



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní



APLIKOVANÝ MECHANIK JAKO SOUČÁST TÝMU KONSTRUKTÉRŮ A VÝVOJÁŘŮ: ČÁST MODÁLNÍ ZKOUŠKY

Studijní opora

Alena Bilošová

Ostrava 2012



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu OP VK CZ.1.07/2.3.00/09.0147 „Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu“.

Název: Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů:
část Modální zkoušky

Autor: Mgr. Ing. Alena Bilošová, Ph.D.

Vydání: první, 2012

Počet stran: 129

Náklad:

Studijní materiály pro studijní obor Aplikovaná mechanika Fakulty strojní

Jazyková korektura: nebyla provedena



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu

Číslo: CZ.1.07/2.3.00/09.0147

Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© Alena Bilošová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2758-2

POKYNY KE STUDIU

Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Modální zkoušky

Pro předmět Experimentální modální analýza, který je zařazen ve 2. semestru navazujícího studia oboru Aplikovaná mechanika jste obdrželi skriptum, které vás seznámí s teorií a praxí modálních zkoušek. Toto skriptum navazuje na skriptum vydané v rámci stejného projektu v roce 2011 a které bylo koncipováno jako návody pro týmová cvičení. Teoretické otázky, které byly v předchozím textu pouze nastíněny, jsou zde probrány komplexně.

Prerekvizity

Pro studium této opory se předpokládá znalost na úrovni absolventa bakalářského programu Strojírenství, oboru Aplikovaná mechanika.

Cílem učební opory

Cílem je seznámení s teorií a praxí modálních zkoušek, což je oblast poměrně rozsáhlá a náročná jak na teoretické zázemí, tak na praktické dovednosti. Předpokládá se, že student je z předchozího studia dostatečně připraven k měření vibračních signálů a k jejich zpracování. Po prostudování opory bude student schopen posoudit, kdy řešení technického problému vyžaduje provedení modální zkoušky a bude schopen tuto zkoušku připravit, provést, vyhodnotit a její výsledky použít pro ladění teoretických, zejména konečnoprvkových modelů. Získá komplexní náhled na řešení mnoha problémů, se kterými se ve své budoucí technické praxi může setkat.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do magisterského studia oboru Aplikovaná mechanika studijního programu Strojní inženýrství, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:



Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden čas potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.



Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- Popsat ...
- Definovat ...
- Vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.



Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.



Shrnutí pojmů

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.



Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

Úspěšné a příjemné studium s tímto učebním textem Vám přeje autorka.

Alena Bilošová

OBSAH

PŘEDMLUVA	9
SEZNAM SYMBOLŮ	10
SEZNAM ZKRATEK	12
1 ÚVOD	13
1.1 Aplikace modálních zkoušek.....	14
1.2 Stručně o teorii modálních zkoušek.....	15
1.3 Různé typy frekvenčních odezvových funkcí.....	17
1.4 Stručně o měřících metodách.....	18
1.5 Stručně o analýze.....	19
2 DVOUKANÁLOVÁ ANALÝZA	21
2.1 Autospektrum.....	21
2.2 Křížové (vzájemné) spektrum (cross spectrum).....	22
2.3 Koherence.....	24
2.4 Deskriptory systému.....	26
2.4.1 Frekvenční odezвовá funkce (FRF - Frequency Response Function).....	27
2.4.2 Impulsní odezвовá funkce (IRF - Impulse Response Function).....	28
2.5 Vliv šumu na FRF.....	30
2.6 Digitální zpracování signálu.....	32
2.6.1 Chyba typu aliasing.....	34
2.6.2 Chyba únikem (leakage).....	36
2.6.3 Frekvenční lupa (zoom).....	39
2.6.4 Průměrování.....	40
3 TEORETICKÉ ZÁKLADY MODÁLNÍ ANALÝZY	43
3.1 Systém s jedním stupněm volnosti (SDOF).....	43
3.1.1 Netlumený systém s 1° volnosti.....	44
3.1.2 Systém s 1° volnosti s viskózním tlumením.....	45
3.1.2.1 Volné kmitání.....	45
3.1.2.2 Vynucené kmitání.....	47
3.1.2.3 Určení rezonančního naladění.....	52
3.1.2.4 Určování tlumení z grafů frekvenční odezвовé funkce.....	52

3.1.3	Systém s 1° volnosti s hysterézním (strukturním) tlumením	54
3.1.3.1	Vynucené kmitání	54
3.1.3.2	Určování tlumení z grafů frekvenční odezvosvé funkce	57
3.1.4	Různé formy FRF pro systém s 1° volnosti.....	58
3.1.5	Geometrické vlastnosti Nyquistova grafu.....	59
3.1.5.1	Pohyblivost systému s viskózním tlumením	60
3.1.5.2	Receptance systému s hysterézním tlumením.....	60
3.1.6	Odvození rezidua	61
3.2	Systém s více stupni volnosti (MDOF).....	62
3.2.1	Netlumený systém s více stupni volnosti	62
3.2.1.1	Volné kmitání	62
3.2.1.2	Ortogonalní vlastnosti vlastních vektorů	66
3.2.1.3	Normování vlastních tvarů.....	67
3.2.1.4	Odezvosvá analýza systému s více stupni volnosti	68
3.2.2	Charakteristiky a znázornění FRF dat s více stupni volnosti	70
3.2.3	Tlumený systém s více stupni volnosti.....	75
3.2.3.1	Proporcionální viskózní tlumení	75
3.2.3.2	Proporcionální hysterézní tlumení	77
3.2.3.3	Hysterézní tlumení - obecný případ	78
3.2.3.4	MDOF systém s obecným hysterézním tlumením - odezvosvá analýza	79
3.2.3.5	Systémy s více stupni volnosti - shrnutí pro různé typy tlumení	80
3.2.3.6	Buzení obecným silovým vektorem.....	81
3.2.3.7	Buzení vektorem soufázových sil	81
4	MODÁLNÍ ZKOUŠKA.....	84
4.1	Příprava.....	84
4.1.1	Příprava měřené struktury	84
4.1.1.1	Volné uložení	84
4.1.1.2	Pevné uložení	85
4.1.1.3	Uložení in situ	85
4.1.2	Příprava experimentálního modelu.....	85
4.2	Měření a měřicí metody	87
4.2.1	Základní sestava měření.....	88
4.2.1.1	Mechanismus buzení.....	89
4.2.1.2	Snímače k měření budící síly a odezvy	98

4.2.1.3	Analyzátor.....	99
4.2.2	Měření.....	99
4.2.2.1	Měření v referenčním bodě.....	101
4.3	Identifikace modálních parametrů	102
4.3.1	Metody aproximace systémem s 1° volnosti	102
4.3.1.1	Metoda špička-amplituda (sbírání špiček).....	103
4.3.1.2	Metoda aproximace kružnicí (circle-fit)	103
4.3.2	Metody aproximace systémem s více stupni volnosti.....	107
4.4	Modální model	108
4.4.1	Prezentace získaného modálního modelu	109
4.4.2	Kontrola získaného modálního modelu	111
4.4.3	Srovnání experimentálně získaného a výpočtového modálního modelu.....	112
4.4.3.1	Srovnání vlastních frekvencí.....	112
4.4.3.2	Grafické srovnání vlastních tvarů	114
4.4.3.3	Numerické srovnání vlastních tvarů	115
5	PROVOZNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA	119
5.1	Metody identifikace.....	122
5.2	Prezentace výstupů.....	124
	POUŽITÁ LITERATURA	129

PŘEDMLUVA

Milí studenti, tato studijní opora má za cíl vám přiblížit teorii a praxi modálních zkoušek. Jak už její název napovídá, jde o integrální část toho, co byste se za dobu svého studia měli naučit, abyste mohli být platným členem týmu odborníků řešícího složité technické problémy. S problematikou modálních zkoušek se seznamujete v předmětu nazvaném Experimentální modální analýza, který by se ale přesněji měl jmenovat Modální zkoušky. Modální zkoušky provádíme s cílem získat experimentálně – tedy měřením – modální parametry měřené struktury. Celá zkouška zahrnuje přípravu měřené struktury, vlastní měření a zpracování naměřených hodnot pomocí vhodných metod. Tato poslední fáze, jejíž výsledkem jsou získané modální parametry, je experimentální modální analýzou v pravém slova smyslu. Je analogií k modální analýze prováděné výpočtově, např. pomocí konečnoprvkových programů – vede jinou cestou ke stejným výsledkům.

Problematika modálních zkoušek je značně obsáhlá a k jejímu dokonalému zvládnutí je potřeba integrovat znalosti z různých oblastí: měření vibrací, zpracování signálů, matematické zpracování naměřených dat, kmitání systémů s více stupni volnosti s různými modely tlumení atp. Tato skripta si nekladou za cíl pojednat podrobně o všech aspektech modálních zkoušek, ale pouze seznámit vás s touto problematikou natolik, abyste byli schopni samostatně modální zkoušky provádět s vědomím problémů, které se při měření a zpracování naměřených dat mohou vyskytnout. Mým hlavním cílem je vytvořit ve vás povědomí o tom, co to modální zkouška je, k čemu je dobrá, a kdy byste měli o jejím provedení ve své inženýrské praxi uvažovat. Pozoruji, že důvěra mnohých k výsledkům získaným pomocí metody konečných prvků je někdy příliš vysoká a že si nejen studenti, ale ani zkušení inženýři mnohdy neuvědomují, že i výsledky získané pomocí velmi sofistikovaných konečnoprvkových programů se mohou od reality značně lišit - zpravidla v důsledku toho, že při použití těchto programů něco zanedbali nebo příliš zjednodušili. Proto je ověření a případné odladění konečnoprvkového modelu pomocí dat získaných experimentálně nanejvýš žádoucí a v některých oborech (např. v konstrukci letadel) dokonce nezbytné.

Základním pramenem pro napsání této studijní opory byla kniha prof. Davida Ewinse "Modal Analysis – theory, practice and application". Prof. Ewins působí na Imperial College of Science, Technology and Medicine v Londýně a je možné ho považovat za vůdčí osobnost v oblasti modální analýzy v Evropě. Četné pasáže těchto skript jsou v podstatě překladem vybraných kapitol z jeho knihy. Dále byly použity materiály firmy Brüel & Kjær, která dodává veškerou měřicí techniku pro provádění modálních zkoušek a poskytuje zákazníkům rovněž teoretickou podporu vydáváním četných publikací a pořádáním školení.

Přeji vám, aby čas, který věnujete studiu těchto skript, pro vás nebyl časem ztraceným, ale aby získané poznatky přispěly k vaší snaze stát se kompetentním a znalým strojním inženýrem.

SEZNAM SYMBOLŮ

$*$	komplexní doplněk
$[]^T$	transponovaná matice
$a(t)$	časový záznam v kanálu A
$A(f)$	okamžité spektrum kanálu A
$A(\omega)$	inertance (akceleration) $[\text{kg}^{-1}]$
b	konstanta viskózního tlumení $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$
$b(t)$	časový záznam v kanálu B
$B(f)$	okamžité spektrum kanálu B
$[B]$	matice viskózního tlumení $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$
F_b	tlumící síla $[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$\{F\}$	vektor komplexních amplitud budících sil $[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$\{f(t)\}$	vektor budících sil $[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
f	vlastní frekvence tlumeného kmitání $[\text{Hz}]$
f_0	vlastní frekvence netlumeného kmitání $[\text{Hz}]$
f_s	vzorkovací frekvence $[\text{Hz}]$
$G_{AA}(f)$	autospektrum kanálu A analyzátoru (jednostranné)
$G_{BB}(f)$	autospektrum kanálu B analyzátoru (jednostranné)
$G_{AB}(f)$	křížové spektrum z kanálu A do kanálu B analyzátoru (jednostranné)
$G_{BA}(f)$	křížové spektrum z kanálu B do kanálu A analyzátoru (jednostranné)
$h(t)$	impulsní odezvová funkce
$[H]$	matice hysterézního tlumení $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}]$
$H(\omega)$	frekvenční odezvová funkce (receptance, pohyblivost nebo inertance)
$H(s)$	přenosová funkce
$H_1(f)$	odhad frekvenční odezvové funkce
$H_2(f)$	odhad frekvenční odezvové funkce
i	imaginární jednotka
$[I]$	jednotková matice (diagonální)
k	tuhost $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}]$
$[K]$	matice tuhosti $[\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}]$
m	hmotnost $[\text{kg}]$
$[M]$	matice hmotnosti $[\text{kg}]$
N	počet stupňů volnosti

p	pól [s^{-1}]
$\{p\}$	vektor modálních souřadnic
R	reziduum [kg^{-1}]
$S_{AA}(f)$	autospektrum kanálu A analyzátoru (oboustranné)
$S_{BB}(f)$	autospektrum kanálu B analyzátoru (oboustranné)
$S_{AB}(f)$	křížové spektrum z kanálu A do kanálu B analyzátoru (oboustranné)
$S_{BA}(f)$	křížové spektrum z kanálu B do kanálu A analyzátoru (oboustranné)
t	čas [s]
T	perioda [s]
$T(f)$	přenositelnost, transmissibilita [-]
$\{X\}$	vektor komplexních amplitud výchylek [m]
$\{x(t)\}$	vektor výchylek [m]
$\{\dot{x}(t)\}, \{v(t)\}$	vektor rychlostí [$m \cdot s^{-1}$]
$\{\ddot{x}(t)\}, \{a(t)\}$	vektor zrychlení [$m \cdot s^{-2}$]
$Y(\omega)$	pohyblivost [$kg^{-1} \cdot s^1$]
$\alpha(\omega)$	receptance [$kg^{-1} \cdot s^2$]
δ	konstanta doznívání [s^{-1}]
Φ_j^r	j-tý prvek r-tého vlastního vektoru [-]
$\{\Phi\}^r$	r-tý vlastní vektor [-]
$[\Phi]$	modální matice (normalizovaná na jednotkovou hmotnost) [-]
γ	ztrátový koeficient hysterézního tlumení [-]
η	činitel naladění [-]
λ_r	vlastní číslo r-tého módu [s^{-1}]
τ	časová konstanta exponenciálního váhového okna [s]
υ	logaritmický dekrement [-]
ω	budící kruhová frekvence [s^{-1}]
Ω	vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání [s^{-1}]
Ω_0	vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání [s^{-1}]
$[\Psi]$	modální matice (nenormovaná) [-]
ζ	poměrný útlum [-]
$\gamma^2(f)$	funkce koherence [-]

SEZNAM ZKRATEK

COP	koherentní výstupní výkon (Coherence Output Power)
DFT	diskrétní Fourierova transformace (Discrete Fourier Transform)
DOF	stupeň volnosti (Degree of Freedom)
FDD	dekompozice ve frekvenční oblasti (Frequency Domain Decomposition)
FRF	frekvenční odezvová funkce (Frequency Response Function)
FFT	rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform)
IRF	impulsní odezvová funkce (Impulse Response Function)
MAC	kritérium modální věrohodnosti (Modal Assurance Criterion)
MDOF	systém s více stupni volnosti (Multi Degree of Freedom System)
MIMO	systém s více vstupy a více výstupy (Multiple Input Multiple Output)
MSF	faktor modálního měřítka (Modal Scale Factor)
ODS	provozní tvar kmitu (Operational Deflection Shape)
OMA	provozní modální analýza (Operational Modal Analysis)
PSD	výkonová spektrální hustota (Power Spectral Density)
SDOF	systém s jedním stupněm volnosti (Single Degree of Freedom System)
SISO	systém s 1 vstupem a 1 výstupem (Single Input Single Output)
SIMO	systém s 1 vstupem a více výstupy (Single Input Multiple Output)
SSI	identifikace v podprostoru (Stochastic Subspace Identification)
SVD	rozklad do singulárních hodnot (Singular Value Decomposition)

1 ÚVOD

V úvodu se stručně dozvíte, co to je modální zkouška a jak poznatky, které se teprve máte dozvědět, souvisejí s tím, co už víte. V předmětu Vibrační diagnostika jste se dozvěděli mnohé z oblasti vibrací. Na tyto znalosti navážeme, protože i modální zkoušky jsou založeny na měření vibrací. Z dalších předmětů máte více nebo méně ucelené znalosti o dynamických charakteristikách systémů (strojů, konstrukcí) a problematiku vibrací jste zvládli v předmětu Technické kmitání. O modální analýze jste zase slyšeli v rámci metody konečných prvků. Tyto všechny dosavadní poznatky využijeme a dále je rozšíříme s cílem propojit dovednosti v oblasti výpočtové a experimentální mechaniky. Také se v úvodu dozvíte, proč modální zkoušky provádíme a k čemu se dají experimentální výsledky využít.



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- ✚ Popsat rozdíl mezi analýzou signálů a analýzou systémů
- ✚ Definovat pojem modální zkouška
- ✚ Definovat frekvenční odezвовou funkci
- ✚ Popsat účel modální zkoušky



Výklad

Dříve než přistoupíme k oblasti samotného modálního zkoušení, je vhodné seznámit se s různými přístupy k měření vibrací. Z metodického i praktického hlediska je vhodné rozlišovat dva různé experimentální přístupy zabývající se vibracemi:

- 1) Určení povahy a úrovně vibračních odezev - **analýza signálů**
- 2) Získání nebo ověření teoretických modelů a předpokladů - **analýza systémů**

Těmto dvěma přístupům odpovídají i dva typy měření:

- ad 1) Měří se vibrační odezvy za provozních podmínek stroje nebo zkoumané struktury. Touto oblastí se zabývá vibrační diagnostika.
- ad 2) Struktura nebo součást je rozkmitána známými budícími účinky, často mimo své pracovní prostředí. Tento proces je podstatou modálních zkoušek. Je zřejmé, že při řízených podmínkách jsme schopni získat přesnější a detailnější informace o měřeném systému než při pouhém měření odezev.

V následujícím textu se budeme podrobně zabývat druhým přístupem. Provedením tzv. modální zkoušky jsme schopni získat modální parametry systému a na tomto základě řešit mnohé problémy vyvolané strukturálními vibracemi. Problémy strukturních vibrací představují významné riziko a omezení při návrhu širokého rozsahu strojírenských produktů. Mohou být příčinou porušení strukturální integrity (např. ulomení turbínové lopatky), nebo

mohou snižovat výkon strojního zařízení. Nadměrné vibrace vždy způsobují minimálně nadměrnou hlučnost a nepohodlí při provozu.

Modální zkouška :

"Procesy aplikované na testované součásti nebo struktury s cílem získat matematický popis jejich dynamického chování."

1.1 Aplikace modálních zkoušek

Důvodů pro provedení modální zkoušky může být několik. Zde budou seřazeny podle nároků na přesnost a podle míry vztahu s teoretickou analýzou:

- a) Zjištění modálních parametrů (vlastních frekvencí, vlastních tvarů, příp. modálního tlumení) bez návaznosti na teoretický model. Tak lze např. zjistit, zda nadměrné kmitání za provozu je způsobeno rezonancí a jak vypadá vybuzený vlastní tvar.
- b) Zjištění modálních parametrů s cílem srovnat experimentálně získaná data s odpovídajícími daty získanými pomocí MKP nebo jiné teoretické metody. Cílem je zde ověření teoretického modelu před dalšími výpočty, např. odezev na různá zatížení. Pro toto potřebujeme:
 - přesné určení vlastních frekvencí
 - určení vlastních tvarů s takovou přesností, aby mohlo být provedeno jejich srovnání s vypočtenými vlastními tvary - přiřazení odpovídajících si vlastních tvarů.
- c) bod b) + Oprava teoretického modelu tak, aby lépe odpovídal naměřeným hodnotám - obvykle se to dělá metodou pokusu a omylu, např. mírnou změnou materiálových parametrů nebo zahrnutím modálního tlumení do teoretického modelu.
- d) Korelace experimentálních a teoretických výsledků - dvě množiny dat jsou číselně porovnávány s cílem přesně identifikovat příčiny nesouladu mezi vypočtenými a naměřenými vlastnostmi. To vyžaduje daleko přesnější měření vlastních tvarů, než když je chceme pouze zobrazit pomocí animace (jak je tomu v bodech a) až c)).
- e) Použití modálních zkoušek k získání matematického modelu součásti, která může být zařazena do složitější struktury. Tento přístup se často používá pro teoretickou analýzu složitých struktur. Vyžaduje to získat přesné hodnoty vlastních frekvencí, modálního tlumení a vlastních tvarů. Musí být zahrnuty všechny módy, není možné model "připasovat" na několik jednotlivých vlastních frekvencí. Nezahrnuté módy ovlivňují dynamické chování celé struktury ve sledovaném frekvenčním rozsahu. Tato aplikace je náročnější než všechny předchozí.
- f) Vytvoření modelu, který může být použit pro předpovídání vlivu strukturních modifikací původní testované struktury. Jde o menší změny než v případě substruktur, proto zde jsou o něco nižší požadavky na přesnost než v předchozím případě. Přesto u

obou těchto případů nastávají komplikace s obvykle neměřenými rotačními stupni volnosti.

- g) Použití modelu získaného pomocí modální zkoušky k určení budících sil. Je možné srovnat odezvy, způsobené budícími silami s matematickým popisem přenosových funkcí struktury a pomocí toho odhadnout budící síly.

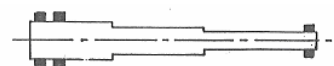
Úspěšné zvládnutí modálních zkoušek vyžaduje spojení těchto tří znalostí a dovedností:

- teoretický základ
- přesné měření vibrací
- realistické a detailní zpracování dat

V této úvodní kapitole uvedeme pouze základ těchto tří požadavků, které budou v dalším textu podrobně rozpracovány.

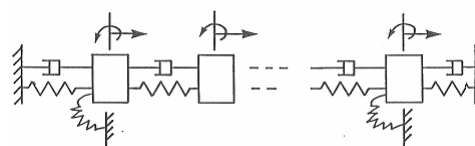
1.2 Stručně o teorii modálních zkoušek

Zkoumaný systém je možné popsat pomocí tří různých typů modelů, z nichž každý je dán systémovými maticemi.



