předpokladu malých deformací lze vyjádřit složky momentu hybnosti kotouče v nepohyblivé souřadné soustavě $Oxyz$ (obrázek 4.2)

$$L_y = L'_y + L'_x \varphi_z, \quad (4.12)$$

$$L_z = L'_z - L'_x \varphi_y. \quad (4.13)$$

S využitím (4.9) - (4.11) přecházejí vztahy (4.12) a (4.13) na tvar

$$L_y = J_D \dot{\varphi}_y + \omega J_A \varphi_z, \quad (4.14)$$

$$L_z = J_D \dot{\varphi}_z - \omega J_A \varphi_y. \quad (4.15)$$

ω je úhlová rychlost otáčení rotoru.

Podle druhé impulsové věty, která říká, že časová změna momentu hybnosti kotouče je rovna součtu momentů všech vnějších sil, které na něj působí, platí

$$\frac{dL_y}{dt} = M_{ky}, \quad (4.16)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{kz}. \quad (4.17)$$

M_{ky} , M_{Kz} jsou složky momentu elastické síly, kterou působí pružně deformovaný hřídel na kotouč.

Po provedení derivací nabývají momentové pohybové rovnice tvar

$$J_D \ddot{\varphi}_y + \omega J_A \dot{\varphi}_z = M_{ky}, \quad (4.18)$$

$$J_D \ddot{\varphi}_z - \omega J_A \dot{\varphi}_y = M_{kz}. \quad (4.19)$$

Síly a momenty působící na kotouč od pružné deformace hřídele závisejí na jeho deformačních posuvech a natočeních. Platí

$$F_{ky} = -k_{11}y + k_{12}\varphi_z, \quad (4.20)$$

$$M_{kz} = k_{21}y - k_{22}\varphi_z, \quad (4.21)$$

$$F_{kz} = -k_{11}z - k_{12}\varphi_y, \quad (4.22)$$

$$M_{ky} = -k_{21}z - k_{22}\varphi_y. \quad (4.22)$$

k_{11} , k_{12} , k_{21} a k_{22} jsou tuhostní součinitele. Jejich velikost lze určit např. použitím Castiglianovy věty.

Po dosazení za složky pružných sil a momentů z (4.20) – (4.22) do (4.7), (4.8), (4.18), (4.19) a po jednoduché úpravě nabývají silové a momentové pohybové rovnice tvar

$$m\ddot{y} + k_{11}y - k_{12}\varphi_z = me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.23)$$

$$J_D \ddot{\varphi}_z - \omega J_A \dot{\varphi}_y - k_{21}y + k_{22}\varphi_z = 0, \quad (4.24)$$

$$m\ddot{z} + k_{11}z + k_{12}\varphi_y = me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg, \quad (4.25)$$

$$J_D \ddot{\varphi}_y + \omega J_A \dot{\varphi}_z + k_{21}z + k_{22}\varphi_y = 0. \quad (4.26)$$

Soustavu pohybových rovnic kotouče lze pak zapsat i pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_z \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi_z \\ z \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \\ me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

nebo také

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.28)$$

\mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, gyroskopických účinků a tuhosti rotoru, \mathbf{x} je vektor zobecněných posuvů a \mathbf{f} je vektor zobecněných sil. Matice gyroskopických účinků je čtvercová řádu čtyři a její struktura je antisymetrická.

4.2 Analýza volného kmitání

Volné kmitání zkoumaného rotoru je popsáno pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

kde $\mathbf{0}$ je nulový vektor.

Výpočet vlastních čísel soustavy vede k řešení charakteristické rovnice

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\omega\mathbf{G} + \mathbf{K}) = 0, \quad (4.30)$$

která po konkretizaci nabývá tvaru

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m + k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{21} & \lambda^2 J_D + k_{22} & 0 & -\lambda\omega J_A \\ 0 & 0 & \lambda^2 m + k_{11} & k_{12} \\ 0 & \lambda\omega J_A & k_{21} & \lambda^2 J_D + k_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

Z rovnic (4.30) a (4.31) je patrné, že vlastní čísla λ nejsou konstantní, ale závisí na úhlové rychlosti otáčení rotoru. Výkon P_{GYR} obecných sil odpovídajících gyroskopickým účinkům

$$P_{GYR} = \omega\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} \quad (4.32)$$

je nulový, což je dáno antisymetrickou strukturou matice gyroskopických účinků. Z toho plyne, že tyto obecné síly nevedou k disipaci mechanické energie (na rozdíl od tlumení), a proto se zkoumaný rotor chová jako netlumený. Vlastní čísla budou tedy všechna komplexní (komplexně sdružená) s nulovou reálnou částí

$$\lambda = \pm i\Omega, \quad (4.33)$$

kde i je imaginární jednotka a Ω je vlastní kruhová frekvence (v tomto případě netlumená).