• fyzikální model

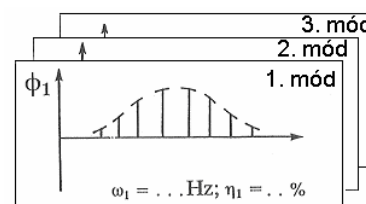
- $[M]$... matice hmotnosti
- $[K]$... matice tuhosti
- $[B]$ nebo $[H]$... matice viskózního nebo hysterézního tlumení



Matice mají rozměr $N \times N$ (N = počet stupňů volnosti = počet pohybových rovnic).

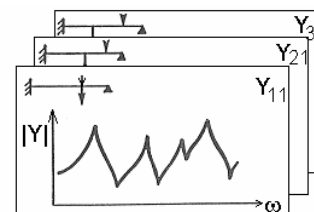
• modální model

- $[\lambda^2]$... spektrální matice, diagonální, na diagonále jsou vlastní čísla
- $[\Phi]$... modální matice, sloupce tvoří vlastní vektory



• odezvosý model

- $[H(\omega)]$... matice FRF (frekvenčních odezvosých funkcí, např. pohyblivosti $Y(\omega)$) nebo IRF (impulsních odezvosých funkcí), symetrická



Při **teoretické** vibrační analýze systémů postupujeme od fyzikálního modelu k odezovému v těchto krocích:

1. sestavení pohybových rovnic $\Rightarrow$ fyzikální model
2. analýza volného kmitání $\Rightarrow$ modální model
3. analýza vynuceného kmitání při harmonickém buzení $\Rightarrow$ odezový model

Při **experimentální** vibrační analýze systémů postupujeme opačně v těchto krocích:

1. změření vhodné množiny frekvenčních odezvových funkcí $\Rightarrow$ odezový model
2. analýza naměřených dat $\Rightarrow$ modální model
3. další výpočty $\Rightarrow$ fyzikální model (tento poslední krok už se obvykle neprovádí)

Frekvenční odezovou funkci (FRF - Frequency Response Function), která je základem odezového modelu, je možno vyjádřit jako:

$$H(\omega) = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}} = \frac{\text{pohyb}}{\text{síla}} = \frac{\text{odezva}}{\text{buzení}}$$

Rozeznáváme 3 základní typy frekvenčních odezvových funkcí podle toho, zda je odezovým parametrem výchylka, rychlost nebo zrychlení - viz tab.1.1.

Prvek $\alpha_{jk}(\omega)$ představuje harmonickou odezvu v místě x_j způsobenou osamělou harmonickou silou působící v jiném místě f_k .

Přesná definice jednoho prvku matice frekvenčních odezvových funkcí (pro matici receptance $[\alpha(\omega)]$):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_j^r \cdot \Phi_k^r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (1.1)$$

kde λ_r - vlastní číslo r-tého módu (vlastní frekvence + modální tlumení)

Φ_j^r - j-tý prvek r-tého vektoru vlastních tvarů $\{\Phi\}$, tj. relativní výchylka v j-tém

bodě při kmitání na r-tém tvaru

N - počet módů

Pozn.: Při experimentálním postupu je obvykle počet zjištěných módů N menší než počet stupňů volnosti, což je dáno omezeným frekvenčním rozsahem, ve kterém měříme. Model, který při experimentálním postupu získáme, je tzv. neúplný model, na rozdíl od úplného modelu získaného výpočtovým postupem, u kterého můžeme teoreticky získat tolik módů vibrací, kolik je stupňů volnosti.

Výraz (1.1) je základem modálních zkoušek - ukazuje přímé spojení mezi modálními vlastnostmi systému a jeho odezovými charakteristikami. Z čistě teoretického pohledu poskytuje efektivní prostředek k výpočtu odezev, zatímco z praktického hlediska umožňuje určit modální vlastnosti z pohyblivostí získaných přímým měřením.

Pokud použijeme znalosti teoretického vztahu mezi funkcemi receptance a modálními parametry, je možné ukázat, že "vhodná" množina měřených receptancí musí obsahovat pouze jeden řádek nebo jeden sloupec matice pohyblivosti $[\alpha(\omega)]$. V praxi to znamená, že buď budíme strukturu v jednom bodě a měříme odezvy ve všech bodech nebo měříme odezvu v jednom bodě a strukturu budíme ve všech bodech. První možnost se používá při buzení budičem, druhá při buzení rázovým kladívkem nebo jiným bezkontaktním budícím zařízením.

buzení budičem $\Rightarrow$ měří se jeden sloupec matice FRF

buzení rázovým kladívkem $\Rightarrow$ měří se jeden řádek matice FRF

1.3 Různé typy frekvenčních odezvových funkcí

Pokud se odkazujeme na FRF bez specifikace odezvového parametru, značí se obvykle jako $H(\omega)$. Pokud chceme odezvový parametr specifikovat, značí se jednotlivé FRF různě (viz tab.1.1).

Tab 1.1 - Různé typy frekvenčních odezvových funkcí podle odezvového parametru

Odezvový parametr r	Frekvenční odezvová funkce	
	Standartní $\frac{r}{F}$	Inverzní $\frac{F}{r}$
displacement výchylka X	receptance admittance dynamic compliance dynamic flexibility $\alpha(\omega)$ receptance admittance dynamická poddajnost dynamická pružnost	dynamic stiffness dynamická tuhost
velocity rychlost V	mobility $Y(\omega)$ pohyblivost	mechanical impedance mechanický odpor
acceleration zrychlení A	inertance accelerance $A(\omega)$ inertance akcelerance	apparent mass zdánlivá hmotnost

Časový průběh výchylky je v komplexním tvaru vyjádřen jako:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

Potom je možné jednoduše derivací získat vztahy pro rychlost a zrychlení:

$$v(t) = \dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} \quad (1.3)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

Frekvenční odezвовá funkce receptance s odezвовým parametrem výchylkou je definována:

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} \quad (1.5)$$

A opět derivací získáme další typy FRF:

$$Y(\omega) = \frac{V}{F} = i\omega \frac{X}{F} = i\omega \alpha(\omega) \quad \dots \text{pohyblivost} \quad (1.6)$$

$$A(\omega) = \frac{\ddot{x}}{F} = -\omega^2 \alpha(\omega) \quad \dots \text{inertance} \quad (1.7)$$

1.4 Stručně o měřících metodách

Pro zajištění vysoké kvality naměřených dat je třeba zvážít:

- a) mechanické aspekty uložení a správného vybuzení struktury
- b) správné snímání naměřených veličin - vstupní síly a pohybové odezvy
- c) zpracování signálu vhodné k použitému typu zkoušky

Způsoby uložení

Způsob uložení měřené struktury je dán především účelem, pro který modální zkoušku provádíme, případně omezeními prameníci z provozních podmínek. V zásadě rozlišujeme 3 způsoby uložení:

- **volné** (na velmi měkkých pružinách) - Jde o nejjednodušší způsob uložení a přednostně jej použijeme vždy, když budeme chtít provádět korelaci experimentálního a výpočtového modelu.
- **vetknuté** - pevné uchycení v určitých bodech - Je složitější, protože dokonalého znehybnění nelze nikdy prakticky dosáhnout. Rozdíly mezi experimentálním a výpočtovým modelem pak mohou pramenit z velké části z nestejných okrajových podmínek. Nicméně, někdy je nutné tento způsob použít (např. při zjišťování modálních parametrů turbínových lopatek).
- **in situ** - na místě (v provozních podmínkách) - Použijeme zejména tehdy, když potřebujeme modální parametry při reálných podmínkách a nebudeme provádět korelaci s teoretickým modelem.

Způsoby buzení

Způsob buzení měřené struktury je opět dán především účelem, pro který modální zkoušku provádíme, požadavky na přesnost a frekvenčním rozsahem, ve kterém zjišťujeme modální parametry. Způsoby jsou v zásadě dva a u každého z nich je ještě možné další třídění podle typu signálu:

- **buzení dynamickým budičem vibrací**
 - harmonickým signálem
 - náhodným signálem
 - jinými typy signálu (viz kap. 4.2.1.1.3)
- **impulsní buzení**
 - rázovým kladívkem
 - náhlým uvolněním z deformované pozice

Snímače

Snímače použité pro snímání síly i odezvy musí co nejméně ovlivňovat strukturu a jejich účinnost musí být adekvátní rozsahu měření a výchylkám. Dnes se nejčastěji snímá odezva ve formě zrychlení a používají se piezoelektrické snímače síly i zrychlení. Blíže viz kap. 4.2.1.2.

1.5 Stručně o analýze

Analýza naměřených dat je proces, kdy naměřené frekvenční odezvové funkce jsou analyzovány tak, aby byl nalezen teoretický model, který nejvěrněji odpovídá dynamickému chování skutečně testované struktury. Této části modální zkoušky se říká experimentální modální analýza, i když často je tento pojem nepřesně používán pro celou modální zkoušku. Proces analýzy dat se dělí do dvou stadií:

1. Určení vhodného typu modelu (viskózní nebo hysterézní tlumení). Tato volba je často v praxi omezena softwarem, který pro modální analýzu používáme. Většina softwarových balíčků pracuje s jedním z typu tlumení a nedává uživateli na výběr.

Určení vhodných parametrů vybraného modelu (aproximace křivek, curve-fitting). Touto problematikou se podrobně zabývá kap. 4.3.



Shrnutí pojmů

modální zkouška
modální model
fyzikální model
odezvodový model
modální parametry
frekvenční odezvodová funkce
receptance
pohyblivost
inertance



Otázky

1. Co je to modální zkouška?
2. Proč provádíme modální zkoušky (jmenujte alespoň 3 aplikace)?
3. Jakými třemi typy modelů můžeme popsat dynamický systém?
4. Co jsou to modální parametry?
5. Jaká funkce je základem modálních zkoušek?
6. Jak je v principu definována frekvenční odezvodová funkce?
7. Jakými vztahy jsou spojeny funkce receptance, inertance a pohyblivosti?
8. Jaké znáte způsoby uložení měřené struktury při modální zkoušce?

2 DVOUKANÁLOVÁ ANALÝZA

V této kapitole se seznámíte s některými pojmy, se kterými se při provádění modálních zkoušek setkáte a které patří do oblasti zpracování signálů.



Čas ke studiu: 8 hodin



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- ✚ Popsat deskriptory systému - frekvenční a impulzní odezovou funkci
- ✚ Definovat pojmy autospektrum, křížové spektrum a koherence
- ✚ Poznáte vliv šumu na naměřené funkce
- ✚ Poznáte úskalí digitálního zpracování signálu



Výklad

Zatímco u úloh spadajících do vibrační diagnostiky, tedy u analýzy signálů, využíváme principiálně jednocanálová měření a analýzu (i když současně zpracovávaných kanálů může být více), u úloh spadajících do analýzy systémů jde v principu o dvoukanálovou analýzu. Základní schéma dvoukanálového FFT analyzátoru je na obr. 2.1.

Při simultánní analýze signálů v alespoň dvou kanálech už nejsou v popředí zájmu signály samotné, ale vlastnosti fyzikálního systému zodpovědné za rozdíly mezi nimi. Metody mohou být teoreticky rozšířeny na libovolné množství kanálů, ale v podstatě jsou analyzovány vždy dva současně. Dále si rozebereme jednotlivé funkce, které se při analýze systémů vyskytují.

2.1 Autospektrum

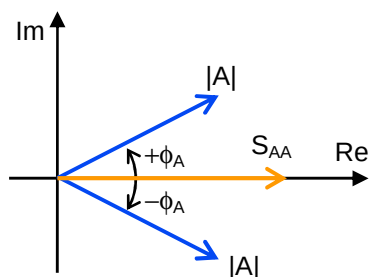
Autospektrum je funkcí, se kterou běžně pracuje i analýza signálů. Okamžité (Fourierovo) autospektrum je definováno jako:

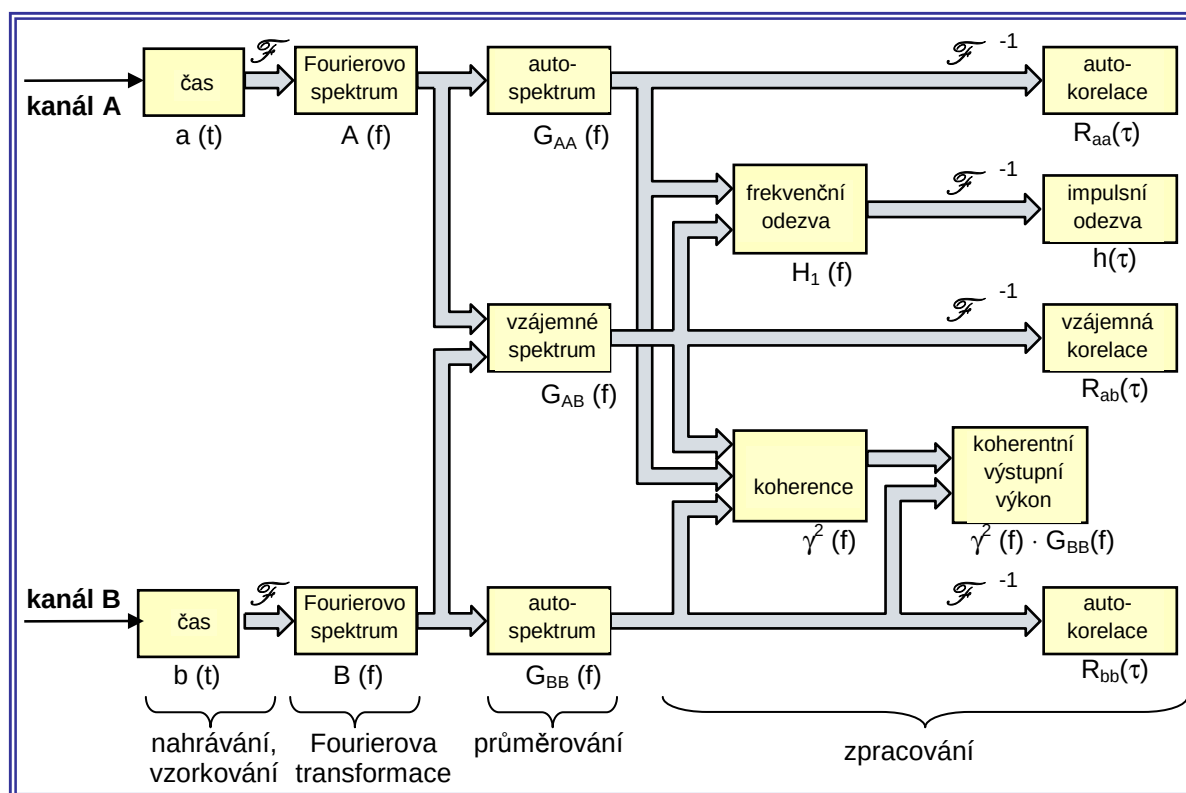
$$S_{AA}(f) = E[A(f) \cdot A^*(f)] = E[a(t) \cdot a^*(t)] = [R_{aa}(\tau)] \quad (2.1)$$

$$A(f) = |A(f)| \cdot e^{i\phi_A(f)} \quad (2.2)$$

$$A^*(f) = |A(f)| \cdot e^{-i\phi_A(f)} \quad (2.3)$$

$$S_{AA}(f) = E[|A(f)| \cdot |A^*(f)| \cdot e^{i0}] = E[|A|^2(f)] \quad (2.4)$$





Obr. 2.1 - Schéma dvoukanálové analýzy

Stěžejní novou funkcí je vzájemné (křížové) spektrum, vypočtené z okamžitých spekter v obou kanálech. Všechny ostatní funkce v diagramu jsou pomocí postprocessingu vypočteny na základě dvou autospekter a vzájemného spektra.

2.2 Křížové (vzájemné) spektrum (cross spectrum)

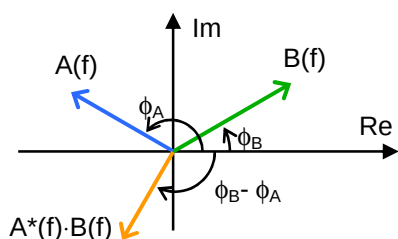
Na základě komplexních okamžitých spekter $A(f)$ a $B(f)$ je vzájemné spektrum S_{AB} (z A do B) definováno jako:

$$S_{AB}(f) = E[A^*(f) \cdot B(f)] = E[a(-t) * b(t)] = [R_{ab}(\tau)] \quad (2.5)$$

$$A(f) = |A(f)| \cdot e^{i\phi_A(f)} \quad (2.6)$$

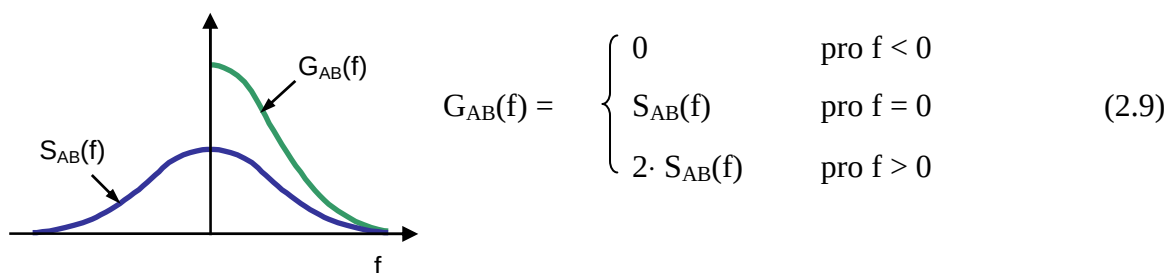
$$B(f) = |B(f)| \cdot e^{i\phi_B(f)} \quad (2.7)$$

$$S_{AB}(f) = E[|A(f)| \cdot |B(f)| \cdot e^{i(\phi_B(f) - \phi_A(f))}] \quad (2.8)$$

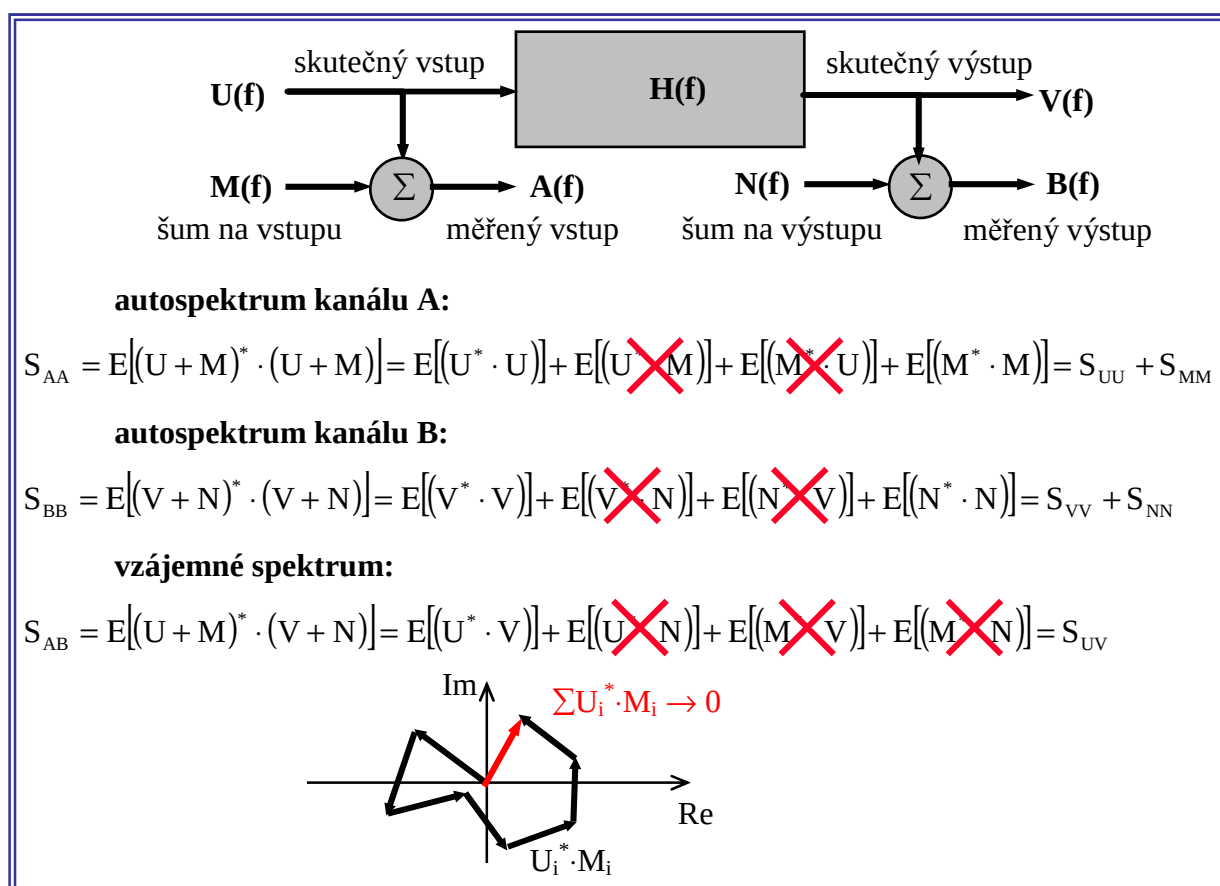


Amplituda vzájemného spektra je dána součinem amplitud, fáze je dána rozdílem fází (z A do B). Vzájemné spektrum S_{BA} (z B do A) tedy bude mít stejnou amplitudu, ale opačnou fázi. Fáze vzájemného spektra je současně fází systému.

Autospektra i vzájemné spektrum mohou být definovány jako oboustranné (označení S_{AA} , S_{BB} , S_{AB} , S_{BA}) nebo jednostranné (označení G_{AA} , G_{BB} , G_{AB} , G_{BA}). Jednostranné spektrum se získá z oboustranného takto:



Vzájemné spektrum nemá velký význam samo o sobě, ale používá se k výpočtu dalších funkcí. Amplituda $|G_{AB}|$ udává, do jaké míry spolu dva signály korelují jako funkce frekvence, fázový úhel $\angle G_{AB}$ je mírou fázového posunu mezi dvěma signály jako funkce frekvence. Výhodou vzájemného spektra je, že je v něm průměrováním redukován vliv šumu. Je to proto, že fázový úhel spektra šumu nabývá náhodných hodnot, takže součet několika těchto náhodných spekter se blíží nule (viz obr.2.2). Je vidět, že měřené autospektrum se rovná součtu skutečného autospektra a autospektra šumu, zatímco měřené vzájemné spektrum se rovná skutečnému vzájemnému spektru.



Obr. 2.2 - Odprůměrování šumu ve vzájemném spektru

2.3 Koherence

Funkce koherence udává míru lineární závislosti mezi dvěma signály jako funkci frekvence. Určuje se pomocí dvou autospekter a vzájemného spektra ze vztahu:

$$\gamma^2(f) = \frac{|G_{AB}(f)|^2}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)} \quad (2.10)$$

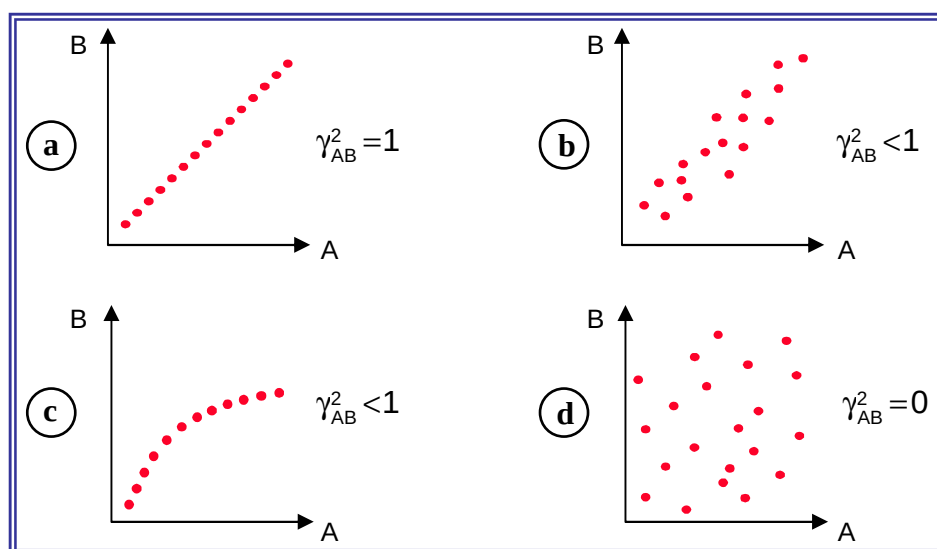
Koherence může být na každé frekvenci chápána jako koeficient korelace (umocněný na druhou), který vyjadřuje stupeň lineární závislosti mezi dvěma proměnnými, kde hodnoty autospekter odpovídají variancím těchto dvou proměnných a hodnota vzájemného spektra odpovídá kovarianci.

Hodnota koherence se pohybuje od 0, znamenající neexistenci závislosti mezi vstupem A a výstupem B, po 1 znamenající dokonalou lineární závislost (blíže viz obr.2.3).

$$0 \leq \gamma^2(f) \leq 1 \quad (2.11)$$

Na obrázku 2.3 vyjadřuje:

- dokonale lineární vztah mezi vstupem A a výstupem B
- dostatečně lineární vztah s mírným rozptylem v důsledku šumu
- nelineární vztah
- žádný vztah



Obr. 2.3 - Analogie koherence s koeficientem korelace

Funkce koherence poskytuje užitečnou informaci pouze tehdy, pokud spektra $G_{AA}(f)$, $G_{BB}(f)$ a $G_{AB}(f)$ jsou odhady, tj. spektra průměrovaná z více záznamů. Pro jeden vzorek (bez průměrování) platí:

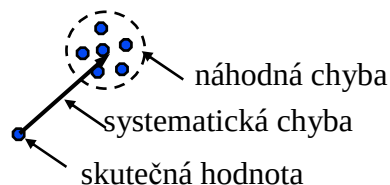
$$|G_{AB}(f)| = |A(f)|^2 \cdot |B(f)|^2 = G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f) \quad \wedge \quad \gamma^2(f) = 1 \quad (2.12)$$

Koherence je v tomto případě vždy rovna 1. Pokud jsou jednotlivé vzorky G_{AB} ovlivněny šumem a je prováděno průměrování, způsobí odchylky ve fázových úhlech to, že

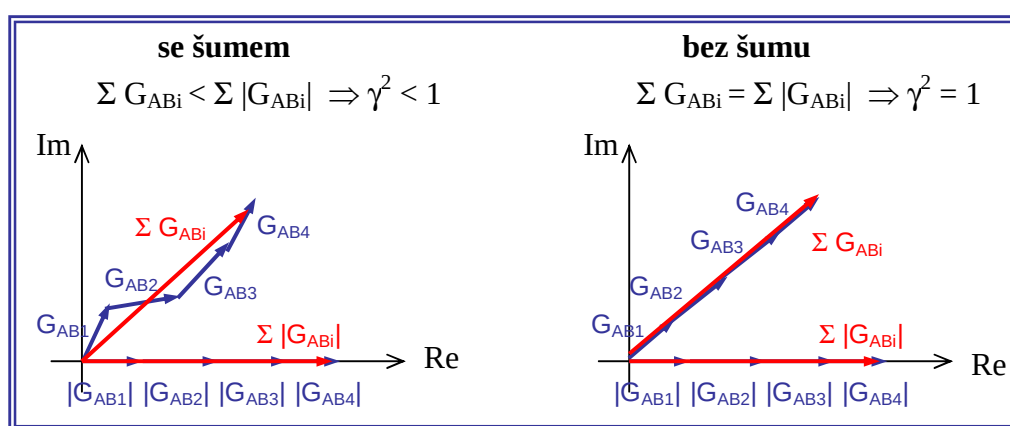
výsledná velikost $|G_{AB}|$ bude menší než by byla bez přítomnosti šumu (viz obr. 2.4). Podobný vliv má i přítomnost nelinearit.

Pokud jsou signály náhodné nebo obsahují určitou míru šumu, získá se spolehlivější odhad spekter pomocí průměrování. Obecně může být výsledek zatížen dvěma typy chyb:

- systematické (bias) chyby
- náhodné chyby



Systematická chyba se u lineárních systémů ve vzájemném spektru neobjevuje, pokud je analýza prováděna s dostatečným rozlišením (viz kap. 2.6.2).



Obr. 2.4 - Vliv šumu na koherenci

Nejdůležitější aplikací funkce koherence je kontrola platnosti dalších funkcí a určení, zda jsou ovlivněny šumem nebo výskytem nelinearit. Nízká koherence automaticky neznamená, že by měření bylo neplatné, ale někdy je znamením, že je třeba provést mnoho průměrů, abychom dostali platný výsledek. Důvody pro sníženou koherenci mohou být tyto:

- obtížná měření:
 - šum na měřeném výstupním signálu
 - šum na měřeném vstupním signálu
 - jiné vstupy, které nejsou ve vztahu s měřeným vstupním signálem
 - nelinearity v systému
- špatná měření:
 - chyba únikem
 - systémy proměnné v čase
 - rozptyl ("chvění") stupně volnosti (při buzení kladívkem, když neudeříme vždy do stejného místa)

Koherence se také používá k získání některých odvozených funkcí, které mají různé uplatnění. Jednou z nich je *Coherent Output Power* (koherentní výstup):

$$\text{COP} = \gamma^2 \cdot G_{\text{BB}}(f) \quad (2.13)$$

COP udává, jak velká část měřeného výstupního autospektra je zcela koherentní se vstupním signálem reprezentovaným autospektrům $G_{AA}(f)$.

COP lze použít, pokud je nízká koherence způsobena znečištěním výstupního signálu šumem. V případě znečištění vstupního signálu šumem nebo při výskytu nelinearit nemá význam.

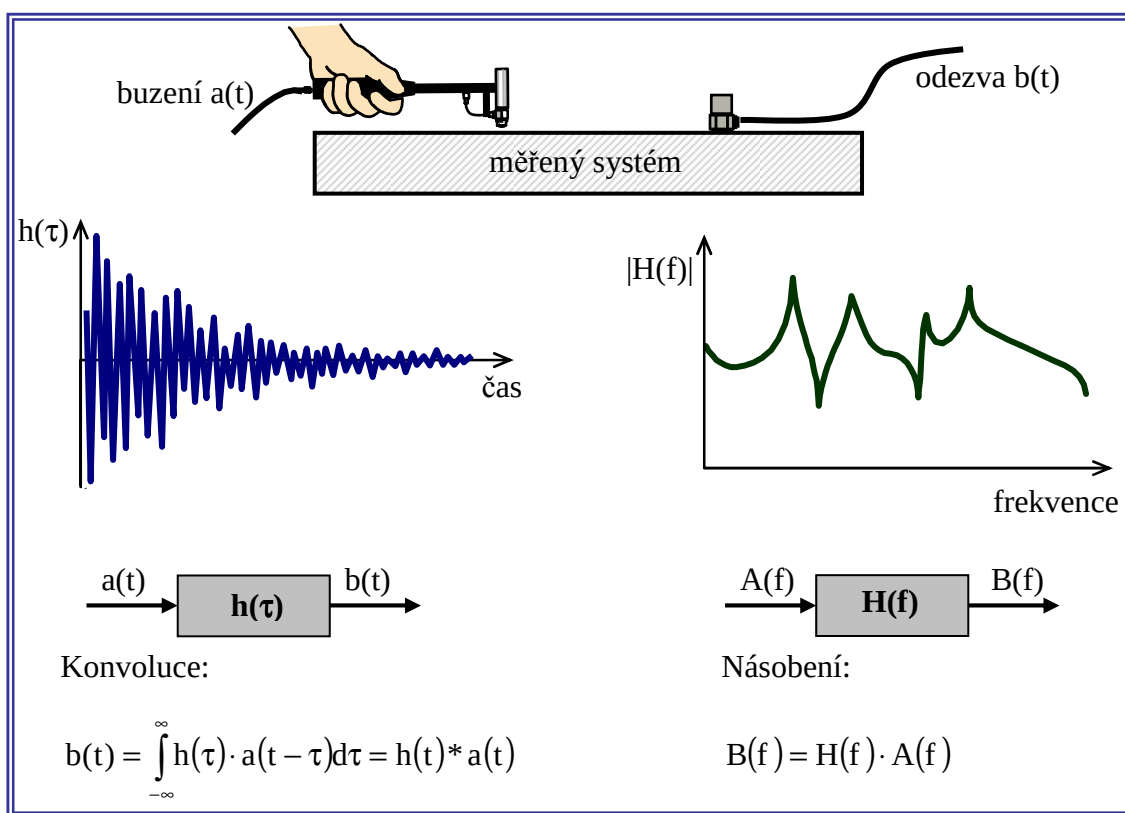
Další funkcí odvozenou z koherence je *Signal-to-Noise Ratio* (odstup signálu od šumu):

$$S/N = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad (2.14)$$

Zde je šum v měřeném výstupu považován za jediný faktor ovlivňující koherenci. Potom koherentní výstup (úměrný γ^2) udává míru signálu obsaženého ve výstupu a nekoherentní výstup (úměrný $1 - \gamma^2$) udává míru šumu ve výstupu.

2.4 Deskriptory systému

Pokud signály A a B reprezentují vstup a výstup fyzikálního systému, používá se k popisu vztahu mezi těmito dvěma signály ve frekvenční oblasti frekvenční odezvovalá funkce $H(f)$, v časové oblasti impulsní odezvovalá funkce $h(\tau)$ (viz obr.2.5). Jsou to tzv. deskriptory systému a jsou nezávislé na zúčastněných signálech.



Obr. 2.5 - Deskriptory systému

2.4.1 Frekvenční odezvosvá funkce (FRF - Frequency Response Function)

Hlavním důvodem, proč se FRF používají, je jednoduchost, s jakou lze pomocí nich popsat odezvu reálného systému. Podrobné odvození FRF pro systém s jedním stupněm volnosti (viz obr. 2.6) bude provedeno v kapitole 3.1. Zde pouze uvedeme, že pro ideální fyzikální systém, jehož vlastnosti mohou být popsány systémem lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu, vede použití Laplaceovy transformace k převedení těchto diferenciálních rovnic na algebraické rovnice v Laplaceově proměnné s . Řešení těchto rovnic může být popsáno ve formě *přenosových funkcí* $H_{ij}(s)$, které vyjadřují poměr odezvy v místě i na vstup v místě j . Typická přenosová funkce pro systém s n stupni volnosti může být vyjádřena jako:

$$H_{ij}(s) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{R_{ijk}}{s - p_k} + \frac{R_{ijk}^*}{s - p_k^*} \right] \quad (2.15)$$

kde: $p_k \dots$ póly - globální vlastnost pro všechny přenosové funkce systému

$R_{ijk} \dots$ rezidua - jsou specifická pro každou přenosovou funkci

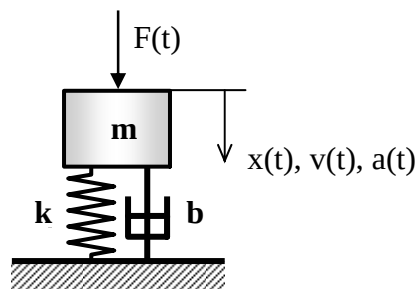
Každý člen v sumě představuje odezvu systému s jedním stupněm volnosti s pólem

$$p_k = -\delta_k + i\Omega_k \quad (2.16)$$

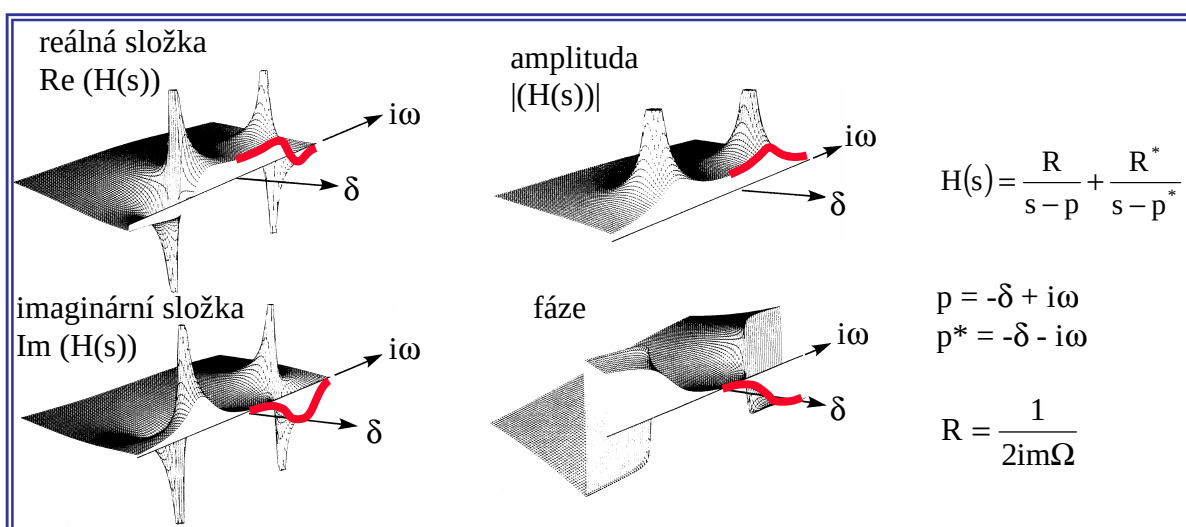
Reálná část představuje tlumení k -tého módu a imaginární část vlastní kruhovou frekvenci tlumeného kmitání.

Ideální fyzikální systém:

- hmota m je hmotný bod
- pohyb pouze v jednom směru (x)
- tlumič b a pružina k jsou nehmotné
- pružina k a tlumič b jsou lineární
- m , k a b konstantní v čase



Obr. 2.6 - Ideální systém s 1 °volnosti



Obr. 2.7 - Přenosová funkce

Přenosová funkce je prostorová a pro systém s jedním stupněm volnosti je zobrazena na obr. 2.7. Dosadíme-li $i\omega$ za s (tedy provedeme vyhodnocení podél imaginární osy), dostaneme frekvenční odezvou funkci $H_{ij}(i\omega)$, což je vlastně řez přenosovou funkcí podél imaginární osy. Stejně jako přenosová funkce, i FRF se dá považovat za součet složek, z nichž každá odpovídá odezvě systému s jedním stupněm volnosti. Globální vlastnosti δ_k a Ω_k mohou být v zásadě získány z libovolné z naměřených H_{ij} , zatímco rezidua R_{ijk} definují vlastní tvar Φ_k a jsou specifická pro každou H_{ij} .

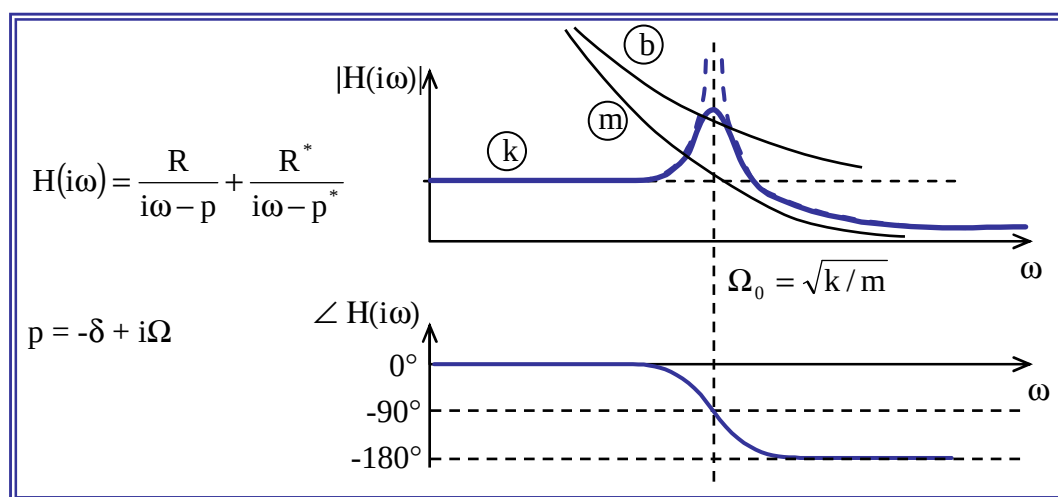
FRF pro systém s 1° volnosti dle obr. 2.6 je zobrazena na obr. 2.8. Různé formy zobrazení budou podrobně probrány v kap. 3.1.2.2 a 3.1.3.1.

Systém s 1° volnosti (nebo mód systému s více stupni volnosti) je popsán 3 parametry:

$$\text{- netlumená vlastní frekvence} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.17)$$

$$\text{- poměrný útlum} \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{\delta}{\Omega_0} \quad (2.18)$$

$$\text{- reziduum} \quad R = \frac{1}{2i m \omega} \quad (2.19)$$



Obr. 2.8 FRF systému s 1° volnosti

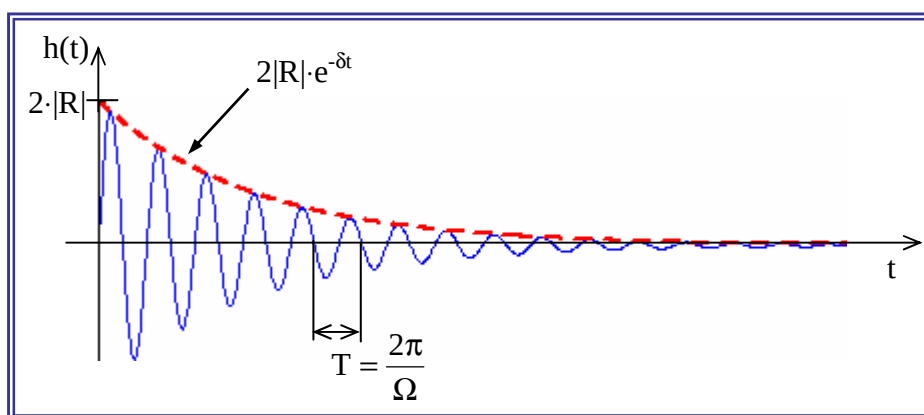
2.4.2 Impulsní odezвовá funkce (IRF - Impulse Response Function)

Impulsní odezva systému je výstupní signál systému jako odezva na Diracův impuls (jednotkový impuls, delta funkce) na vstupu. Je to inverzní Fourierova transformace frekvenční odezвовé funkce, a takto se taky získává v FFT analyzátoru:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(f)\} \quad (2.20)$$

Impulsní odezva systému s jedním stupněm volnosti je jednostranná tlumená sinusovka (viz obr. 2.9) daná vztahem:

$$h(t) = 2 \cdot |R| \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\Omega t) \quad (2.21)$$



Obr. 2.9 - IRF systému s 1 °volnosti

Stejně jako FRF je možno považovat za součet odezev n systémů s jedním stupněm volnosti, je i impulsní odezva systému s více stupni volnosti součtem impulsních odezev n systémů s jedním stupněm volnosti. Sečtením všech n módů dostaneme obecnější vztah:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n 2 \cdot |R_{ijk}| \cdot e^{-\delta_k t} \cdot \sin(\Omega_k t) \quad (2.22)$$

Průměrná konstanta doznívání této impulsní odezvy může být použita k určení průměrných tlumících vlastností systému.