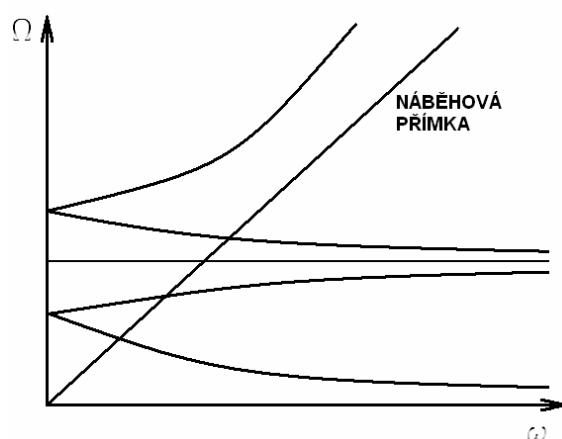
Charakteristická rovnice je polynomickou rovnicí osmého řádu

$$a_8\lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (4.34)$$

kde a_0, a_1, \dots, a_8 jsou reálné koeficienty charakteristického polynomu.

Protože všechna vlastní čísla mají nulové reálné části, je zkoumaná soustava na mezi stability (není nestabilní).

Závislost vlastních kruhových frekvencí Ω na úhlové rychlosti otáčení rotoru znázorňuje Campbellův diagram (obrázek 4.3). Přímka, která tvoří osu prvního kvadrantu, se nazývá náběhová přímka.



Obrázek x.3 – Campbellův diagram

Gyroskopické účinky vedou k rozštěpení závislostí vlastních kruhových frekvencí na úhlové rychlosti otáčení rotoru. Vlastní frekvence odpovídající souběžnému pohybu se s rostoucí rychlostí rotoru zvyšují, což odpovídá postupnému vyztužování rotoru (jako by se tuhost rotoru zvyšovala).

4.3 Analýza vynuceného kmitání - ustálená složka odezvy na buzení nevývahou

S využitím vztahů pro goniometrické funkce sinus a kosinus součtu argumentů lze pravou stranu pohybové rovnice (4.27) vyjádřit

$$\begin{bmatrix} me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \\ me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me_T \omega^2 (\cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0) \\ 0 \\ me_T \omega^2 (\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

nebo také

$$\begin{bmatrix} me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \\ me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me_T \omega^2 \cos \varphi_0 \\ 0 \\ me_T \omega^2 \sin \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t + \begin{bmatrix} -me_T \omega^2 \sin \varphi_0 \\ 0 \\ me_T \omega^2 \cos \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Pohybovou rovnici (4.28) lze pak s ohledem na (4.36) přepsat

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}_C \cos \omega t + \mathbf{f}_S \sin \omega t + \mathbf{f}_G \quad (4.37)$$

a stálenou složku vynuceného kmitání (t.j. partikulární integrál pohybové rovnice) očekávat podle pravé strany takto upravené rovnice ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_C \cos \omega t + \mathbf{x}_S \sin \omega t + \mathbf{x}_G \quad (4.38)$$

Následně se provede :

- první a druhá derivace očekávaného řešení podle času,
- dosadí se nultá, první a druhá derivace očekávaného řešení do pohybové rovnice (4.37),
- porovnájí se koeficienty úměrnosti u stejných goniometrických funkcí na levé a pravé straně rovnice (4.37).

Tím se získá soustava tří maticových rovnic

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_G = \mathbf{f}_G, \quad (4.39)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x}_C + \omega^2 \mathbf{G}\mathbf{x}_S = \mathbf{f}_C, \quad (4.40)$$

$$-\omega^2 \mathbf{G}\mathbf{x}_C + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x}_S = \mathbf{f}_S. \quad (4.41)$$

Rovnice (4.40) a (4.41) lze vyjádřit kompaktním maticovým zápisem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \omega^2 \mathbf{G} \\ -\omega^2 \mathbf{G} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C \\ \mathbf{f}_S \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Z řešení soustavy rovnic (4.39) - (4.41) se získají prvky vektorů \mathbf{x}_C , \mathbf{x}_S a \mathbf{x}_G . Z nich se pak stanoví vztahy pro jednotlivé zobecněné deformační posuvy

$$x_j = x_{Aj} \sin(\omega t + \varphi_{xj}) \quad \text{pro } j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.43)$$

kde

$$x_{Aj} = \sqrt{x_{Cj}^2 + x_{Sj}^2}, \quad (4.44)$$

$$\text{tg } \varphi_{xj} = \frac{x_{Cj}}{x_{Sj}}, \quad \varphi_{xj} \in \langle \pi; 2\pi \rangle \quad (4.45)$$

x_{Cj} , x_{Sj} jsou j -té prvky vektorů \mathbf{x}_C , \mathbf{x}_S , x_{Aj} je amplituda j -tého zobecněného deformačního posuvu (posuvu středu kotouče nebo natočení kotouče) a φ_{xj} je fázový posuv jeho časového průběhu.