Pokud zobrazíme amplitudu impulsní odezvy v logaritmických souřadnicích, je obálkou funkce přímka, jejíž sklon udává tlumení systému. Vyjdeme z definice logaritmického dekrementu:

$$v = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \delta T \quad (2.23)$$

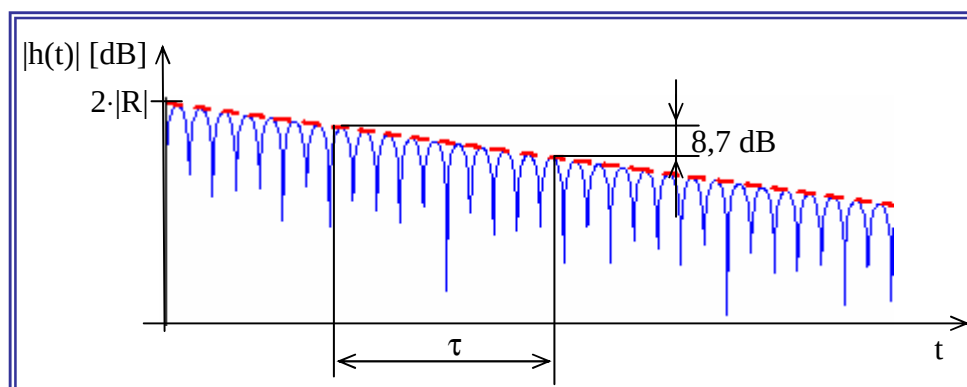
Amplituda poklesne e-krát za dobu τ (τ je tzv. časová konstanta systému):

$$\ln e = \delta \cdot \tau$$

$$1 = \delta \cdot \tau$$

$$\delta = 1/\tau$$

Převod e na dB: $20 \log e = 8.7 \text{ dB}$

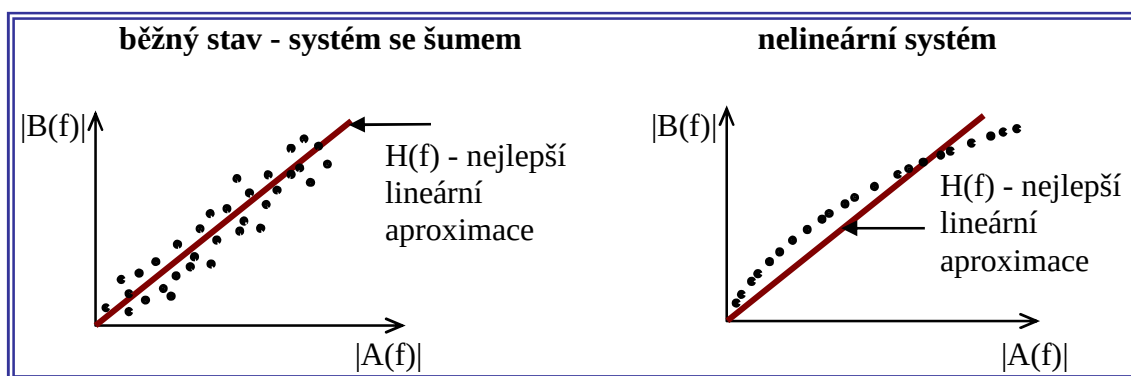


Obr. 2.10 - Určování tlumení z impulsní odezvosvé funkce

Pokud je na svislé ose amplituda impulsní odezvy funkce v decibelech, můžeme odečíst dobu τ , za kterou amplituda poklesne o 8.7 dB a z ní určit konstantu doznívání δ (viz obr. 2.10). Tento postup je shodný jak pro určení konstanty doznívání systému s 1° volnosti, tak pro určení průměrné konstanty doznívání systému s více stupni volnosti.

2.5 Vliv šumu na FRF

Frekvenční odezvou funkci můžeme také definovat jako směrnici přímky, charakterizující závislost výstupu na vstupu u lineárního systému. Pokud systém není lineární, dostaneme při použití Fourierovy transformace lineární aproximaci nelineárního systému. Stejně tak vliv náhodného šumu je lineární aproximací eliminován (viz obr. 2.11).



Obr. 2.11 - Linearizace

Frekvenční odezvá funkce je definována jako poměr výstupu ke vstupu. Při použití dvoukanálového analyzátoru máme k dispozici 3 alternativní odhady FRF, které jsou definovány pomocí autospekter a vzájemného spektra. Jsou to:

$$H_1(f) = \frac{G_{AB}(f)}{G_{AA}(f)} \quad (2.24)$$

$$H_2(f) = \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)} \quad (2.25)$$

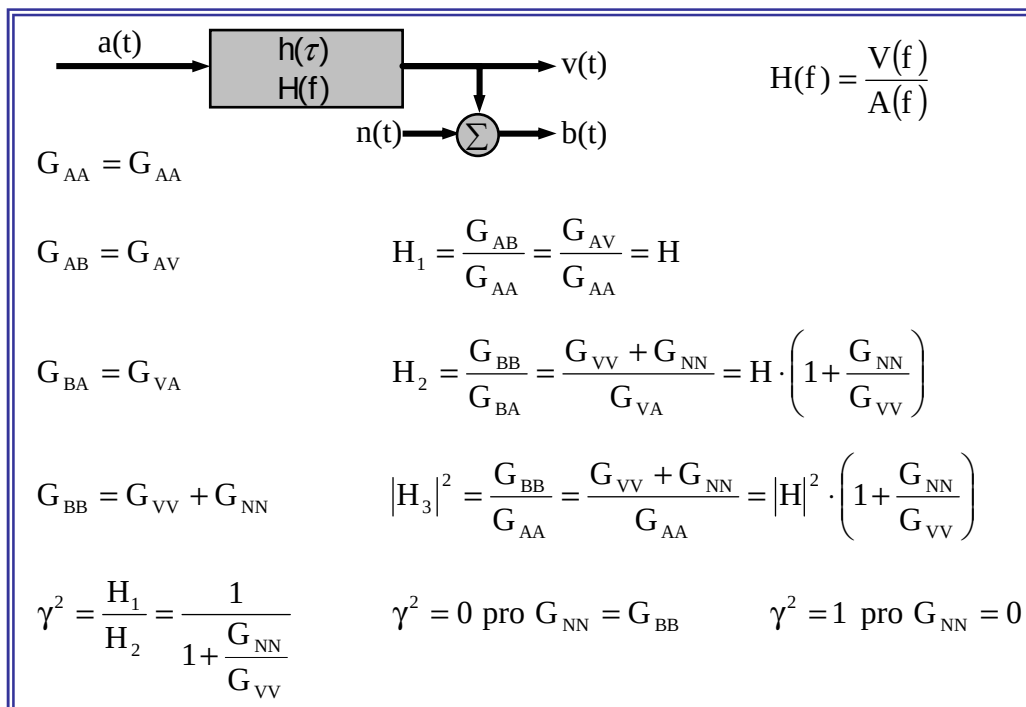
$$H_3(f) = \sqrt{\frac{G_{BB}(f)}{G_{AA}(f)}} \cdot \frac{G_{AB}(f)}{|G_{AB}(f)|} = \sqrt{H_1(f) \cdot H_2(f)} \quad (2.26)$$

Funkci koherence potom můžeme nadefinovat jako:

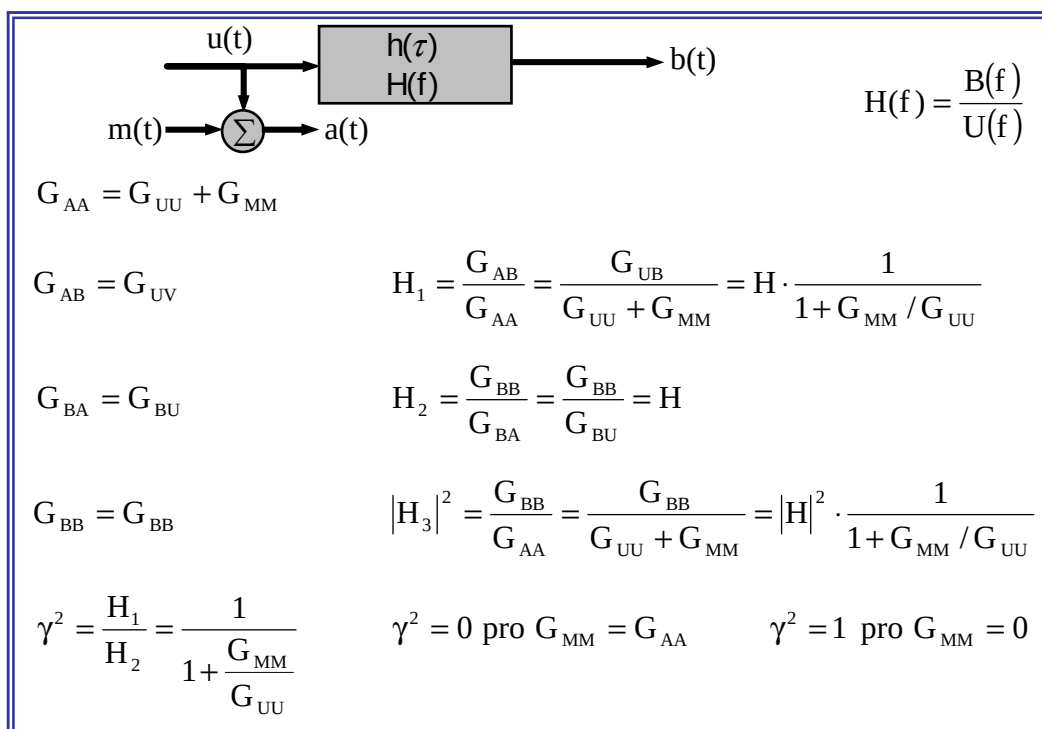
$$\gamma^2(f) = \frac{|G_{AB}(f)|^2}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)} = \frac{H_1(f)}{H_2(f)} \quad (2.27)$$

Který z těchto tří odhadů je lepší použít, záleží na tom, zda se vyskytuje šum na vstupu nebo na výstupu. Při měření FRF pomocí rázového buzení bývá vstupní signál čistý, bez šumu, zatímco výstupní je modifikován odezvou systému a zejména v antirezonancích bývá znehodnocen šumem. Naopak při měření FRF pomocí budiče vibrací bývá zvláště u málo tlumených struktur šumem znehodnocen vstupní signál v okolí rezonancí. Struktura totiž

funguje v okolí rezonancí jako zkrat a vstupní silové spektrum má nízké hodnoty, i když signál vstupující do budiče je bílý šum. Výstupní signál je relativně čistý. Pokud potřebujeme co nejpřesnější hodnoty amplitud FRF, je nejlepším řešením vzít rezonanční špičky z funkce H_2 a zbytek z funkce H_1 .

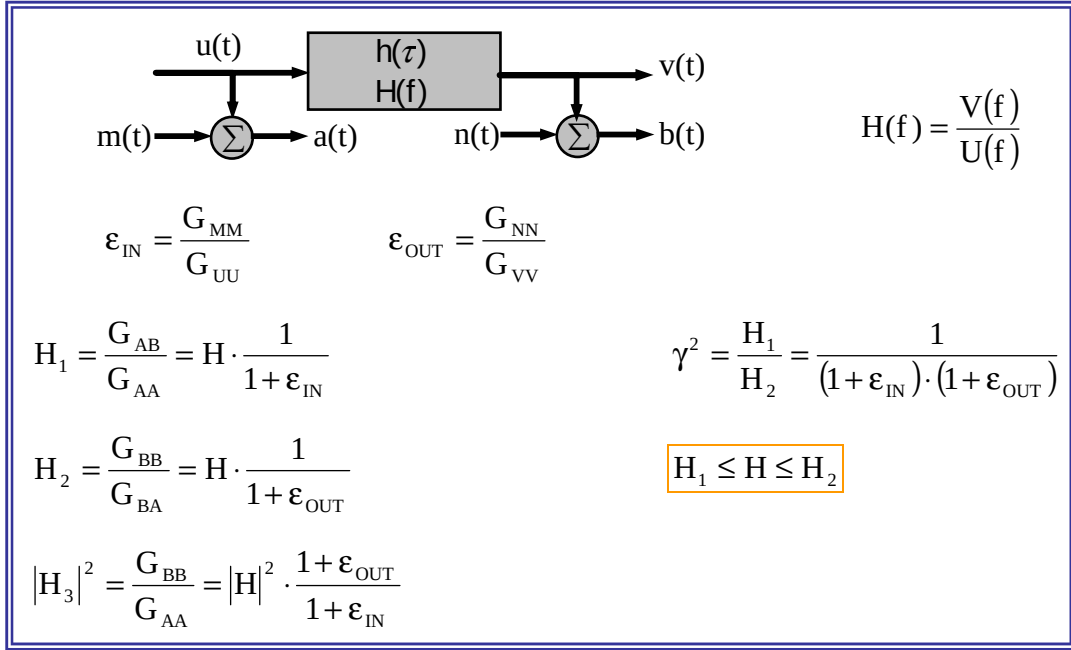


Obr. 2.12 - Vliv šumu na výstupu



Obr. 2.13 - Vliv šumu na vstupu

Vliv šumu na výstupu je podrobně rozebrán na obr. 2.12, vliv šumu na vstupu na obr. 2.13 a vliv šumu na vstupu i výstupu, což je běžný případ, na obr. 2.14.



Obr. 2.14 - Vliv šumu na vstupu i výstupu

2.6 Digitální zpracování signálu

Základní funkcí spektrálního analyzátoru je provedení Fourierovy transformace signálů, které jsou dodány na vstup. Je vhodné připomenout vztah mezi dvěma nejvýznamnějšími verzemi základní Fourierovy transformace, mezi časovou a frekvenční doménou. Ve své nejjednodušší formě to vyjadřuje, že funkce $\mathbf{x(t)}$, periodická v čase $\mathbf{T}$, může být vyjádřena jako nekonečná posloupnost:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right) \quad (2.28)$$

kde $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$ mohou být vypočteny ze znalosti $\mathbf{x(t)}$ pomocí vztahů (2.29) a (2.30):

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (2.29)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (2.30)$$

V situaci, kdy je $\mathbf{x(t)}$ diskretizována a trvá konečný čas, takže je definována pouze na množině $\mathbf{N}$ jednotlivých časových okamžiků $\mathbf{t_k}$ ($\mathbf{k=1,N}$), můžeme napsat konečnou Fourierovu řadu:

$$x_k (= x(t_k)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t_k}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t_k}{T}\right) \right) ; \quad k = 1, N \quad (2.31)$$

Koeficienty $\mathbf{a}_n$ a $\mathbf{b}_n$ jsou Fourierovy neboli spektrální koeficienty funkce $\mathbf{x}(t)$ a často jsou zobrazovány ve tvaru amplitudy $\mathbf{c}_n$ a fáze ϕ_n :

$$\mathbf{c}_n (= X_n) = \sqrt{\mathbf{a}_n^2 + \mathbf{b}_n^2} \quad \text{a} \quad \phi_n = \arctg\left(-\frac{\mathbf{b}_n}{\mathbf{a}_n}\right) \quad (2.32)$$

Toto je tvar Fourierovy transformace, který se nás při praktických aplikacích teorie používáné v oblasti modálních zkoušek týká a v důsledku diskretizace vstupních signálů (ze snímačů síly a z akcelerometrů) je nazývána *diskrétní Fourierova transformace* (DFT - Discrete Fourier Transform).

Vstupní signál je tedy A/D převodníkem digitalizován a zaznamenán jako množina $\mathbf{N}$ diskrétních hodnot s pravidelnými časovými rozestupy v intervalu $\mathbf{T}$, během něhož je měření provedeno. Potom je za předpokladu, že je vzorek v čase $\mathbf{T}$ periodický, vypočtena konečná Fourierova řada (transformace) podle vztahu (2.31), jako odhad požadované Fourierovy transformace. Platí zde základní vztah mezi délkou vzorku $\mathbf{T}$, počtem diskrétních hodnot $\mathbf{N}$, vzorkovací (neboli digitalizační) frekvencí $\mathbf{f}_s$ a rozsahem a rozlišením frekvenčního spektra. Rozsah spektra je $0\text{--}\mathbf{f}_{\max}$, kde $\mathbf{f}_{\max}$ je *Nyquistova frekvence* a rozlišení čar ve spektru je $\Delta\mathbf{f}$, kde:

$$\mathbf{f}_{\max} = \frac{\mathbf{f}_s}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{T}} \quad (2.33)$$

$$\Delta\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}_s}{\mathbf{N}} = \frac{1}{\mathbf{T}} \quad (2.34)$$

Jelikož pro daný typ analyzátoru je velikost transformace ($\mathbf{N}$) obvykle pevně dána, a je to obvykle, i když ne vždy, mocnina 2, tj. 512, 1024 atd., je pokrytý frekvenční rozsah a rozlišení spektrálních čar dáno jediné délkou trvání každého vzorku.

Základní rovnice, která se pro určení spektrálního složení řeší, je odvozena z rovnice:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & \cos(2\pi/T) & \dots \\ 0.5 & \cos(4\pi/T) & \dots \\ 0.5 & \cos(6\pi/T) & \dots \\ 0.5 & \vdots & \dots \\ 0.5 & \cos(2N\pi/T) & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{neboli} \quad \{x_k\} = [C] \cdot \{a_n\} \quad (2.35)$$

K určení neznámých spektrálních neboli Fourierových koeficientů obsažených v $\{a_n\}$ tedy použijeme:

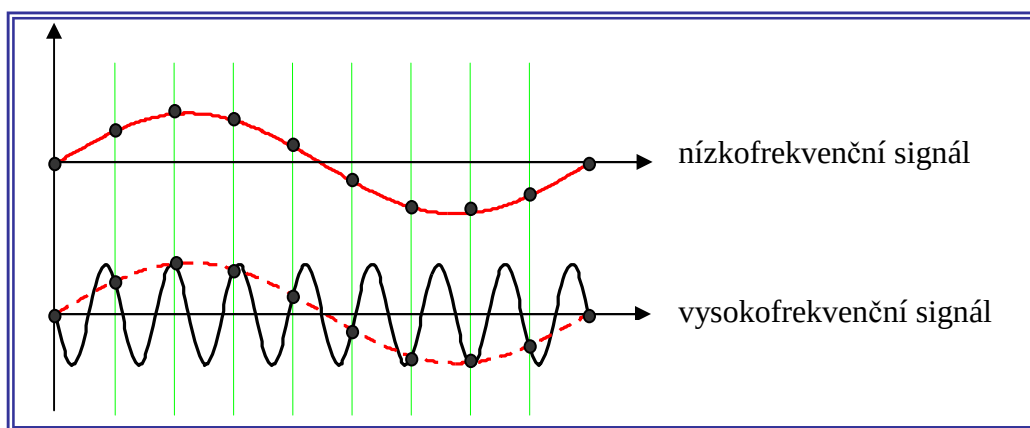
$$\{a_n\} = [C]^{-1} \{x_k\} \quad (2.36)$$

V 60. letech 20. století byl vyvinut optimalizovaný algoritmus řešení rovnice (2.36), kterému se říká *rychlá Fourierova transformace* (FFT - Fast Fourier Transform). Tento algoritmus vyžaduje, aby $\mathbf{N}$ bylo celočíselnou mocninou 2. Obvykle se používají hodnoty mezi 256 a 4096.

Digitální Fourierova analýza má mnoho rysů, které, pokud nejsou správně ošetřeny, mohou vést k chybným výsledkům. Všeobecně vzato jsou důsledkem diskretizace a nutnosti omezit délku časového signálu. V následujících kapitolách budeme diskutovat specifické rysy aliasingu, chyby únikiem, vlivu oken, frekvenční lupy a průměrování.

2.6.1 Chyba typu aliasing

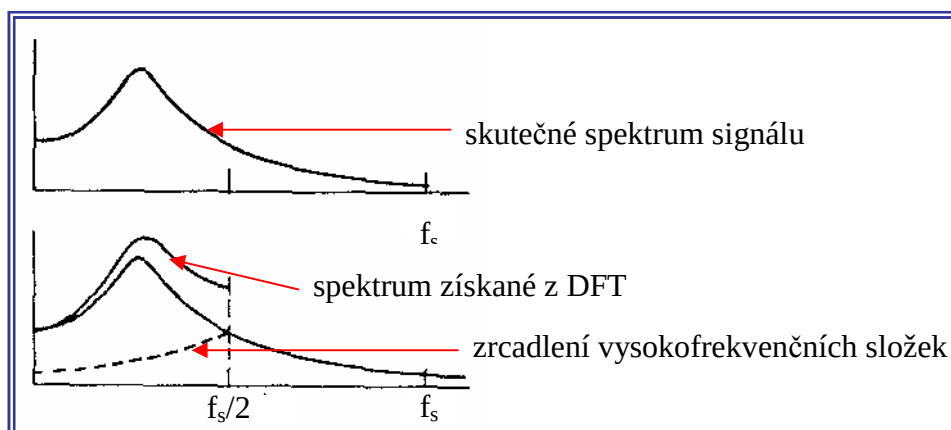
S digitální spektrální analýzou je spojen problém zvaný "aliasing", který plyne z diskretizace původně spojitého časového signálu. Pokud je vzorkovací frekvence ve vztahu k frekvenčnímu obsahu signálu příliš malá, může být přítomnost vysokých frekvencí v původním signálu při tomto diskretizačním procesu špatně interpretována. Ve skutečnosti se tyto vysoké frekvence objeví jako nízké frekvence, nebo spíše budou od skutečných nízkofrekvenčních složek nerozeznatelné. Na obr. 2.15 je vidět, že digitalizace signálu s nízkou frekvencí (nahore) dává přesně stejnou množinu diskrétních hodnot jako výsledek téhož procesu aplikovaného na signál s vyšší frekvencí (dole).



Obr. 2.15 - Zobrazení vysoké frekvence jako nízké

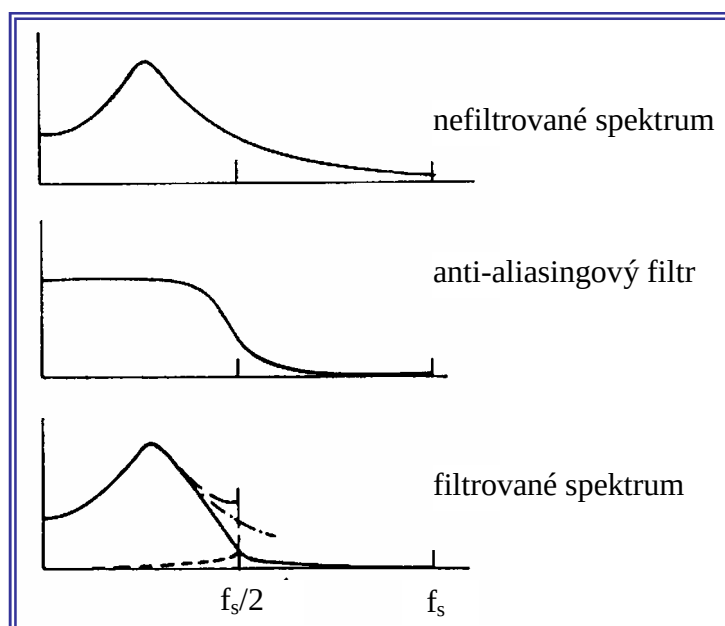
Je-li vzorkovací frekvence f_s , pak signál frekvence f a signál frekvence $(f_s - f)$ jsou po diskretizaci nerozlišitelné, a tato skutečnost způsobuje zkreslení spektra naměřeného pomocí DFT, i když je výpočet proveden přesně. V popisu DFT bylo uvedeno, že nejvyšší frekvence, která může být ve spektru (transformaci) obsažena, je $f_s/2$, a získané spektrum by se mělo na této frekvenci zastavit, bez ohledu na počet diskrétních hodnot.