Rovnice (4.42) může být přepsána do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\omega^2 \mathbf{G} i \\ -\omega^2 \mathbf{G} i & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_C \\ i \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C \\ i \mathbf{f}_S \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

kde i je imaginární jednotka. To také odpovídá zápisu

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{G} i)(\mathbf{x}_C + i \mathbf{x}_S) = \mathbf{f}_C + i \mathbf{f}_S. \quad (4.47)$$

Z Cramerova pravidla plyne, že výchylka bude maximální (nekonečně velká), když matice soustavy bude singularní, t.j. když se rotor bude otáčet takovou úhlovou rychlostí ω_{KR} (kritickou úhlovou rychlostí), že determinant matice soustavy bude nulový

$$\det(\mathbf{K} - \omega_{KR}^2 \mathbf{M} - \omega_{KR}^2 \mathbf{G} i) = 0. \quad (4.48)$$

Stodolův rotor s absolutně tuhým uložením a buzený pouze nevyváhou kotouče může mít jednu nebo dvojí kritické otáčky.



Shrnutí pojmů

Hlavní pojmy kapitoly 3 : gyroskopické účinky, Campbellův diagram.



Otázky

12. Odvoďte pohybovou rovnici Stodolova rotoru uloženého v absolutně tuhých ložiskách.
13. Jak závisí vlastní frekvence Stodolova rotoru na úhlové rychlosti jeho otáčení a co je to Campbellův diagram ?
14. Stanovte ustálenou složku kmitání Stodolova rotoru uloženého v absolutně tuhých ložiskách buzeného nevyváhou kotouče.

5 DYNAMIKA ROTORŮ S HYDRODYNAMICKÝMI LOŽISKY



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budou studenti znát

- ✚ konstrukční uspořádání hydrodynamických ložisek, jejich základní vlastnosti a princip činnosti
- ✚ základy klasické reorie mazání
- ✚ způsob stanovení ložiskových sil a tuhostních a tlumicích parametrů hydrodynamických ložisek
- ✚ pohybovou rovnici absolutně tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách
- ✚ způsob posouzení stability pohybu absolutně tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách

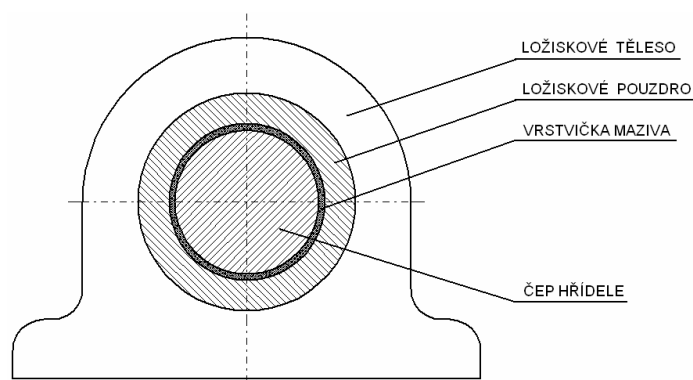


Výklad:

Radiální hydrodynamická ložiska jsou vazbové prvky sloužící k uložení rotoru a k zachycení sil působících mezi rotorem a stacionární částí v radiální směru (obrázek 5.1). Skládají se ze dvou hlavních částí (obrázek 5.2), z ložiskového tělesa (stacionární části) a z čepu hřídele (rotující části). Mazací olej přiváděný do ložiska vytváří vrstvičku, která obě části od sebe odděluje. Do ložiskového tělesa je vloženo a zajištěno proti pootočení a posunutí ložiskové pouzdro, které má tvar dutého válce a ve kterém se otáčí čep hřídele. Pouzdra se vyrábějí z materiálů zlepšujících kluzné vlastnosti povrchů vzájemně oddělených kapalinovou vrstvičkou. Tvar otvoru příčného průřezu ložiskového pouzdra významně určuje vlastnosti hydrodynamického ložiska. Základem je tvar kruhový (válcová ložiska), ale zejména u ložisek pro vysokorychlostní rotory může být i značně složitější (např. citronová ložiska).



Obrázek 5.1 - Radiální hydrodynamické ložisko



Obrázek 5.2 - Hlavní části radiálního hydrodynamického ložiska

Do hydrodynamického ložiska se přivádí mazací olej pod určitým tlakem. Jestliže se rotor neotáčí, leží čep hřídele na ložiskovém kroužku. Mazivo je viskózní, a proto přilíná k oběma ložiskovým povrchům (povrchu čepu hřídele a ložiskového kroužku). Začne-li se rotor otáčet, dojde v důsledku přilínání maziva k povrchu čepu hřídele k jeho vtláčování mezi čep a ložiskový kroužek a k postupnému oddalování obou povrchů. Při malých rychlostech otáčení dochází k meznímu mazání, mazací vrstvička mezi oběma povrchy není souvislá, povrchy se vzájemně dotýkají vrcholky svých povrchových nerovností. Při dosažení jisté úhlové rychlosti otáčení dojde k úplnému oddělení obou povrchů a mazání mezní přechází v mazání kapalinné. Čep hřídele pak zaujme excentrickou polohu vzhledem k ložiskovému tělesu a šířka mezery mezi čepem hřídele a ložiskovým pouzdrům se po obvodu ložiska mění, a to i když je průřez otvoru v ložiskovém tělese kruhový.