Signál, který má skutečný frekvenční obsah zobrazený na obr.2.16 nahore, se v DFT objeví jako zkreslený tvar zobrazený na obr. 2.16 dole. Zkreslení směrem k hornímu konci platného frekvenčního rozsahu může být vysvětleno faktem, že část signálu, která má frekvenční složky nad $f_s/2$ se objeví zrcadlena v rozsahu $0-f_s/2$. Tyto vysokofrekvenční složky se tedy tváří, jakoby byly (alias) nízkofrekvenční a vytvoří se skutečnými nízkofrekvenčními složkami nerozlišitelnou směs.



Obr. 2.16 - Princip chyby typu "aliasing"

Řešením tohoto problému je použití anti-aliasingových filtrů, které podrobí původní časový signál nízkopásmovému filtru s ostrou sestupnou hranou s charakteristikou ukázanou na obr. 2.17. Výsledkem toho je, že se do analyzátoru dostane pozměněný časový průběh. Protože použité filtry samozřejmě nejsou úplně dokonalé a mají konečný sklon sestupné hrany, je nutné odstranit spektrální měření ve frekvenčním rozsahu blízkém Nyquistově frekvenci $f_s/2$. Typicky se odstraňuje frekvenční rozsah od $0,8 \cdot f_s/2$ až $f_s/2$. Z tohoto důvodu není výsledkem 2048 bodové transformace úplné 1024 čárové spektrum, které by se zobrazilo na obrazovce analyzátoru: typicky se zobrazuje pouze prvních 800 čar, protože ty vyšší jsou náchylné ke znečištění v důsledku nedokonalého anti-aliasingového procesu.



Obr. 2.17 - Princip anti-aliasingového filtru

Závěr je tedy takový, že již před vstupem časového signálu do A/D převodníku musí být zařazen anti-aliasingový filtr, a proto tyto filtry tvoří nedílnou součást každého analyzátoru.

2.6.2 Chyba únikem (leakage)

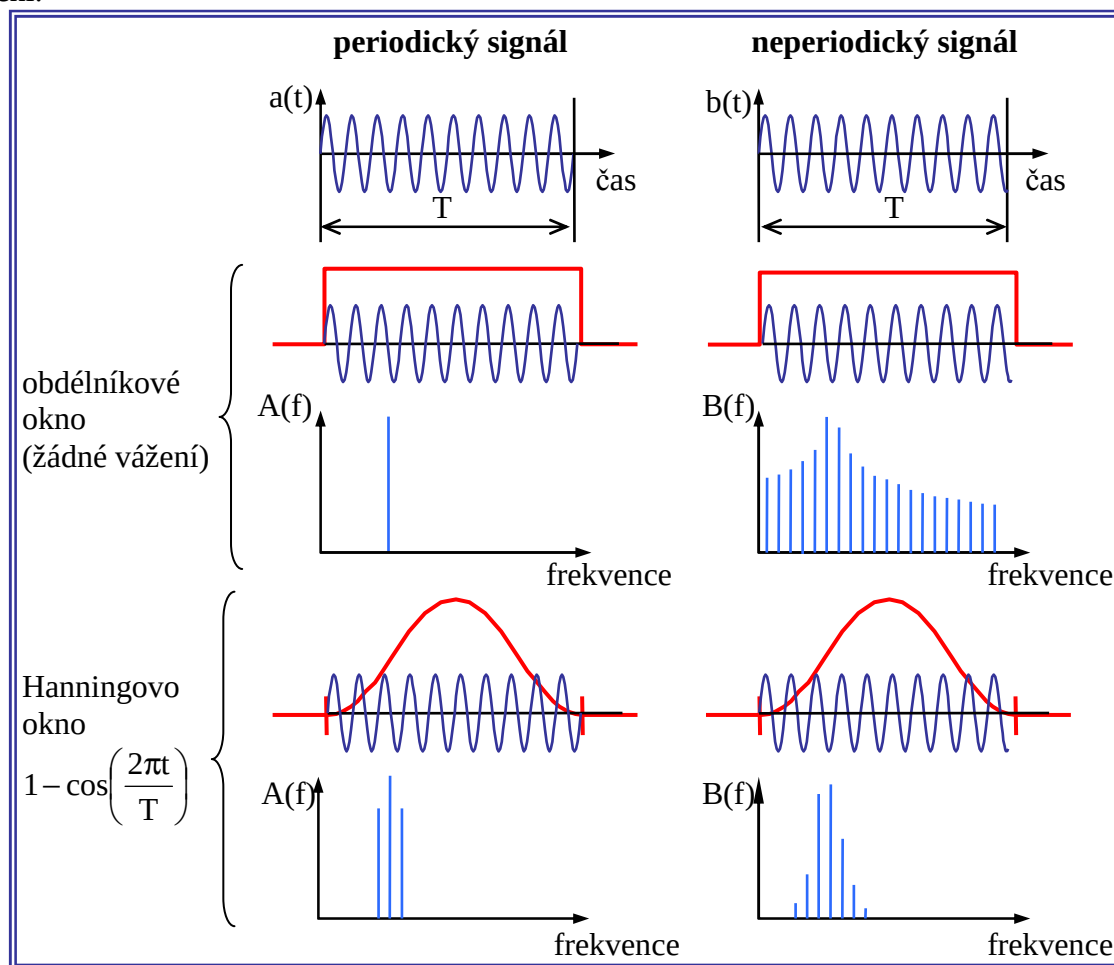
Chyba únikem je problém, který je přímým důsledkem nutnosti použít časový vzorek konečné délky spolu s předpokladem periodicity. Tento problém je nejlépe ukázán na dvou příkladech zobrazených na obr. 2.18 nahoře, kde jsou dva sinusové signály s frekvencemi, které se trochu liší, a které jsou podrobeny témuž procesu analýzy. V případě vlevo je signál v časovém okně T dokonale periodický a výsledné spektrum je prostě jediná čára - na frekvenci sinové vlny. V případě vpravo není předpoklad periodicity splněn, takže dochází k nespojitosti na konci vzorku. Výsledkem je spektrum, ve kterém není indikována pouze ta jedna frekvence, kterou má původní časový signál, a dokonce tato frekvence není v typických spektrálních čarách ani skutečně reprezentativní. Energie "unikne" do mnoha spektrálních čar blízkých skutečné frekvenci a spektrum je rozprostřeno přes několik čar. Tyto dva příklady představují nejlepší a nejhorší případ. Problém je závažnější při nižších frekvencích signálů.

Chyba únikem představuje v mnoha aplikacích digitálního zpracování signálu včetně měření FRF vážný problém. Způsobů, jak chybě únikem předejít nebo ji alespoň minimalizovat, je několik:

- Změna délky trvání měřeného vzorku tak, aby vyhověla základní periodicitě signálu, např. změnou doby měření T tak, aby pojala přesný počet cyklů měřeného signálu. I když tento způsob řešení může zcela odstranit chybu únikem, lze jej provést pouze tehdy, když analyzovaný signál opravdu je periodický - což většinou není pravda - a když periodu signálu lze určit - což je často obtížné a může to být prvním cílem analýzy. Navíc při použití FFT analyzátorů nelze měnit dobu měření T zcela libovolně, ale jen v určitých krocích v návaznosti na frekvenční rozsah měření (viz vztah 2.33).
- Prodloužení doby měření T , takže rozdíl mezi spektrálními čarami - frekvenční rozlišení - je jemnější (viz vztah 2.34). Tím se vliv chyby únikem neodstraní, ale jeho závažnost se sníží.
- Přidání nul na konec měřeného vzorku ("vycpání nulami"), čímž se částečně dosáhne předchozího efektu, ale bez požadavku na více dat.
- Modifikace získaného vzorku signálu tak, aby se vliv chyby únikem snížil. Tomuto procesu se říká "uzavření do oken" nebo *okenní transformace* a jeho používání je při zpracování signálů i modálních zkouškách časté. Okenní transformace znamená položení předepsaného profilu $w(t)$ na časový signál dříve, než se provede Fourierova transformace. Analyzovaný signál je potom součinem původního signálu a profilu okna (viz obr. 2.19). Vliv často používaného Hanningova okna na Fourierovu transformaci signálu je ukázán na obr. 2.18 dole. Další typy oken, které se při modálních zkouškách často používají (přechodové a exponenciální okno), jsou diskutovány v kapitole 4.2.1.1. Dalším známým typem okna je tzv. okno s plochým vrchem, které se používá při kalibraci snímačů.

Na obr. 2.19 je ukázáno, jak se projeví omezení časového signálu ve frekvenčním spektru. U digitálního signálu je frekvenční rozlišení spektra rovno převrácené hodnotě délky časového záznamu. Znamená to, že čím chceme mít lepší frekvenční rozlišení (při stejném frekvenčním rozsahu), tím delší musí být doba měření. A obráceně: čím delší je doba měření,

tím více času má přechodový signál na to, aby poklesl k nule, a tím menší je chyba únikem (a současně lepší frekvenční rozlišení). Chybu únikem lze tedy eliminovat prodloužením doby měření.



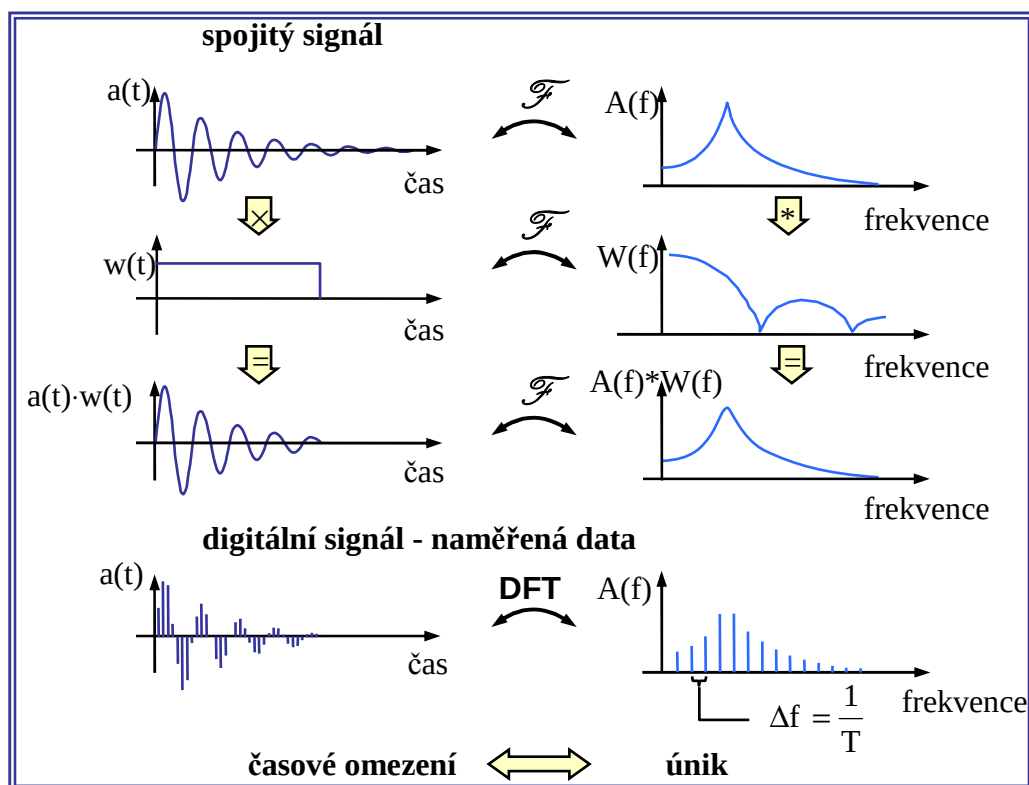
Obr. 2.18 - Vliv periodicity signálu a vliv váhových oken na chybu únikem

Podobně jako ve spektru se chyba únikem projevuje i ve frekvenční odezvě funkci - tam se této chybě říká *chyba rozlišení (resolution bias error)*. Vlivem této chyby může být naměřená hodnota amplitudy FRF v rezonancích nižší a v antirezonancích vyšší než je skutečná hodnota (viz obr. 2.20). Tato chyba se vyskytne, pokud je frekvenční rozlišení měření Δf mnohem hrubší, než frekvenční rozlišení systému Δf_s , tedy než takové frekvenční rozlišení, které by funkci přesně postihlo. Odpovídá to ořezání časového signálu, tedy tomu, že doba měření T je mnohem kratší, než je skutečná doba odezvy systému T_s :

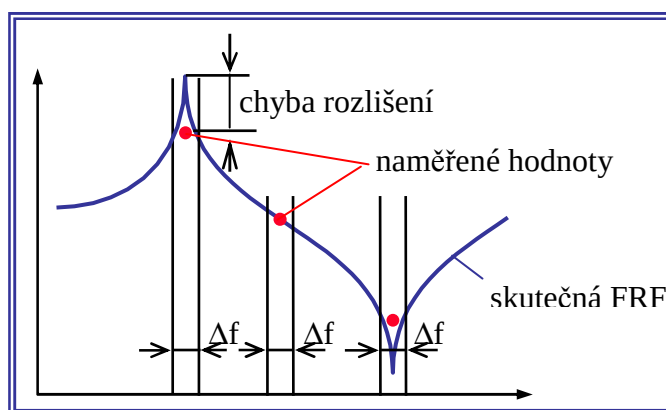
$$T \ll T_s \Leftrightarrow \Delta f \gg \Delta f_s$$

Prodloužení doby měření je možné u FFT analyzátorů buď tak, že zvětšíme počet frekvenčních čar, se kterými Fourierova transformace počítá (viz kap. 2.6), čímž se zlepší frekvenční rozlišení bez změny frekvenčního rozsahu měření. Pokud nechceme zvětšovat počet frekvenčních čar analyzátoru nebo pracujeme s typem analyzátoru, který to neumožňuje, existuje další možnost, jak frekvenční rozlišení zjemnit, a tou je zmenšení frekvenčního rozsahu měření. Při měření v základním pásmu (od 0 Hz do $f_{\max}$) to znamená omezit frekvenční rozsah shora. Pokud leží rezonance, které nás zajímají, ve vyšších

frekvencích, je nutné zvolit jiný postup. Tím je použití frekvenční lupy. Rozsah měření je potom $f_{\min}$ až $f_{\max}$ (blíže viz kap.2.6.3).

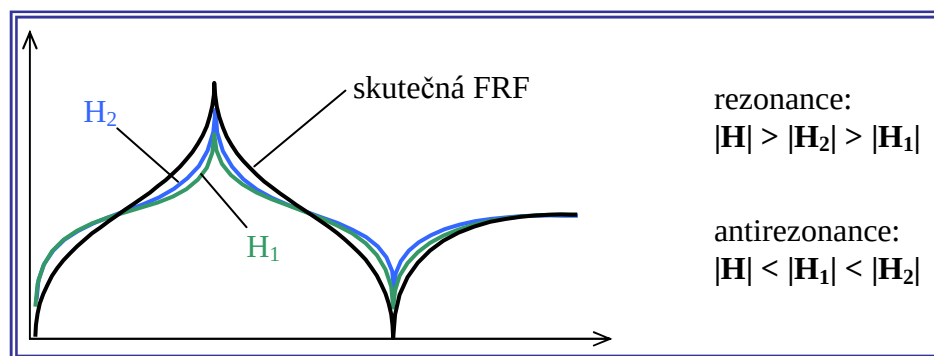


Obr. 2.19 - Vztah mezi časovým omezením signálu a chybou únikem ve spektru



Obr. 2.20 - Chyba únikem ve FRF - chyba rozlišení

Vztah mezi skutečnou FRF a jejími alternativními odhady H_1 a H_2 při výskytu chyby únikem ukazuje obrázek 2.21. Amplituda skutečné FRF je v rezonancích vždy vyšší a v antirezonancích vždy nižší než oba odhady, nicméně blíže ke skutečnosti je v rezonancích H_2 a v antirezonancích H_1 .

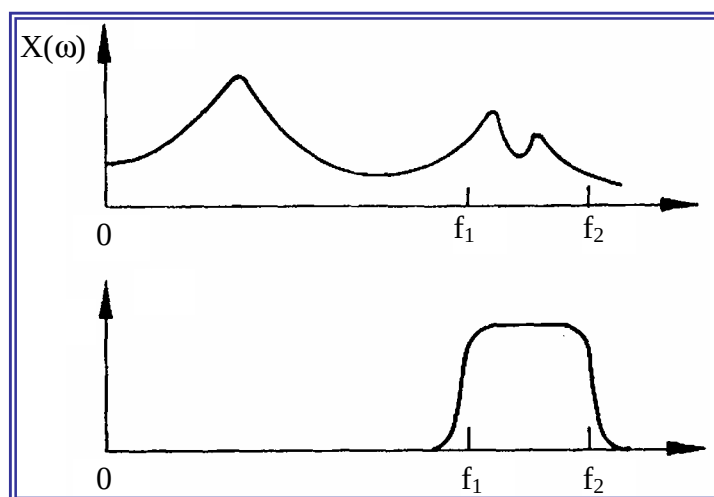


Obr. 2.21 - Chyba únikem v alternativních odhadech FRF

2.6.3 Frekvenční lupa (zoom)

Běžným řešením potřeby jemnějšího frekvenčního rozlišení je "zaostření na detail" frekvenčního rozsahu, který nás zajímá a soustředění všech spektrálních čar do úzkého pásma mezi $f_{\min}$ a $f_{\max}$ (namísto mezi 0 a $f_{\max}$ jako dosud). Existují různé způsoby jak tohoto výsledku dosáhnout, ale asi nejlépe je fyzikálně pochopitelný ten, který používá proces frekvenčního posunu spolu s řízeným aliasingovým zařízením.

Předpokládejme, že signál $x(t)$, který budeme analyzovat, má spektrum $X(\omega)$, které je zobrazeno na obr. 2.22 nahoře, a že se zajímáme o detailní (zoom) analýzu v okolí druhé a třetí špičky - mezi f_1 a f_2 . Když na signál aplikujeme pásmový filtr (obr. 2.22 dole) a provedeme DFT mezi 0 a $(f_2 - f_1)$, pak v důsledku aliasingového jevu popsaného v kapitole 2.7 se frekvenční složky mezi f_1 a f_2 objeví aliasovány v analyzovaném pásmu 0 až $f_2 - f_1$, s výhodou jemnějšího rozlišení.



Obr. 2.22 - Frekvenční lupa realizovaná pásmovým filtrem

Toto není jediná cesta, jak dosáhnout měření s frekvenční lupou, ale slouží k ilustraci principu. Ostatní metody jsou založeny na účinném posunutí frekvenčního počátku spektra

pomocí vynásobení původního časového signálu funkcí $\cos(\omega_1 t)$ a odfiltrováním vyšší ze dvou takto získaných složek. Předpokládejme například, že analyzovaný signál je:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

Jeho vynásobením $\cos(\omega_1 t)$ dostaneme:

$$x'(t) = A \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega_1 t) = \frac{A}{2} (\sin(\omega - \omega_1)t + \sin(\omega + \omega_1)t) \quad (2.37)$$

a když potom odfiltrujeme druhou složku, zůstane nám původní signál posunutý ve frekvenčním rozsahu dolů o ω_1 . Modifikovaný signál je potom analyzován v rozsahu 0 až $(\omega_2 - \omega_1)$, čímž získáme měření původního signálu s frekvenční lupou mezi ω_1 a ω_2 . U této metody jsou časové vzorky násobeny faktorem zvětšení lupy ($2\times$, $4\times$ atd.), doba měření je tedy násobkem původní doby měření a vzorkování se provádí pomaleji (také $2\times$, $4\times$ atd.), což je dáno novým platným frekvenčním rozsahem.

Když používáme frekvenční lupu k měření FRF v úzkém frekvenčním pásmu, je důležité zajistit, aby vně frekvenčního pásma, které nás zajímá, bylo co nejméně vibrační energie. To znamená, že kdykoliv je to možné, mělo by být buzení dodávané do struktury omezeno na pásmo, ve kterém bude provedena analýza. Tento problém je blíže diskutován v kapitole 4.2.1.1.