Otáčející se čep vtláčuje mazivo do zužující se části ložiskové mezery, což vede k nárůstu tlaku v této části olejového filmu a ke vzniku síly umožňující oddělení obou těles. Tato síla je pak v rovnováze se silou, kterou působí čep hřídele na stacionární část rotorové soustavy v důsledku vnějšího zatížení rotoru a jeho setrvačných účinků. Vzniku tlakového nárůstu v ložiskové mezeře, který je způsoben vtláčování maziva mezi čep hřídele a pouzdro ložiska v důsledku jeho přilínání k povrchu čepu, se říká hydrodynamický jev.

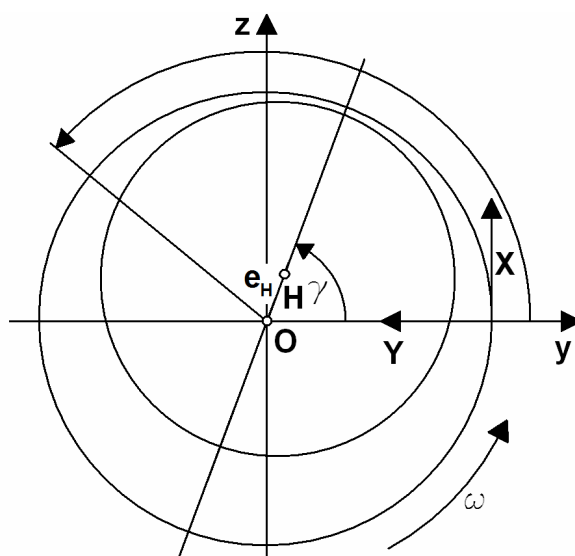
Hydrodynamická ložiska se vyznačují poddajností a tlumením, které jsou mnohem větší než u ložisek valivých. Mají vysokou únosnost a malou hlučnost. Jejich odpory proti otáčení jsou však větší. K nevýhodám hydrodynamických ložisek patří, že při překročení mezní úhlové rychlosti otáčení rotoru jsou příčinou vzniku jeho subharmonického nebo samobuzeného kmitání, které se vyznačuje velkou amplitudou kmitání, kdy excentricita čepu hřídele se blíží šířce ložiskové mezery. Další nevýhodou je, že poškození nebo porušení hydrodynamických ložisek se předem neprojevuje zvýšenou hlučností nebo vysokofrekvenčním kmitáním, jako je tomu u ložisek valivých. Proto je obtížné jejich poruchy předem detekovat, což vede k možnosti jejich náhlého selhání. I když obecně hydrodynamická ložiska nacházejí široké uplatnění u řady rotačních strojů, nepoužívají se z těchto důvodů u zařízení, jejichž náhlé selhání by mělo závažné následky (např. k uložení rotorů leteckých motorů).

5.1 Základy klasické teorie hydrodynamických ložisek

Klasická teorie hydrodynamických ložisek je založena na několika předpokladech :

- čep hřídele a ložiskové pouzdro jsou absolutně tuhé,
- jejich povrchy jsou absolutně hladké,
- čep hřídele je válcový, rotačně symetrický, kruhového průřezu,
- příčný průřez otvoru v ložiskovém pouzdře je obecného tvaru,
- tvar ložiskové mezery se v axiálním směru nemění,
- šířka ložiskové mezery (tloušťka olejového filmu) je velmi malá vzhledem k poloměru čepu hřídele,
- mazivo je Newtonovská kapalina,
- proudění maziva v ložiskové mezeře je laminární a isotermické,
- tlak maziva se v radiálním směru nemění,
- setrvačné účinky maziva jsou nevýznamné,
- vliv zakřivení olejového filmu je nevýznamný.

Zavedené souřadné soustavy jsou patrné z obrázku 5.3. Pro popis polohy středu čepu hřídele je zvolena souřadná soustava xyz s počátkem v bodě O. φ je obvodová souřadnice, e_H je excentricita středu čepu hřídele a γ je úhel spojnice středů. Parametry e_H a γ lze stanovit z deformačních posuvů středu čepu hřídele.



Obrázek 5.3 – Souřadné soustavy

K popisu tlakového rozložení v olejovém filmu je použita souřadná soustava XYZ. Osa X má směr obvodový, osa Y směr radiální a osa Z směr axiální. Rovina XY je kolmá k ose ložiska a leží uprostřed jeho délky.

Za uvedených předpokladů je tlakové rozložení v mazacím filmu popsáno Reynoldsovou rovnicí

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 6\omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (5.1)$$

p je tlak, R je poloměr čepu hřídele, h je šířka mezery (tloušťka olejového filmu) a η je dynamická viskozita maziva. K provedení řešení Reynoldsovy rovnice je nutno znát okrajové podmínky. Ty zpravidla udávají velikost tlaku oleje v místech jeho přívodů do ložiskové mezery a velikost tlaku na okrajích ložiska, který je roven tlaku v okolním prostoru, zpravidla atmosférickému.

Vztah pro šířku mezery při excentrické poloze středu čepu hřídele, což také odpovídá tloušťce olejového filmu v daném místě, v závislosti na obvodové souřadnici φ lze stanovit po geometrickém rozboru ze vztahu

$$h(\varphi) = c(\varphi) - e_H \cos(\varphi - \gamma). \quad (5.2)$$

c je šřka ložiskové mezery při centrické poloze středu čepu hřídele. U válcových ložisek je c konstantní, u ložisek se složitějším tvarem průřezu otvoru v ložiskovém tělese je funkcí obvodové souřadnice. Vztah (5.2) platí za předpokladu, že čep hřídele se v ložisku pouze posune v radiálním směru a že nedojde k natočení čepu hřídele. Kdyby došlo také k jeho natočení, vztah (5.2) by byl složitější a šířka h by byla navíc funkcí axiální souřadnice Z .

Reynoldsovu rovnici (5.1) lze při splnění jistých podmínek zjednodušit. U krátkého ložiska (ložiska, u kterého poměr délky k jeho poloměru malý, menší než asi 0,5), je tlakový spád v obvodovém směru mnohem menší než ve směru axiálním

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} \ll \frac{\partial p}{\partial Z}, \quad (5.3)$$

a proto první člen na levé straně rovnice (5.1) může být zanedbán. Reynoldsova rovnice pro krátké ložisko pak nabývá tvaru

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 6\omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (5.4)$$

U dlouhého ložiska (ložiska, u kterého poměr délky k jeho poměru je velký, větší než asi 0,5), je tlakový spád v axiálním směru mnohem menší než ve směru obvodovém

$$\frac{\partial p}{\partial Z} \ll \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (5.5)$$

a proto lze zanedbat druhý člen na levé straně rovnice (5.1). Reynoldsova rovnice pro dlouhé ložisko pak má tvar

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = 6\omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (5.6)$$

Výhodou zjednodušených Reynoldsových rovnic je, že jejich řešení lze získat v uzavřeném tvaru.

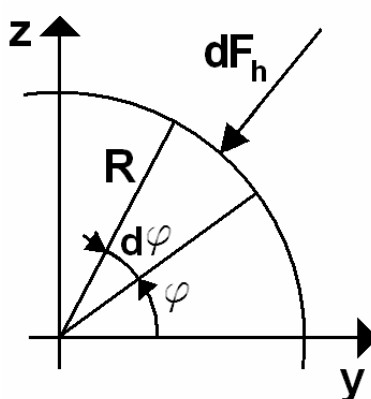
V místech v olejovém filmu, kde tlak poklesne na mezní hodnotu, dojde ke kavitaci. Kavitace je složitý komplex dějů, při nichž dochází k uvolňování plynů (hlavně vzduchu) rozpuštěných v mazivu a k varu oleje. V těchto oblastech Reynoldsova rovnice přestává platit. Měření ukázala, že tlak média v kavitované oblasti zůstává přibližně konstantní.

Pro tlakové rozložení p_D v mezeře ložiska s uvažováním kavitace pak na nejnižší úrovni rozlišení platí

$$p_D = p \quad \text{pro} \quad p \geq p_{CAV}, \quad (5.7)$$

$$p_D = p_{CAV} \quad \text{pro} \quad p < p_{CAV}, \quad (5.8)$$

kde p_{CAV} je tlak média v kavitované oblasti a p je tlak získaný z řešení Reynoldsovy rovnice.