2.6.4 Průměrování

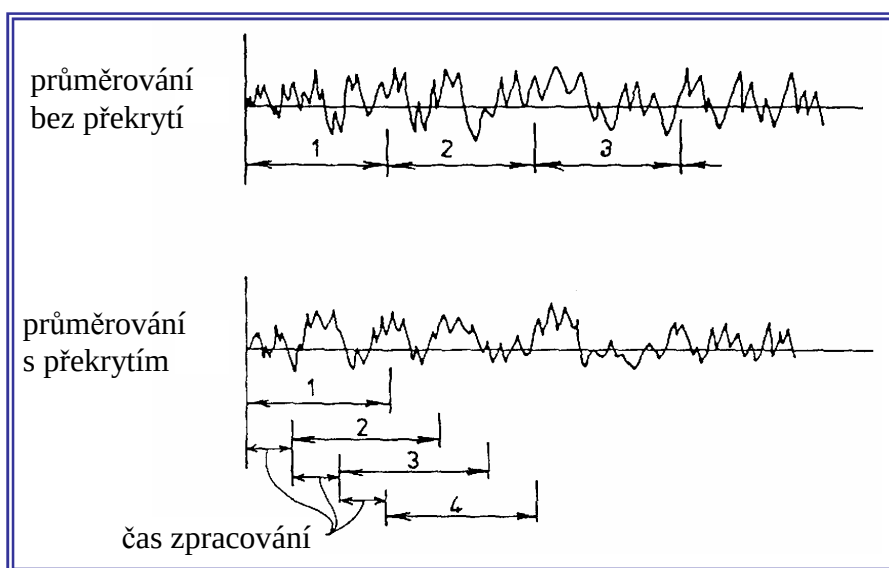
V této kapitole pojednáme o dalším rysu digitální spektrální analýzy, který se týká zvláštních požadavků na zpracování náhodných signálů (dosud jsme se zabývali deterministickými daty). Když analyzujeme náhodné vibrační signály, nestačí jen vypočítat Fourierovu transformaci - přesně vzato, tato ani pro náhodný proces neexistuje - a místo toho musíme získat odhady spektrálních hustot a korelačních funkcí, které se používají k charakteristice tohoto typu signálu. I když jsou tyto vlastnosti vypočteny z Fourierovy transformace, je třeba vzít v úvahu další okolnosti týkající se přesnosti a statistické spolehlivosti a věnovat jim pozornost. Obecně lze říci, že je nutné provést proces průměrování, který zahrne několik jednotlivých časových záznamů neboli vzorků, než dostaneme výsledek, který může být s důvěrou použit. Dvě hlavní okolnosti, které určují počet požadovaných průměrů jsou statistická spolehlivost a odstranění náhodného šumu ze signálů.

Existuje několik možností, které je možné si vybrat při nastavování analyzátoru do módu průměrování. Analyzátoři běžně nabízejí tyto módy průměrování:

- držení špičky - používá se spíše ve vibrační diagnostice při použití snímačů výchylky
- exponenciální - pozdější vzorky mají větší váhu než dřívější vzorky
- lineární - všechny vzorky mají stejnou váhu

Při modálních zkouškách se používá lineární průměrování, a to buď bez překrytí nebo s překrytím. Chceme-li průměrovat m vzorků, každý o délce trvání T , znamená to při průměrování bez překrytí celkovou dobu měření $m \times T$ (viz obr.2.23 nahoře). Výpočetní

kapacity moderních analyzátorů však dokáží DFT spočítat v extrémně krátkém čase a to má za následek, že nová transformace může být vypočtena dříve, než se sejme nový kompletní vzorek dat. V tomto případě je někdy pohodlné provést druhou transformaci co nejdříve a použít přitom posledních N datových bodů, i když některé z nich už mohly být použity v předchozí transformaci. Tento postup je znázorněn na obr. 2.23 dole. Je jasné, že 100 takto provedených průměrů nemůže mít stejné statistické vlastnosti jako 100 zcela nezávislých vzorků. Nicméně, tento postup je účinnější, než když se každý datový bod použije pouze jednou, což toto zpracování navíc prokazuje tím, že vytváří hladší spektra, než bychom dostali v případě, že by byl každý datový vzorek použit pouze jednou. Je to dáno tím, že při použití Hanningova okna jsou vzorky na svém počátku a konci potlačeny k nule a při průměrování bez překrytí by byly části signálu nevyužity.



Obr. 2.23 - Typy průměrování



Shrnutí pojmů

autospektrum
vzájemné spektrum
koherence
dvoukanálová analýza
deskriptory systému - FRF, IRF
přenosová funkce
šum
Fourierova transformace
Fourierovy koeficienty
aliasing
chyba únikem
Hanningovo okno
frekvenční rozlišení
frekvenční lupa
průměrování



Otázky

1. Jak je definováno autospektrum?
2. Jak je definováno vzájemné spektrum?
3. Jaký je rozdíl mezi jednostranným a oboustranným spektrem?
4. Ve kterém spektru se odprůměruje šum?
5. Jak je definována koherence?
6. Jaké jsou deskriptory systému v časové a frekvenční oblasti?
7. Jaký je vztah mezi přenosovou funkcí a frekvenční odezovou funkcí?
8. Co je to spektrum a jak ho získáme?
9. Popište podstatu chyby typu aliasing. Jak jí lze předcházet?
10. Popište podstatu chyby únikem. Jak jí lze předcházet?
11. Co je to frekvenční lupa?
12. Proč se provádí průměrování?
13. Jaké typy průměrování znáte?

3 TEORETICKÉ ZÁKLADY MODÁLNÍ ANALÝZY

V této kapitole se podrobně seznámíte s teoretickými základy modální analýzy. Odvodíme si frekvenční odezвовé funkce pro systém s jedním i více stupni volnosti. Budeme postupovat od jednoduššího příkladu netlumeného systému přes složitější případ systému s proporcionálním tlumením až po nejsložitější případ s obecným tlumením, přičemž budeme uvažovat dva modely tlumení - viskózní a hysterézní. Poznáte modální parametry - vlastní frekvence, modální tlumení a vlastní tvary, dozvíte se o ortogonálních vlastnostech vlastních vektorů i o jejich normování.



Čas ke studiu: 20 hodin



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

-  Popsat systém s jedním i s více stupni volnosti
-  Definovat různé modely tlumení
-  Odvodit frekvenční odezвовé funkce jednotlivých systémů
-  Zobrazit frekvenční odezвовé funkce
-  Normovat vlastní tvary



Výklad

Složitá struktura může být považována za množství hmot, spojených pružinami a tlumícími prvky. Tlumící síly ve skutečné struktuře nemohou být ani zdaleka odhadnuty s přesností srovnatelnou s pružnými a setrvačnými silami a přesná matematická simulace tlumících vlivů je nemožná. Přesto, aby bylo možné vzít disipativní (nekonzervativní) síly ve struktuře v úvahu, je třeba přijmout nějaké předpoklady o povaze tlumení ve struktuře tak, abychom dostali v praxi co nejlepší odhad tlumících sil. Mělo by to vést na jednoduchý matematický tvar, zvláště vhodný pro lineární pohybové rovnice - tlumící síly jsou při harmonickém buzení rovněž harmonické. Dva vhodné modely tlumení jsou:

- viskózní tlumení - tlumící účinek úměrný rychlosti $F_b = b \cdot v$
- hysterézní tlumení - koeficient tlumiče nepřímo úměrný frekvenci $F_b = \frac{k \cdot \gamma}{\omega} \cdot v$

3.1 Systém s jedním stupněm volnosti (SDOF)

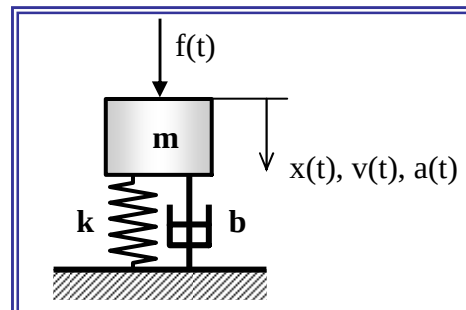
I když je pouze velmi málo praktických struktur, které mohou být realisticky modelovány systémem s jedním stupněm volnosti, vlastnosti takového systému jsou velmi důležité, protože vlastnosti složitějšího systému s více stupni volnosti (MDOF - Multi Degree

of Freedom) mohou být vždy vyjádřeny jako lineární superpozice mnoha SDOF (Single Degree of Freedom) charakteristik.

V základním modelu SDOF systému je $\mathbf{f(t)}$ obecná časově proměnná síla a $\mathbf{x(t)}$ je výchylka jako odezvová veličina. Fyzikální model se skládá z hmotnosti $\mathbf{m}$ a pružiny $\mathbf{k}$ a (v případě tlumeného systému) buď z viskózního tlumiče $\mathbf{b}$ nebo z hysterézního tlumiče $\mathbf{h}$.

V této kapitole popíšeme tři typy modelu systému:

- netlumený
- s viskózním tlumením
- s hysterézním (strukturním) tlumením



Obr. 3.1 - Systém s 1° volnosti (SDOF)

3.1.1 Netlumený systém s 1° volnosti

Fyzikální model netlumeného systému se skládá z hmoty $\mathbf{m}$ a pružiny $\mathbf{k}$.

Pro modální model předpokládáme vlastnosti systému bez vnější síly, tj. $\mathbf{f(t)=0}$ a pro tento případ platí pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.1)$$

po dosazení za $\ddot{x} = \ddot{x}$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

Předpokládané řešení této rovnice je:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

Po dosazení do pohybové rovnice vede k požadavku, aby

$$k - \omega^2 m = 0 \quad (3.4)$$

Modální model se tedy skládá z jediného řešení (módu vibrací) s vlastní frekvencí danou vztahem

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

Pro frekvenční odezovou analýzu uvažujeme buzení ve tvaru

$$f(t) = F e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

a předpokládáme řešení ve tvaru

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{F}$ jsou komplexní, aby mohly zahrnout jak amplitudu, tak fázi. Nyní má pohybová rovnice tvar

$$(k - \omega^2 m) X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

ze kterého dostaneme požadovaný odezvosvý model ve formě frekvenční odezvosvé funkce receptance:

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{k - \omega^2 m} = \alpha(\omega) \quad (3.9)$$

Tato funkce, stejně jako ostatní formy FRF, je nezávislá na buzení.

3.1.2 Systém s 1° volnosti s viskózním tlumením

3.1.2.1 Volné kmitání

Když přidáme viskózní tlumič **b**, změní se pohybová rovnice volného kmitání na tvar

$$m \cdot a + b \cdot v + k \cdot x = 0 \quad (3.10)$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (3.11)$$

Předpokládáme řešení v obecnějším tvaru (*s* je komplexní, ne imaginární jako u netlumeného systému):

$$x(t) = X e^{st} \quad \text{Potom derivace:} \quad \dot{x}(t) = X s e^{st}$$

$$\ddot{x}(t) = X s^2 e^{st}$$

Po dosazení do pohybové rovnice dostaneme charakteristickou rovnici:

$$m s^2 + b s + k = 0 \quad (3.12)$$

Řešení charakteristické rovnice:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad (3.13)$$

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.14)$$

$$s_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\Omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.15)$$

$$s_{1,2} = -\delta \pm i\Omega \quad (3.16)$$

$$\text{Kde: } \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots \text{ vlastní netlumená frekvence}$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \dots \text{ konstanta dozívání} \quad (3.17)$$

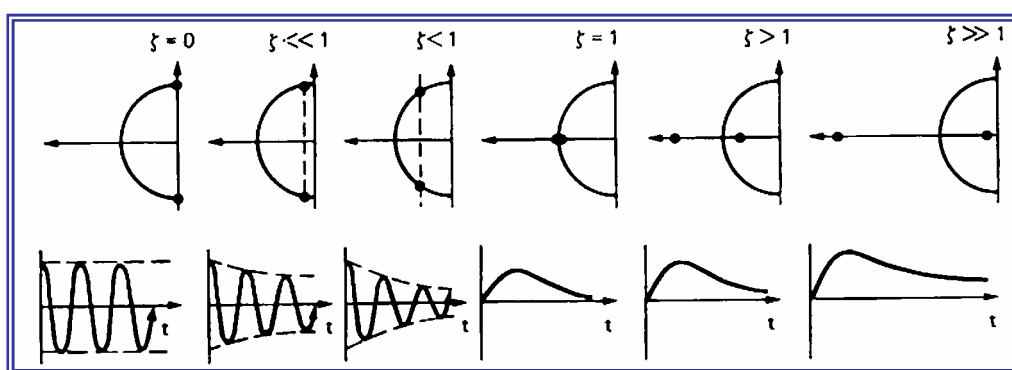
$$\zeta = \frac{\delta}{\Omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{b}{b_{kr}} \quad \dots \text{ poměrný útlum} \quad (3.18)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \Omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \dots \text{vlastní tlumená frekvence} \quad (3.19)$$

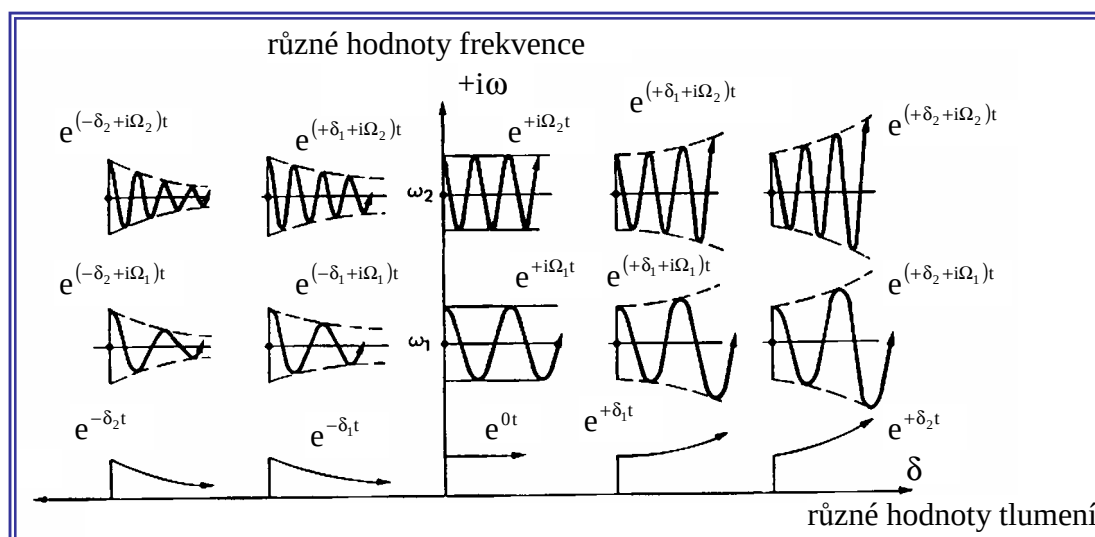
Kořeny charakteristické rovnice závisí na hodnotě poměrného útlumu ζ . Pro tzv. kladné tlumení ($\zeta \geq 0$) mohou nastat 3 případy, a tedy i 3 různé druhy pohybu (viz obr.3.2):

- $\zeta = 0$ netlumené kmitání
 s_1 a s_2 jsou imaginární čísla
- $\zeta < 1$ tlumené kmitání
 s_1 a s_2 jsou komplexně sdružená čísla (viz obr. 3.3)
- $\zeta \geq 1$ aperiodický pohyb
 s_1 a s_2 jsou reálná čísla (pro $\zeta=1$: $s_1 = s_2 = -\delta$)

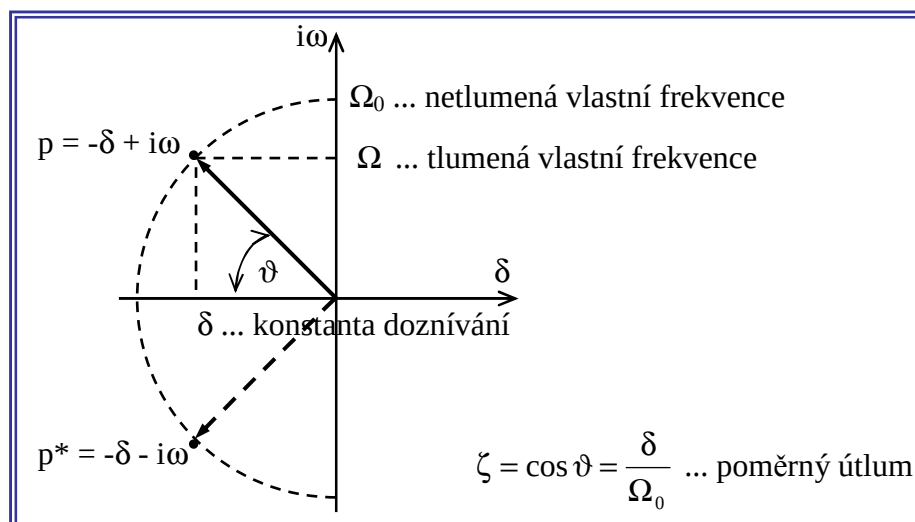
Pokud je reálná část kořenu charakteristické rovnice kladná (tzn. $\zeta < 0$), jde o tzv. záporné tlumení a dochází k samobuzenému kmitání (viz obr. 3.3 vpravo).



Obr. 3.2 - Poloha pólů v závislosti na hodnotě poměrného útlumu



Obr. 3.3 - Odezva systému v závislosti na hodnotě vlastní frekvence a tlumení



Obr. 3.4 - Komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice v Laplaceově rovině

3.1.2.2 Vynucené kmitání

Je-li pohyb způsoben působením harmonické síly, má pohybová rovnice systému s viskózním tlumením tvar:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3.20)$$

kde $f(t) = Fe^{i\omega t}$... harmonická budící síla

$x(t) = Xe^{i\omega t}$... předpokládané řešení a jeho derivace:

$$\dot{x}(t) = i\omega Xe^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Xe^{i\omega t}$$

Po vydělení rovnice (3.20) hmotností a dosazení vztahů (3.5) a (3.17) a předpokládaného řešení do pohybové rovnice dostaneme:

$$-\omega^2 X + 2i\omega \cdot \zeta \Omega_0 X + \Omega_0^2 \cdot X = \Omega_0^2 \cdot \frac{F}{k} \quad (3.21)$$

Odtud je komplexní amplituda výchylky:

$$X = \frac{\Omega_0^2 \cdot \frac{F}{k}}{\Omega_0^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\Omega_0}$$

$$\frac{F}{k} = X_{st} \quad \dots \text{statická výchylka}$$

$$X = \frac{\frac{F}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + i2\zeta \cdot \frac{\omega}{\Omega_0}}$$

$$\frac{\omega}{\Omega_0} = \eta \quad \dots \text{činitel naladění}$$

$$X = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta} \cdot X_{st} \quad (3.22)$$

$$|X| = X_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad \dots \text{velikost komplexní amplitudy} \quad (3.23)$$

Nyní provedeme odvození ustáleného řešení pohybové rovnice:

$$X = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta} \cdot \frac{F}{k} \quad \dots \text{komplexní amplituda výchylky}$$

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad \dots \text{časový průběh výchylky}$$

Je vidět, že výchylka je přímo úměrná působící síle, přičemž konstanta úměrnosti je:

$$H(\eta) = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta} \quad (3.24)$$

což je tzv. *frekvenční odezвовá funkce receptance* (v bezrozměrném tvaru).

Jelikož je výchylka komplexní číslo, můžeme ji rozdělit na reálnou a imaginární složku (tím, že vynásobíme čítec i jmenovatel komplexním doplňkem jmenovatele:

$$x(t) = \left(\frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} - \frac{2\zeta\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} i \right) \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

Je vidět, že výchylka má jednu složku

$$\text{Re}(x) = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

která je ve fázi s budící silou a druhou složku

$$\text{Im}(x) = \frac{-2\zeta\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

která se o 90° opoždí za budící silou. Na obrázku (3.5) znázorňují vektory OA a OB reálnou a imaginární složku výchylky. Vektor OC představuje amplitudu výchylky danou výrazem $\sqrt{\text{Re}^2(x) + \text{Im}^2(x)}$, tedy:

$$|x(t)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Výchylka se opoždí za budící silou o úhel θ , daný vztahem:

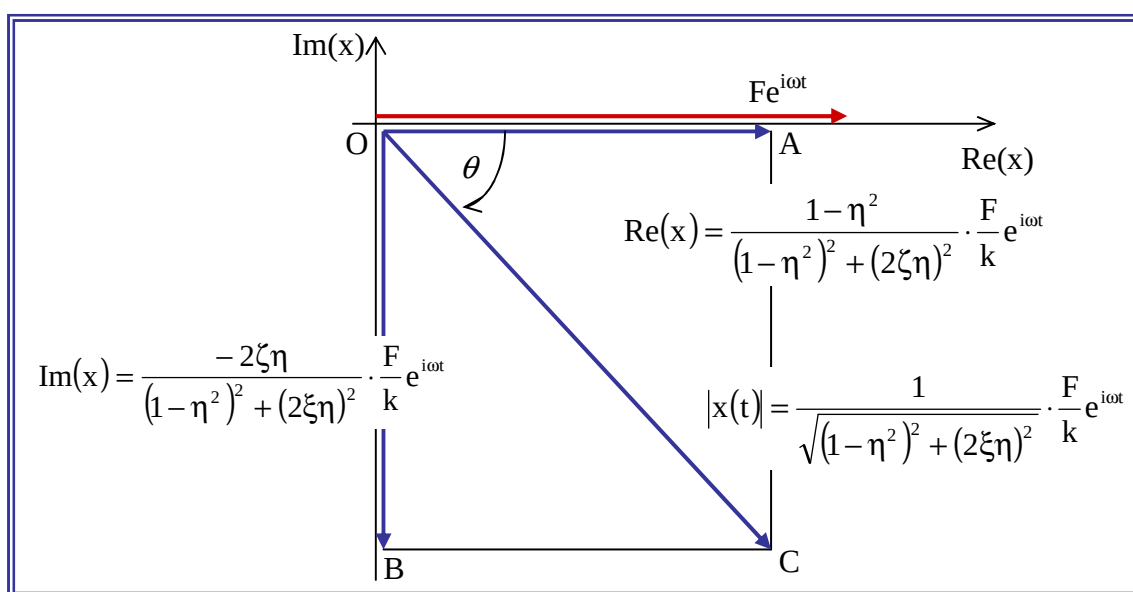
$$\theta = \arctg \frac{-2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \quad (3.29)$$

Ustálené řešení pohybové rovnice lze tedy psát ve tvaru:

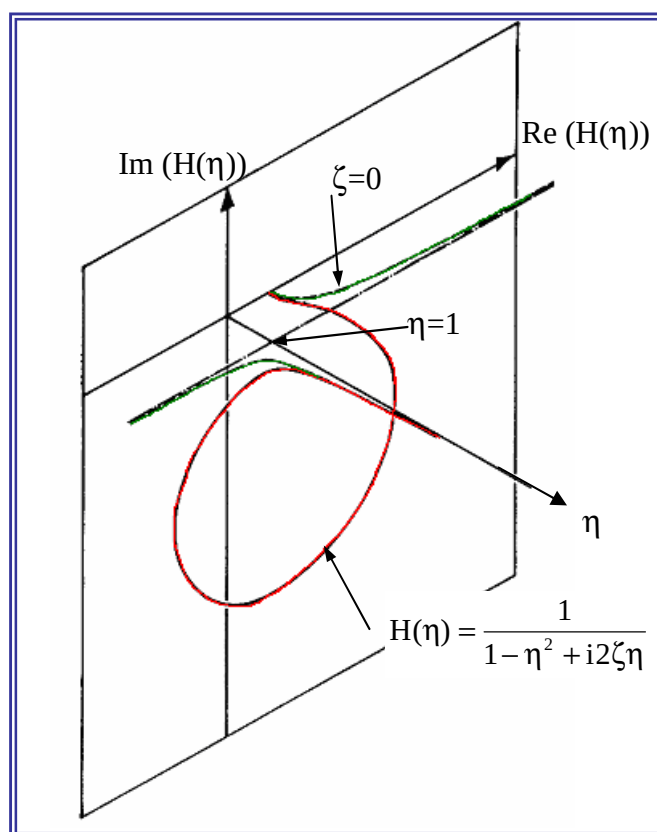
$$x(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \right] \cdot \frac{F}{k} e^{i(\omega t - \theta)} \quad (3.30)$$

Výraz v hranatých závorkách je absolutní hodnota komplexní frekvenční odezvy. Říká se mu také faktor zesílení a má význam bezrozměrného poměru mezi amplitudou výchylky X a statickou výchylkou F/k .

$$|H(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (3.31)$$



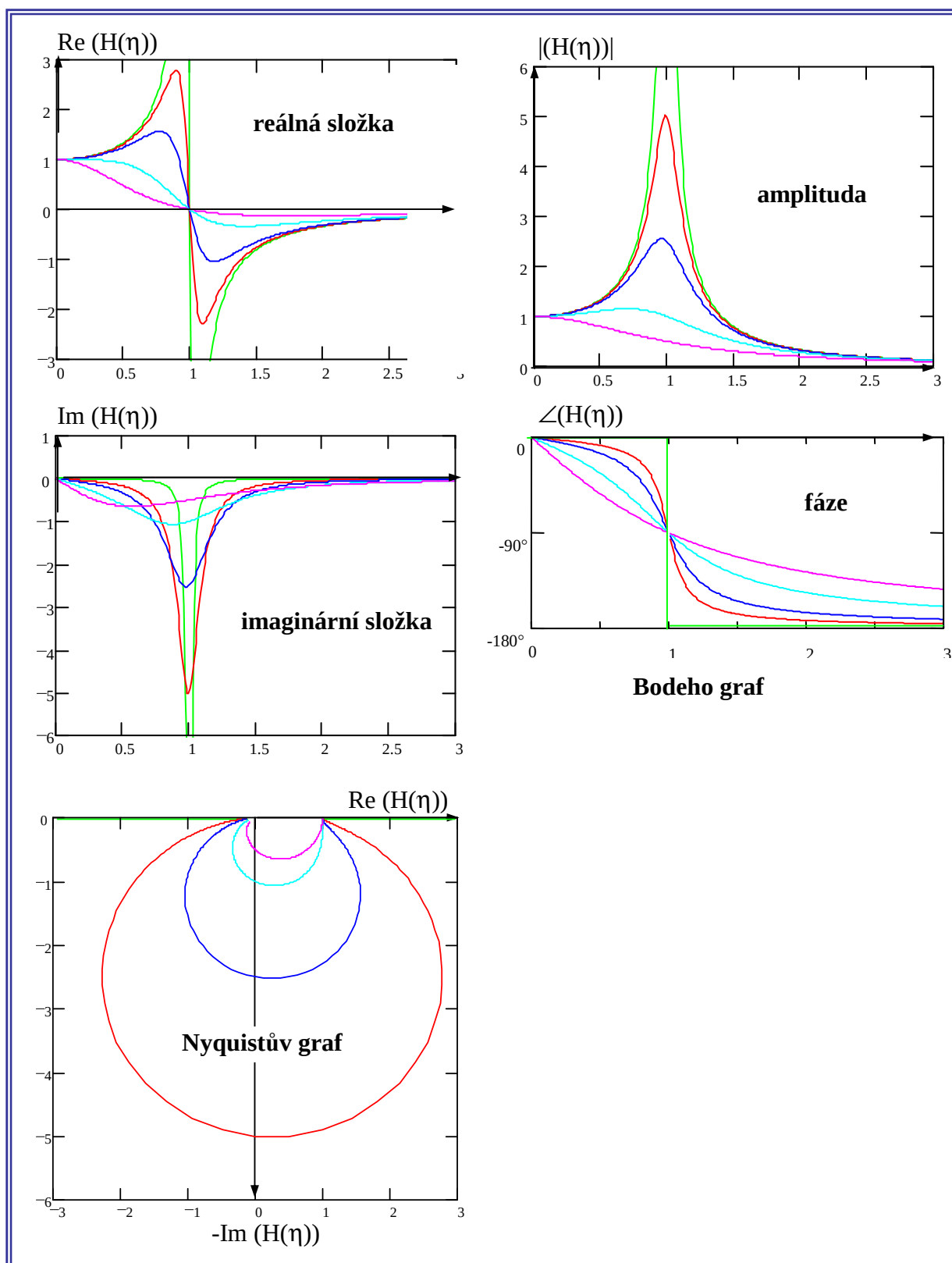
Obr. 3.5 - Vztah mezi komplexní výchylkou a budící silou



Obr. 3.6 Prostorový graf frekvenční odezvosvé funkce

Frekvenční odezvosvá funkce dle vztahu (3.24) je komplexní a současně je to funkce frekvence (resp. činitele naladění). Znamená to, že ji nelze zobrazit v jednom dvourozměrném grafu. Její prostorové znázornění je na obr. 3.6. Červená křivka platí pro tlumený systém, zelená pro netlumený systém (v tomto případě leží celá křivka v rovině dané osami η a $\text{Re}(\mathbf{H}(\eta))$).

Projekce této prostorové křivky do jednotlivých rovin je uvedena na obr. 3.7 vlevo a představuje dva z možných způsobů zobrazení FRF - současné zobrazení závislosti reálné a imaginární složky FRF na frekvenci, resp. na činiteli naladění (vlevo nahoře), nebo tzv. *Nyquistův diagram*, který je zakreslen v rovině $[\text{Re}(\mathbf{H}(\eta)); \text{Im}(\mathbf{H}(\eta))]$ - vlevo dole. V Nyquistově grafu je informace o frekvenci skryta - graf je vykreslen od počáteční po koncovou frekvenci ve směru hodinových ručiček, přičemž největší část kružnice znázorňuje oblast kolem rezonance (podrobněji viz kap. 4.3.1.2). Různé barvy křivek jsou pro různé úrovně tlumení - od zelené pro netlumený systém po fialovou s kritickým tlumením ($\zeta=1$).



Obr. 3.7 - Různé způsoby zobrazení FRF - systém s viskózním tlumením

Velmi častým způsobem zobrazení FRF je tzv. Bodeho graf, což je současné znázornění amplitudy FRF a její fáze, obojí v závislosti na frekvenci (činiteli naladění) - viz obr. 3.7 vpravo.

3.1.2.3 Určení rezonančního naladění

Rezonanci můžeme definovat jako stav, kdy amplituda FRF je maximální. Z grafu závislosti amplitudy FRF na činiteli naladění je vidět, že rezonanční vrchol je pro netlumený systém při $\eta=1$ a se vzrůstajícím tlumením v systému se posouvá směrem doleva. Pro určení rezonančního činitele naladění stačí derivovat vztah (3.31) podle činitele naladění a tuto derivaci položit rovnu nule.

$$|H(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

$$\frac{dH(\eta)}{d\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots \Rightarrow \quad \eta_{\text{res}} = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (3.32)$$

Potom rezonanční budící frekvence je:

$$\omega_{\text{res}} = \Omega_0 \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (3.33)$$

Amplituda FRF v rezonanci a výchylka v rezonanci jsou:

$$H(\omega_{\text{res}}) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.34)$$

$$X_{\text{res}} = X_{\text{st}} \cdot \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.35)$$

Pro malé tlumení ($\zeta < 0.05$) jsou křivky téměř symetrické podle svislé osy procházející $\eta=1$. Špičková hodnota $|H(\omega)|$ je v bezprostřední blízkosti $\eta=1$ dána vztahem

$$H(\omega_{\text{res}}) \doteq \frac{1}{2\zeta} = Q \quad Q \dots \text{faktor kvality} \quad (3.36)$$

3.1.2.4 Určování tlumení z grafů frekvenční odezvosvé funkce

a) Určení tlumení z grafu závislosti reálné složky $H(\eta)$ na η

Následujícím postupem odvodíme, pro jaké naladění η_1 a η_2 a jim odpovídající budící frekvence ω_1 a ω_2 se vyskytují lokální extrémy ve funkční závislosti reálné složky FRF na frekvenci. Tyto hodnoty frekvencí se dají z grafu jednoduše odečíst a pomocí nich lze vyjádřit poměrný útlum ζ .

$$H(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2 + i2\zeta\eta}$$

$$H(\eta) = \frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} + \frac{2\zeta\eta}{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} i$$

$$\operatorname{Re} H(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}$$

$$\frac{d \operatorname{Re} H(\eta)}{d\eta} = \dots\dots\dots = 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta_1 = \sqrt{1 - 2\zeta}$$

$$\eta_2 = \sqrt{1 + 2\zeta}$$

$$\omega_1 = \Omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\zeta} \quad (3.37)$$

$$\omega_2 = \Omega_0 \cdot \sqrt{1 + 2\zeta} \quad (3.38)$$

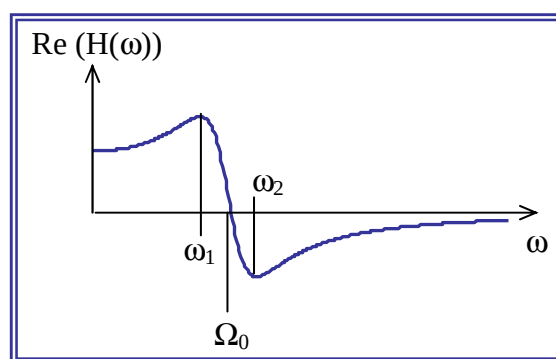
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{1 + 2\zeta}}{\sqrt{1 - 2\zeta}}$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1 + 2\zeta}{1 - 2\zeta}$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cdot (1 - 2\zeta) = 1 + 2\zeta$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cdot 2\zeta - 1 - 2\zeta = 0$$

$$2\zeta = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 1} \quad (3.39)$$



Obr. 3.8. - Určování tlumení z $\operatorname{Re}(H(\omega))$

b) Určení tlumení pomocí bodů s polovičním výkonem

Body s polovičním výkonem (*half-power points*) jsou body na grafu amplitudy funkce $H(\omega)$, ve kterých amplituda poklesne na hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot H_{\text{res}}$, tedy na $\frac{1}{\sqrt{2}}$ špičkové hodnoty. Ve výkonovém (power) spektru by to byla 1/2 špičkové hodnoty - odtud název half-power points.

Je-li graf $H(\omega)$ zobrazen v logaritmických souřadnicích, jsou tyto body tam, kde špičková amplituda poklesne o 3dB:

$$\frac{H_{\text{res}}}{H_{\text{halfpower}}} = \sqrt{2}$$

$$20 \cdot \log H_{\text{res}} - 20 \cdot \log H_{\text{halfpower}} = 20 \cdot \log \sqrt{2} = 3$$

$$H_{\text{res}} - H_{\text{halfpower}} = 3\text{dB}$$

Označíme-li tyto body $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ a jim příslušné frekvence ω_1 a ω_2 , pak rozdíl ve frekvencích $\omega_2 - \omega_1$ se nazývá *3dB pásmo systému*. Pro malé tlumení platí:

$$\Delta\omega_{3\text{dB}} = \omega_2 - \omega_1 = 2 \cdot \zeta \cdot \Omega_0$$

kde $\Delta\omega_{3\text{dB}}$ je 3dB pásmo. Dále dostaneme:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega_0} = 2\zeta \quad (3.40)$$

Nyní dokážeme, že frekvence ω_1 a ω_2 jsou pro malé tlumení rovny frekvencím, které jsme získali v předešlém odstavci při hledání extrémů v grafu reálné složky FRF. Budeme předpokládat, že tomu tak je a do vztahu (3.40) dosadíme vztahy (3.37) a (3.38):

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega_0} = 2\zeta$$

$$\Omega_0 \cdot \sqrt{1+2\zeta} - \Omega_0 \cdot \sqrt{1-2\zeta} = \Omega_0 \cdot 2\zeta$$

$$1+2\zeta - 2 \cdot \sqrt{(1+2\zeta) \cdot (1-2\zeta)} + 1-2\zeta = 4\zeta^2$$

$$2 - 2\sqrt{1-4\zeta^2} = 4\zeta^2$$

$$\sqrt{1-4\zeta^2} = 1-2\zeta^2$$

Pro malé tlumení ($\zeta < 0,05$) platí tedy :

$$1 \doteq 1$$

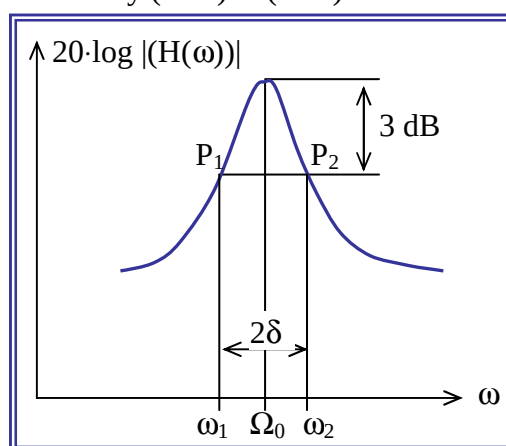
Pro určování tlumení u málo tlumených systémů lze tedy s výhodou použít i při odečítání z grafu reálné složky FRF zjednodušený vztah (3.40). Aby byl tento vztah platný, musí také platit:

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\delta \quad (3.41)$$

Jelikož graf amplitudy FRF je v okolí rezonance symetrický, platí dále:

$$\omega_1 = \Omega_0 - \delta \quad (3.42)$$

$$\omega_2 = \Omega_0 + \delta \quad (3.43)$$



Obr. 3.9. - Určování tlumení z 3dB pásmo

3.1.3 Systém s 1° volnosti s hysterézním (strukturním) tlumením

3.1.3.1 Vynucené kmitání

Sledování chování skutečných struktur naznačilo, že model s viskózním tlumičem, pokud se použije na systémy s více stupni volnosti, neodpovídá zcela skutečnosti. Reálné struktury vykazují frekvenční závislost, která není standardním viskózním tlumičem popsána. Je zapotřebí tlumič, jehož tlumící účinek je nepřímo úměrný frekvenci, tj.:

$$b = \frac{h}{\omega} = \frac{k\gamma}{\omega} \quad (3.44)$$

kde γ je ztrátový faktor strukturního tlumení

Pozn.: V literatuře se ztrátový faktor strukturního tlumení označuje znakem η , zde ale použijeme znak γ , aby nedošlo k záměně s činitelem naladění.

Tento hysterézní model umožňuje jednodušší analýzu systémů s více stupni volnosti, ale naopak je obtížné přesné řešení volného kmitání. Proto provedeme pouze řešení vynuceného kmitání.

Pohybová rovnice systému má tvar:

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \cdot \dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3.45)$$

kde $f(t) = Fe^{i\omega t}$... harmonická budící síla

$x(t) = Xe^{i\omega t}$... předpokládané řešení a jeho derivace:

$$\dot{x}(t) = i\omega Xe^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Xe^{i\omega t}$$

Po dosazení vztahu (3.44) a předpokládaného řešení do pohybové rovnice (3.45) dostaneme:

$$-m\omega^2 \cdot X + i\omega \cdot \frac{k\gamma}{\omega} \cdot X + k \cdot X = F \quad (3.46)$$

$$(-m\omega^2 + ik\gamma + k) \cdot X = F$$

Po vydělení tuhostí k a dosazení vztahu (3.5):

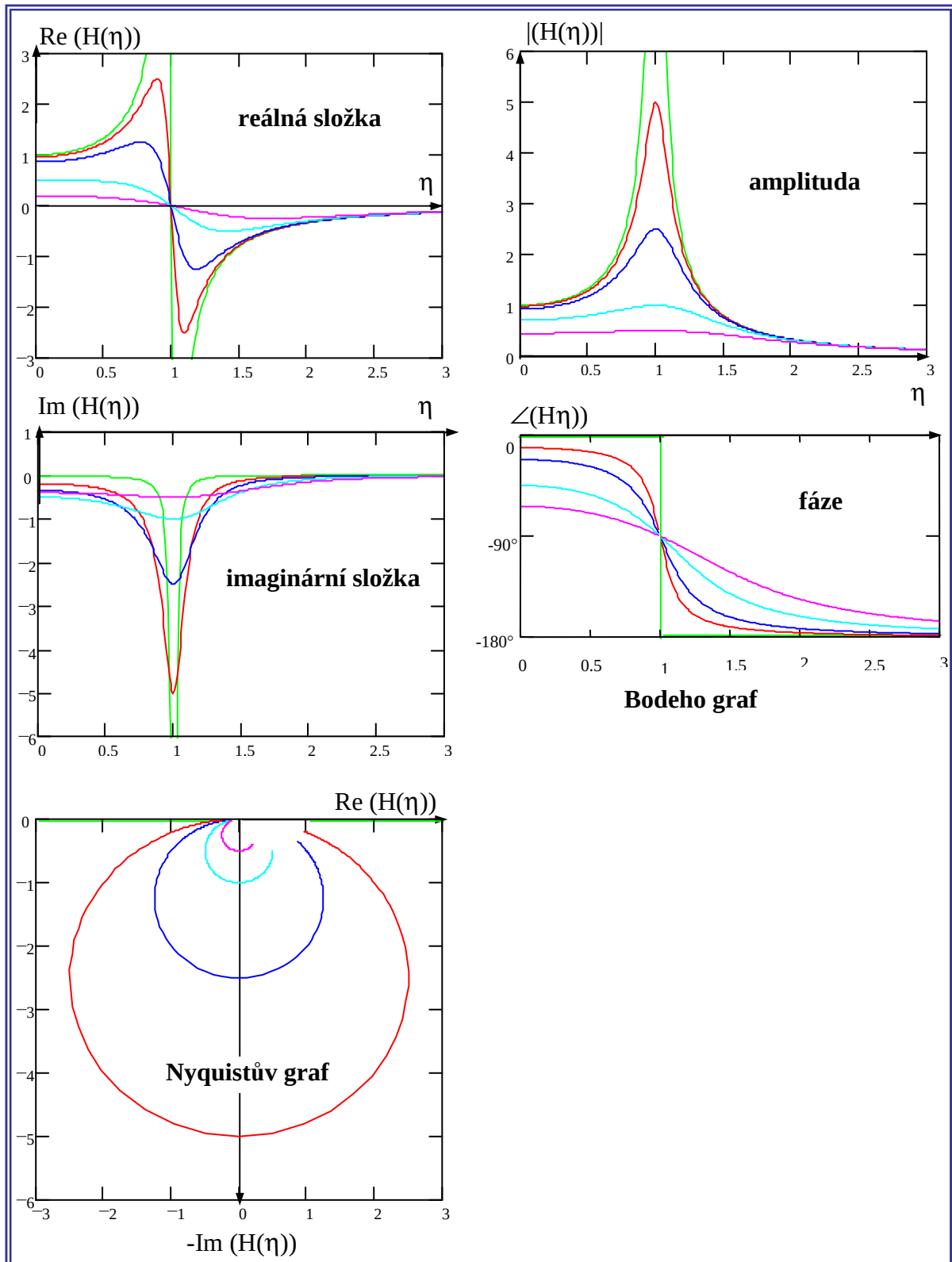
$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} + i\gamma\right) \cdot X = \frac{F}{k}$$

Potom komplexní amplituda výchylky:

$$X = \frac{1}{1 - \eta^2 + i\gamma} \cdot \frac{F}{k} \quad (3.47)$$

$$X = \frac{1}{1 - \eta^2 + i\gamma} \cdot X_{st}$$

$$|X| = X_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2}} \quad \dots \text{velikost komplexní amplitudy} \quad (3.48)$$



Obr. 3.10 - Různé způsoby zobrazení FRF - systém s hysterézním tlumením

Další postup je analogický postupu z kapitoly 3.1.2.2 pro systém s viskózním tlumením.

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \frac{1}{1 - \eta^2 + i\gamma} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad \dots \text{časový průběh výchylky} \quad (3.49)$$

$$x(t) = \left[\frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2} i \right] \frac{F}{k} \cdot e^{i\omega t}$$

$$|x(t)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2}} \cdot \frac{F}{k} e^{i\omega t} \quad (3.50)$$

$$\theta = \arctg \frac{-\gamma}{1 - \eta^2} \quad \dots \text{fázové zpoždění výchylky za budící silou} \quad (3.51)$$

$$x(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2}} \right] \cdot \frac{F}{k} e^{i(\omega t - \theta)} \quad (3.52)$$

Výraz v hranatých závorkách je opět absolutní hodnota frekvenční odezvy, tedy faktor zesílení a má opět význam bezrozměrného poměru mezi amplitudou výchylky X a statickou výchylkou F/k .

$$|H(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2}} \quad (3.53)$$

Na obr.3. 10 jsou opět uvedeny různé způsoby zobrazení FRF se stejnou mírou tlumení, jako tomu bylo na obr.3.7. U systému s hysterézním tlumením se rezonanční vrchol v grafu amplitudy FRF s narůstajícím tlumením neposouvá doleva, ale zůstává stále na naladění $\eta=1$. Naopak při vzrůstajícím tlumení graf nezačíná na hodnotě amplitudy 1 odpovídající statické výchylce, ale na hodnotě menší. Podobné rozdíly jsou patrné při všech způsobech zobrazení.