Obrázek 5.4 – Elemenární hydraulická síla

Složky elementární hydraulické síly F_{hy} , F_{hz} , kterými působí mazivo na čep hřídele v místě určeném úhlovou souřadnicí φ a axiální souřadnicí Z , a elementární plošku dS , na kterou působí, lze na základě obrázku 5.4 vyjádřit vztahy

$$dF_{hy} = -p_D dS \cos \varphi, \quad (5.9)$$

$$dF_{hz} = -p_D dS \sin \varphi, \quad (5.10)$$

$$dS = R d\varphi dZ. \quad (5.11)$$

Složky celkové hydraulické síly, kterou působí vrstvička maziva na čep hřídele, se pak počítají integrací tlakového rozložení po obvodu a po délce ložiska

$$F_{hy} = -R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_D \cos \varphi d\varphi dZ, \quad (5.12)$$

$$F_{hz} = -R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_D \sin \varphi d\varphi dZ. \quad (5.13)$$

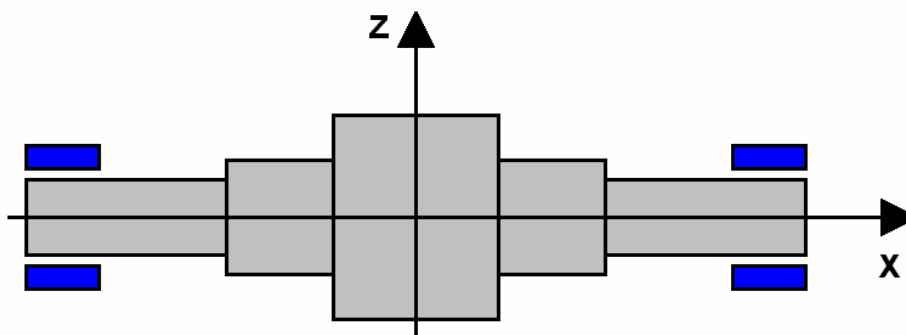
V případě ložisek krátkých a dlouhých nekavitovaných a kavitovaných s úhlovým rozsahem kavitované oblasti mezi γ a $\gamma + \pi$ lze vztahy pro integrály (5.12), (5.13) získat v uzavřeném tvaru.

Složky hydraulické síly závisí na tloušťce olejového filmu, která je podle (5.2) funkcí posunutí středu čepu hřídele, a na její časové změně, která je navíc funkcí složek jeho rychlosti. Proto na stejných veličinách (t.j. deformačních posuvech a složkách rychlostí středu čepu hřídele) závisí i složky hydraulické síly F_{hy} , F_{hz} .

5.2 Dynamika absolutně tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách

Předpokládá se (obrázek 5.5), že

- zkoumaný rotor je absolutně tuhý,
- je uložen ve dvou hydrodynamických ložiskách,
- otáčí se konstantní úhlovou rychlostí,
- je zatížen vlastní tíhou a nevyváhou,
- celá soustava je symetrická vzhledem k rovině kolmé k ose rotoru.



Obrázek 5.5 – Schéma absolutně tuhého rotoru uloženému v hydrodynamických ložiskách

Souřadná soustava je zvolena tak, že osy y (vodorovná) a z (svislá) leží v rovině symetrie soustavy a osa x je totožná se spojnicí středů ložisek. Pohybové rovnice zkoumaného rotoru pak mají tvar

$$m\ddot{y}_T = 2F_{hy}, \quad (5.14)$$

$$m\ddot{z}_T = 2F_{hz} - mg. \quad (5.15)$$

S přihlédnutím k (3.3) a (3.4) je lze přepsat

$$m\ddot{y} = 2F_{hy} + me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.16)$$

$$m\ddot{z} = 2F_{hz} + me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg. \quad (5.17)$$

m je hmotnost rotoru, y, z jsou deformační posuvy jeho středu a y_T, z_T jeho těžiště ve směrech os y a z .

Protože soustava je symetrická a rotor je absolutně tuhý, posuvy středu rotoru a středů obou jeho čepů jsou stejné. Z toho plyne, že i složky hydraulických sil jsou proto funkcí deformačních posuvů a složek rychlostí y, z, \dot{y}, \dot{z}

$$F_{hy} = F_{hy}(y, z, \dot{y}, \dot{z}), \quad (5.18)$$

$$F_{hz} = F_{hz}(y, z, \dot{y}, \dot{z}). \quad (5.19)$$

Stanovení souřadnic rovnovážné polohy rotoru y_0, z_0 vede na řešení soustavy dvou nelineárních algebraických rovnic, které se získají z pohybových rovnic (5.16) a (5.17) za předpokladu nulových rychlostí a zrychlení a působení pouze časově neproměnných sil

$$2F_{hy}(y_0, z_0) = 0, \quad (5.20)$$

$$2F_{hz}(y_0, z_0) - mg = 0. \quad (5.21)$$

Za předpokladu, že časová změna posuvů a rychlostí středu rotoru není velká, lze provést linearizaci parametrů soustavy. Složky hydraulických sil F_{hy} a F_{hz} se rozvinou do Taylorovy řady v okolí rovnovážné polohy, který je charakterizován stavem S : deformační posuvy středu čepu hřídele y_0, z_0 a nulové složky jeho rychlosti. Pak platí

$$F_{hy}(y, z, \dot{y}, \dot{z}) = F_{hy0} + \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial \dot{y}} \right]_S \dot{y} + \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial \dot{z}} \right]_S \dot{z} + \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial y} \right]_S (y - y_0) + \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial z} \right]_S (z - z_0) + \dots, \quad (5.22)$$

$$F_{hz}(y, z, \dot{y}, \dot{z}) = F_{hz0} + \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial \dot{y}} \right]_S \dot{y} + \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial \dot{z}} \right]_S \dot{z} + \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial y} \right]_S (y - y_0) + \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial z} \right]_S (z - z_0) + \dots, \quad (5.23)$$

kde

$$F_{hy0} = F_{hy}(y_0, z_0, 0, 0), \quad (5.24)$$

$$F_{hz0} = F_{hz}(y_0, z_0, 0, 0). \quad (5.25)$$

Protože se předpokládá, že časová změna posuvů a rychlostí středu rotoru je malá, lze členy druhého a vyšších řádů v Taylorových rozvojech (5.22) a (5.23) zanedbat. S tímto ohledem po dosazení (5.22) a (5.23) do (5.14) a (5.15) nabývají pohybové rovnice zkoumaného rotoru tvaru

$$m\ddot{y} = 2F_{hy0} + 2 \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial \dot{y}} \right]_S \dot{y} + 2 \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial \dot{z}} \right]_S \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial y} \right]_S (y - y_0) + 2 \left[\frac{\partial F_{hy}}{\partial z} \right]_S (z - z_0) + me_T \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.26)$$

$$m\ddot{z} = 2F_{hz0} + 2 \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial \dot{y}} \right]_S \dot{y} + 2 \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial \dot{z}} \right]_S \dot{z} + 2 \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial y} \right]_S (y - y_0) + 2 \left[\frac{\partial F_{hz}}{\partial z} \right]_S (z - z_0) + me_T \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg. \quad (5.27)$$

Zavedením vhodných substitucí za parciální derivace přecházejí (5.26) a (5.27) na tvar

$$m\ddot{y} = 2F_{hy0} - 2b_{yy}\dot{y} - 2b_{yz}\dot{z} - 2k_{yy}(y - y_0) - 2k_{yz}(z - z_0) + me_T\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.28)$$

$$m\ddot{z} = 2F_{hz0} - 2b_{zy}\dot{y} - 2b_{zz}\dot{z} - 2k_{zy}(y - y_0) - 2k_{zz}(z - z_0) + me_T\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg. \quad (5.29)$$

Rovnice (5.28) a (5.29) lze dále upravit

$$m\ddot{y} + 2b_{yy}\dot{y} + 2b_{yz}\dot{z} + 2k_{yy}y + 2k_{yz}z = 2F_{hy0} + 2k_{yy}y_0 + 2k_{yz}z_0 + me_T\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.30)$$

$$m\ddot{z} + 2b_{zy}\dot{y} + 2b_{zz}\dot{z} + 2k_{zy}y + 2k_{zz}z = 2F_{hz0} + 2k_{zy}y_0 + 2k_{zz}z_0 + me_T\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg \quad (5.31)$$

a následně vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} F_{hy0} \\ F_{hz0} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} me_T\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ me_T\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - mg \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + 2\mathbf{B}_L\dot{\mathbf{x}} + 2\mathbf{K}_L\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5.33)$$

Matice \mathbf{M} je matice hmotnosti rotoru, matice \mathbf{B}_L , \mathbf{K}_L jsou matice tlumení a tuhosti hydrodynamického ložiska. K základním charakteristikám matic \mathbf{B}_L , \mathbf{K}_L patří, že jsou reálné, čtvercové, plné a nesymetrické. Obecně nejsou pozitivně definitní ani semidefinitní. Důležitou vlastností prvků matic tlumení a tuhosti hydrodynamických ložisek je, že závisejí na úhlové rychlosti otáčení rotoru. Struktura těchto matic je obrazem vlastností hydrodynamických ložisek, které jsou příčinou řady jejich nežádoucích vlivů na chování rotorů.

Ke stanovení prvků matic tlumení a tuhosti hydrodynamických ložisek lze použít postup založený na použití Reynoldsovy rovnice. Další možností je využití podobnosti ložisek. Zjistilo se, že ložiska, která mají stejné Sommerfeldovo číslo vykazují podobné chování.

Sommerfeldovo číslo je definováno

$$So = \frac{F_{st}\psi^2}{LD\eta\omega}, \quad (5.34)$$

$$\psi = \frac{2c}{D}. \quad (5.35)$$

F_{st} je stacionární síla zatěžující ložisko, L , D jsou délka a průměr ložiskového otvoru a c je šířka ložiskové mezery.

Na základě měření byly získány závislosti bezrozměrných tuhostních a tlumicích koeficientů κ_{ij} , β_{ij} na Sommerfeldově čísle

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(So),$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}(So)$$

pro $i, j \in \{y, z\}$. Z nich pak lze spočítat prvky matic tuhosti a tlumení

$$\kappa_{ij} = k_{ij} \frac{So c}{F_{st}}, \quad (5.36)$$

$$\beta_{ij} = b_{ij} \frac{So c \omega}{F_{st}}. \quad (5.37)$$

Stabilitu rovnovážné polohy rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách lze posoudit podle znamének reálné části jeho vlastních čísel nebo použitím stabilitních kritérií.

Výpočet vlastních čísel vede k řešení frekvenční rovnice

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + 2\lambda \mathbf{B}_L + 2\mathbf{K}_L) = 0, \quad (5.38)$$

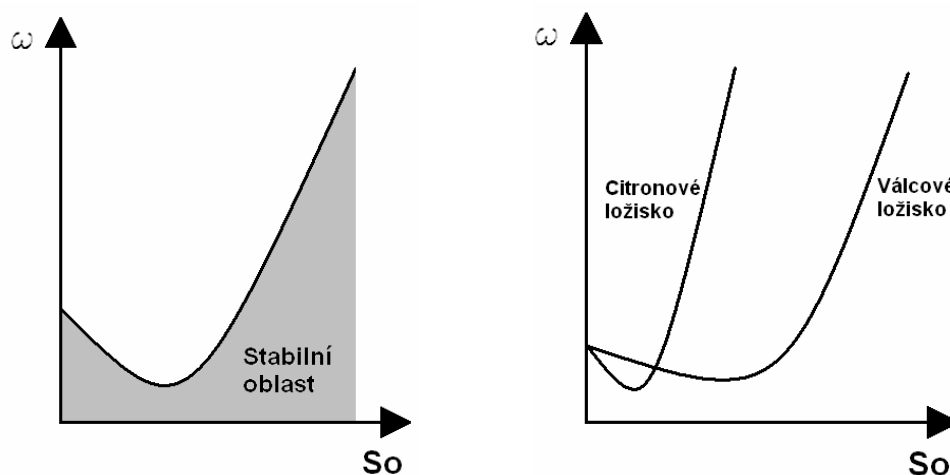
která po konkretizaci matic \mathbf{M} , \mathbf{B}_L , \mathbf{K}_L nabývá tvar

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + 2b_{yy}\lambda + 2k_{yy} & 2b_{yz}\lambda + 2k_{yz} \\ 2b_{zy}\lambda + 2k_{zy} & m\lambda^2 + 2b_{zz}\lambda + 2k_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.39)$$

Po roznásobení determinantu v (5.39) se dospívá k charakteristické rovnici

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (5.40)$$

kde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 jsou její koeficienty. Řešením charakteristické rovnice se získají vlastní čísla, která jsou reálná nebo komplexní. Stabilita se pak posuzuje podle jejich znamének nebo znaménka jejich reálných částí. Protože jsou známy koeficienty charakteristické rovnice, lze k posouzení stability použít také některého ze stabilitních kritérií (např. kritérium Routh-Hurwitzovo).



Obrázek 5.6 – Stabilitní diagram

K posuzování stability rovnovážné polohy rotorů s hydrodynamickými ložisky slouží stabilitní diagramy získané pomocí výpočetních simulací nebo na základě měření. Jsou to křivky mezní hodnoty úhlové rychlosti otáčení rotoru v závislosti na Sommerfeldově čísle, při jejímž překročení se rovnovážná poloha stává nestabilní.

Z rozboru stabilitních diagramů vyplývá, že hranice stability (úhlová rychlost otáčení rotoru) vzrůstá s rostoucí velikostí stacionárního zatížení ložiska a s rostoucí šířkou ložiskové mezery.



Shrnutí pojmů

Hlavní pojmy kapitoly 3 : hydrodynamické ložisko, Reynoldsova rovnice, klasická teorie mazání, hydrodynamický jev, absolutně tuhý rotor, Sommerfeldovo číslo, stabilitní diagramy.



Otázky

15. Popište hydrodynamické ložisko.
16. Jaké jsou předpoklady klasické teorie hydrodynamického mazání ?
17. Vysvětlete způsob výpočtu tlakového rozložení v olejové vrstvě a složek ložiskových sil.
18. Odvoďte pohybovou rovnici absolutně tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách.
19. Co je to Sommerfeldovo číslo a k čemu se používá ?
20. Vysvětlete způsob posouzení stability rovnovážné polohy tuhého rotoru uloženého v hydrodynamických ložiskách.

6 LITERATURA



Další zdroje

GASCH R., PFÜTZNER H.: *Dynamika rotorů*, SNTL, Praha 1980

SLAVÍK J., STEJSKAL V., ZEMAN V.: *Základy dynamiky strojů*, ČVUT Praha, Praha 1997

STRADIOT J. A KOL.: *Dynamika strojov*, ALFA, Bratislava 1991

ZAPOMĚL J.: *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložiskách a squeeze filmových tlumičích*, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Ostrava 2007