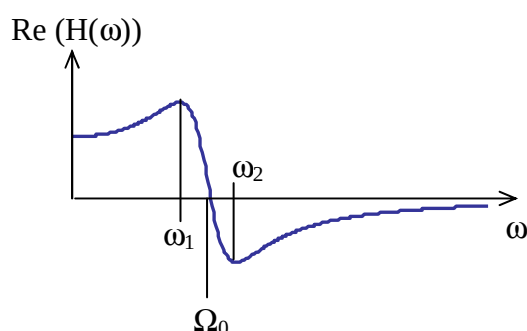
3.1.3.2 Určování tlumení z grafů frekvenční odezvy funkce

Stejným postupem jako v kapitole 3.1.2.4 určíme tlumení z grafu závislosti reálné složky $H(\eta)$ na činiteli naladění η .

$$H(\eta) = \frac{1}{1 - \eta^2 + i\gamma}$$

$$H(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2} - \frac{\gamma}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2} i$$

$$\text{Re } H(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2}$$



Určení ω_1 a ω_2 :

$$\frac{d \operatorname{Re} H(\eta)}{d\eta} = \dots\dots\dots = 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta_1 = \sqrt{1-\gamma}$$

$$\eta_2 = \sqrt{1+\gamma}$$

$$\omega_1 = \Omega_0 \cdot \sqrt{1-\gamma} \quad (3.54)$$

$$\omega_2 = \Omega_0 \cdot \sqrt{1+\gamma} \quad (3.55)$$

Stejným postupem jako u systému s viskózním tlumením dostaneme:

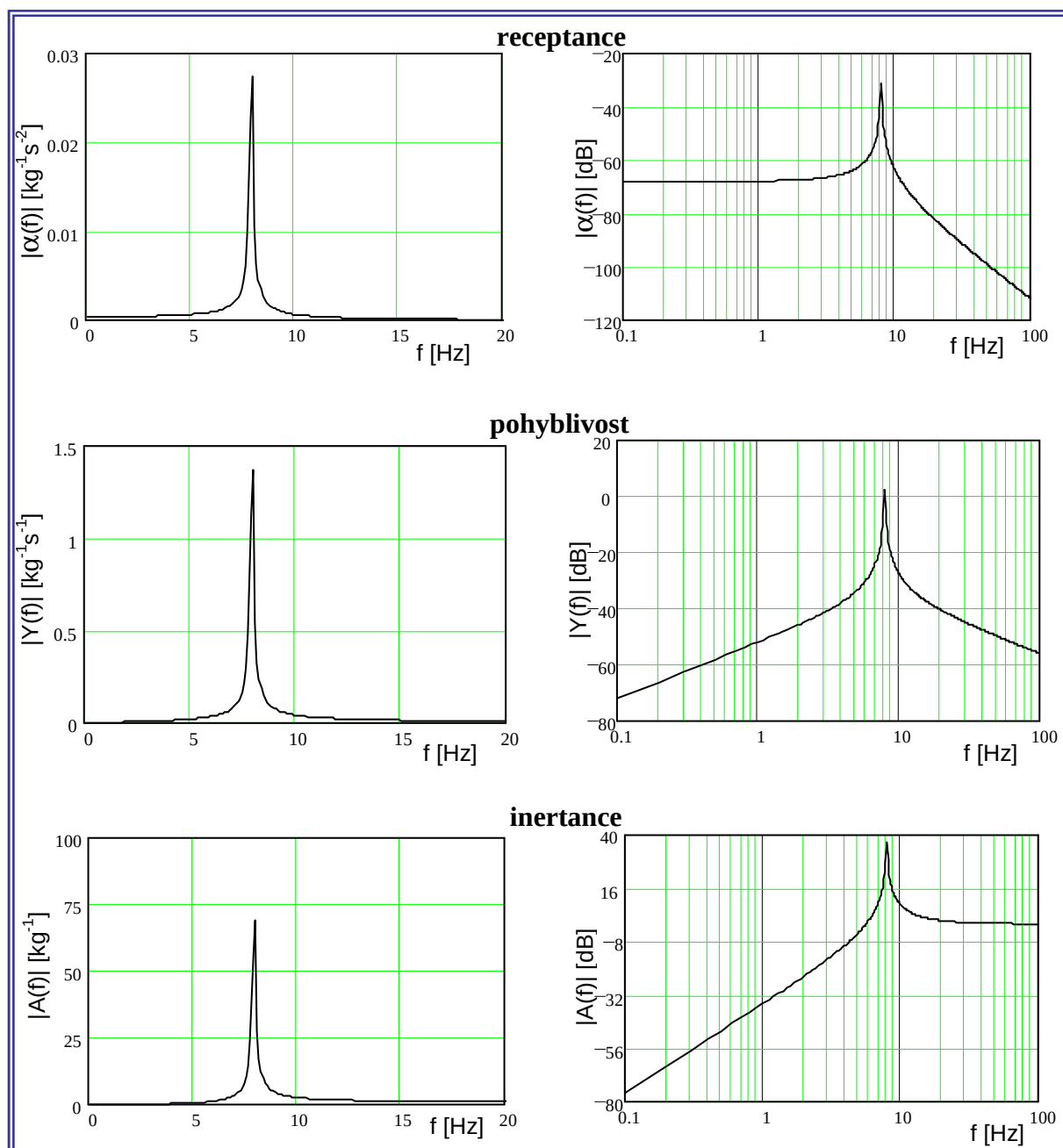
$$\gamma = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 1} \quad (3.56)$$

Pro malé tlumení platí přibližně:

$$2\zeta = \gamma \quad (3.57)$$

3.1.4 Různé formy FRF pro systém s 1° volnosti

Pro všechny tři typy systémů - netlumený, s viskózním a hysterézním tlumením - jsme odvodili frekvenční odezvou funkci ve formě receptance, tedy s odezвовým parametrem výchylkou. Při modálních zkouškách však většinou měříme odezvu akcelerometrem, takže se setkáváme častěji s FRF ve formě inertance, tedy s odezвовým parametrem zrychlením. V kapitole 1.3 byly probrány vztahy mezi jednotlivými formami FRF a fakt, že ve frekvenční oblasti dostaneme formy FRF odvozené z receptance pouhým násobením $i\omega$, viz vztahy 1.6 a 1.7. Na grafech závislosti amplitudy FRF na frekvenci se dá poznat, o kterou formu FRF jde, pouze při zobrazení v logaritmických souřadnicích (viz obr.3.8). V ostatních grafech je patrný vždy posun o 90° , takže např. Nyquistův graf je u FRF pohyblivosti v pravé polorovině a u FRF inertance v horní polorovině atp. Všechny detaily v tomto textu nebudeme rozebírat.



Obr. 3.11 - Různé způsoby FRF podle odezвовého parametru

3.1.5 Geometrické vlastnosti Nyquistova grafu

Velmi výhodným způsobem zobrazení frekvenční odezвовé funkce pro účel získání modálních parametrů je Nyquistův graf, protože podrobně vykresluje oblast kolem rezonance za současného potlačení mimorezonančních oblastí. Nyquistův diagram vypadá pro všechny typy FRF přibližně jako kružnice. Přesnou kružnici však vykreslí jen ve dvou případech:

- *pohyblivost* systému s *viskózním* tlumením
- *receptance* systému s *hysterézním* tlumením

To je třeba vzít v úvahu při extrakci modálních parametrů z naměřených dat (u metody aproximace kružnicí, *circle-fit*).

3.1.5.1 Pohyblivost systému s viskózním tlumením

Pohyblivost systému s viskózním tlumením má tvar:

$$Y(\omega) = i\omega\alpha(\omega) = \frac{i\omega}{k - \omega^2 m + i\omega b} = \frac{\omega^2 b + i\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2}$$

Vyjádříme zvlášť reálnou a imaginární složku a zavedeme substituci **U** a **V**:

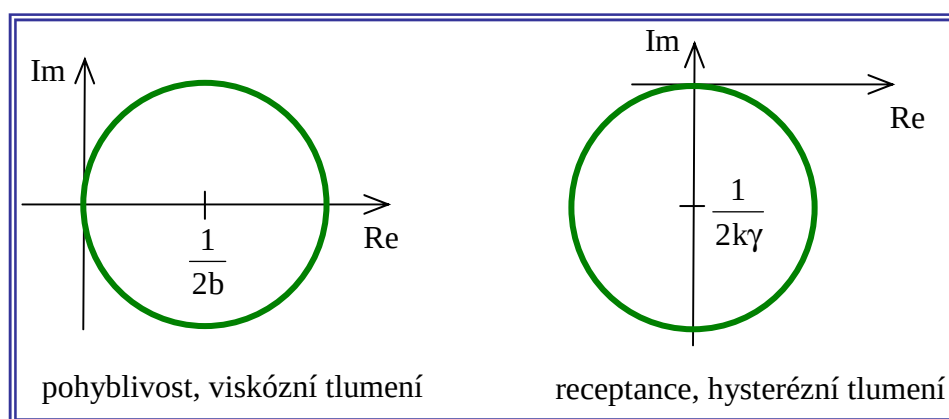
$$\operatorname{Re}(Y) = \frac{\omega^2 b}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2} \quad \operatorname{Im}(Y) = \frac{\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2}$$

$$U = \left(\operatorname{Re}(Y) - \frac{1}{2b} \right) \quad V = (\operatorname{Im}(Y))$$

Pak lze odvodit, že:

$$U^2 + V^2 = \frac{((k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2)^2}{4b^2((k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2)^2} = \left(\frac{1}{2b} \right)^2$$

Z toho je zřejmé, že graf $\operatorname{Re}(Y(\omega))$ vs. $\operatorname{Im}(Y(\omega))$ pro $\omega \in \langle 0; \infty \rangle$ vytvoří kružnici o poloměru $\frac{1}{2b}$ se středem v bodě $\left[\frac{1}{2b}; 0 \right]$ (viz obr. 3.12 vlevo).



Obr. 3.12 - Geometrické vlastnosti Nyquistova grafu

3.1.5.2 Receptance systému s hysterézním tlumením

Stejným způsobem jako v předchozím odstavci je možné odvodit rovnici kružnice pro receptanci systému s hysterézním tlumením:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + ik\gamma} = \frac{(k - \omega^2 m) - ik\gamma}{(k - \omega^2 m)^2 + (k\gamma)^2}$$

Vyjádříme opět zvlášť reálnou a imaginární složku a zavedeme substituci **U** a **V**:

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + (k\gamma)^2} \quad \operatorname{Im}(Y) = \frac{-k\gamma}{(k - \omega^2 m)^2 + k\gamma^2}$$

$$U = \operatorname{Re}(\alpha) \quad V = \left(\operatorname{Im}(\alpha) + \frac{1}{2k\gamma} \right)$$

Lze odvodit, že:

$$U^2 + V^2 = \left(\frac{1}{2k\gamma} \right)^2$$

Z toho je zřejmé, že graf $\operatorname{Re}(\alpha(\omega))$ vs. $\operatorname{Im}(\alpha(\omega))$ pro $\omega \in \langle 0; \infty \rangle$ vytvoří kružnici o poloměru $\frac{1}{2k\gamma}$ se středem v bodě $\left[0; -\frac{1}{2k\gamma} \right]$ (viz obr. 3.12 vpravo).

3.1.6 Odvození rezidua

V kapitole 2.4.1 byl uveden výraz, který definuje reziduum. Nyní uvedeme postup, který k tomuto výrazu vede. Vyjdeme z výrazu pro přenosovou funkci (rovnice 2.15):

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*}$$

Vyjádříme **R** a **s** jako komplexní čísla a póly dle rovnice 2.16 a dosadíme do (2.15):

$$\begin{aligned} R &= A + Bi & s &= a + bi & p &= -\delta + i\Omega \\ R^* &= A - Bi & & & p^* &= -\delta - i\Omega \end{aligned}$$

Dostaneme:

$$\frac{1/m}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*}$$

Provedeme další úpravy:

$$\frac{1}{m} = R \cdot (s-p^*) + R^* \cdot (s-p)$$

$$\frac{1}{m} = (A + Bi) \cdot [a + bi - (-\delta - i\Omega)] + (A - Bi) \cdot [a + bi - (-\delta + i\Omega)]$$

$$\frac{1}{m} = 2Aa + 2Abi + 2A\delta - 2B\Omega$$

Porovnáme reálné části a imaginární části:

$$\operatorname{Re}: \quad \frac{1}{2m} = Aa + A\delta - B\Omega \quad \operatorname{Im}: \quad 2Ab = 0$$

Z takto získané soustavy dvou rovnic vyjádříme neznámé A a B:

$$A = 0 \quad ; \quad B = -\frac{1}{2m\Omega}$$

Dosadíme zpět do ($R = A + Bi$) a dostaneme:

$$R = -\frac{1}{2m\Omega}i \quad \text{nebo} \quad R = \frac{1}{2m\Omega i} \quad ; \quad R^* = \frac{1}{2m\Omega}i$$

Velikost rezidua pak je:

$$|R| = \frac{1}{2m\Omega}$$

3.2 Systém s více stupni volnosti (MDOF)

Skutečné struktury mají mnoho stupňů volnosti a pro jejich analýzu je zapotřebí mnoho rovnic. Proto je pro popis systému s více stupni volnosti ideální maticový zápis, který umožňuje množství rovnic zapsat jedinou maticovou rovnicí.

3.2.1 Netlumený systém s více stupni volnosti

Pro netlumený MDOF systém s N stupni volnosti má vlastní pohybová rovnice v maticové formě tvar:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.58)$$

kde $[M]$ a $[K]$ jsou matice hmotnosti a tuhosti řádu $N \times N$ a $\{x(t)\}$ a $\{f(t)\}$ jsou vektory časově proměnných výchylek a sil řádu N .

3.2.1.1 Volné kmitání

Abychom určili modální vlastnosti systému, budeme nejdříve uvažovat řešení volného kmitání tím, že položíme

$$\{f(t)\} = \{0\}$$

V tomto případě můžeme předpokládat řešení ve tvaru

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad \{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{X\}e^{i\omega t}$$

kde $\{X\}$ je vektor $N \times 1$ časově nezávislých amplitud. To předpokládá, že celý systém je schopen kmitat na jediné frekvenci ω .

Dosazením homogenního řešení do pohybové rovnice dostaneme:

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\} = \{0\} \quad (3.59)$$

Jediné netriviální řešení je:

$$\det[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] = 0 \quad (3.60)$$

Zavedeme

$$\omega^2 = \lambda \quad (3.61)$$

Potom:

$$\det[\mathbf{K}] - \lambda [\mathbf{M}] = 0 \quad \dots \text{charakteristická rovnice systému}$$

Charakteristická rovnice může být rozepsána do tvaru:

$$d_N \lambda^N + d_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + d_0 = 0 \quad (3.62)$$

Řešením této charakteristické rovnice je možné zjistit N hodnot λ_i , což jsou tzv. *vlastní čísla*, a netlumené vlastní frekvence se z nich získají jako:

$$\Omega_{0i}^2 = \lambda_i \quad (3.63)$$

Dosazením kterékoliv z nich zpět do rovnice (3.59) získáme odpovídající množinu relativních hodnot $\{X\}$, tj. $\{\Psi\}_r$, tak zvaný *vlastní tvar* odpovídající příslušné vlastní frekvenci.

Úplné řešení může být vyjádřeno dvěma maticemi $N \times N$:

$$\begin{aligned} [\Omega_{0r}^2] & \quad \dots \text{spektrální matice (matice vlastních čísel) - diagonální} \\ [\Psi] & \quad \dots \text{matice vlastních tvarů (modální matice), má tvar} \\ & \quad [\{\Psi\}_1 \quad \{\Psi\}_2 \quad \dots \quad \{\Psi\}_r \quad \dots \quad \{\Psi\}_N] \end{aligned}$$

kde Ω_{0r}^2 je r -té vlastní číslo, neboli kvadrát vlastní frekvence, a $\{\Psi\}_r$ je r -tý vlastní vektor, který popisuje příslušný vlastní tvar.

Existují různé postupy, které z fyzikálního modelu popsaného maticemi $[\mathbf{M}]$ a $[\mathbf{K}]$ vytvoří modální model reprezentovaný maticemi $[\Omega_{0r}^2]$ a $[\Psi]$.

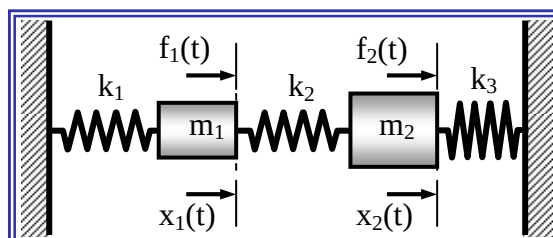
Spektrální matice je jedinečná, ale matice vlastních tvarů není. Zatímco vlastní frekvence jsou neměnné hodnoty, vlastní tvary podléhají neurčitelnému měřítkovému faktoru, který neovlivní tvar módu vibrací, pouze jeho amplitudu. Vlastní tvar je tedy definován jako poměr mezi amplitudami kmitání v jednotlivých bodech struktury, pokud je struktura buzena na své vlastní frekvenci. Tedy, vektor vlastních tvarů

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{znázorňuje přesně stejný mód vibrací jako} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{atd.}$$

Tím, co určuje, v jakém jsou vlastní vektory měřítku, neboli jak jsou *normalizovány*, jsou z velké části numerické postupy, které následují za řešením vlastních čísel.

Skutečné amplitudy kmitání závisejí na počátečních podmínkách a na působištích a amplitudách budících sil.

Postup při určování vlastních čísel a vlastních vektorů přiblížíme na příkladě netlumeného systému se dvěma stupni volnosti (viz obr. 3.13).



Obr. 3.13 - Systém se 2^o volnosti

Pohybové rovnice tohoto systému mají tvar:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1 \quad (3.64)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \quad (3.65)$$

což lze maticově zapsat:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Zvolíme hodnoty:

$$m_1 = 5 \text{ kg} \quad m_2 = 10 \text{ kg} \quad k_1 = k_2 = 2 \text{ N/m} \quad k_3 = 4 \text{ N/m}$$

Dosazením do rovnice (3.66) pro volné kmitání (tj. $f_1=0$ a $f_2=0$) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4-5\lambda & -2 \\ -2 & 6-10\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-5\lambda & -2 \\ -2 & 6-10\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-5\lambda)(6-10\lambda) - (-2)(-2) = 0$$

$$50\lambda^2 - 70\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_1 = 0,4 \text{ s}^{-2}$$

$$\Omega_{01} = \sqrt{0,4} \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ s}^{-2}$$

$$\Omega_{02} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Zpětným dosazením dostaneme:

$$\text{Pro } \Omega_{01}: \begin{bmatrix} 4 - 5 \cdot 0,4 & -2 \\ -2 & 6 - 10 \cdot 0,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$2X_1 - 2X_2 = 0$$

$$-2X_1 + 2X_2 = 0$$

... Stačí dosadit do jedné z těchto rovnic.

$$\Rightarrow X_1 = X_2$$

$$\text{Vlastní tvar pro } \Omega_{01} \text{ je tedy } \{\Psi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Pro } \Omega_{02}: \begin{bmatrix} 4 - 5 \cdot 1 & -2 \\ -2 & 6 - 10 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$-X_1 - 2X_2 = 0$$

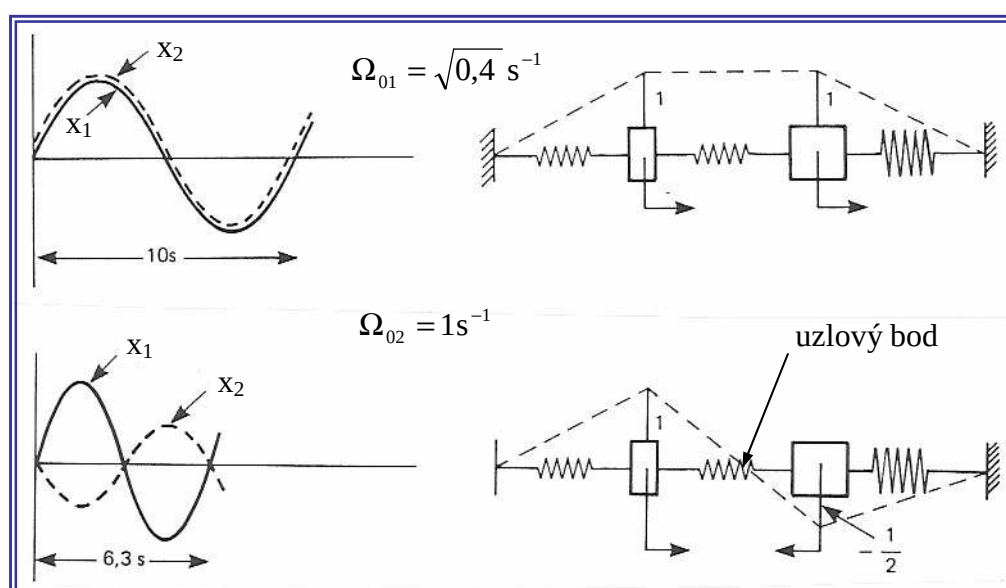
$$\Rightarrow X_2 = -\frac{X_1}{2}$$

$$\text{Vlastní tvar pro } \Omega_{02} \text{ je tedy } \{\Psi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

Celé řešení je tedy dáno maticemi:

$$[\Omega_{0r}^2] = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Vlastní tvary jsou zobrazeny na obrázku 3.14. Je vidět, že hmoty se pohybují navzájem buď ve fázi nebo v protifázi. Jelikož dosahují maximálních výchylek současně, jsou *uzlové body* (body, které jsou nehybné) jasně definovány.



Obr. 3.14 - Znázornění vlastních tvarů systému se 2° volnosti

3.2.1.2 Ortogonální vlastnosti vlastních vektorů

Řešením rovnice $([K] - \lambda[M])\{X\} = \{0\}$ jsme tedy dostali N vlastních čísel a jim odpovídajících vlastních vektorů. Pro jednotlivý r -tý mód platí:

$$[K]\{\Psi\}_r = \lambda_r [M]\{\Psi\}_r \quad (3.67)$$

Po vynásobení jiným (s -tým) transponovaným vlastním vektorem:

$$\{\Psi\}_s^T [K]\{\Psi\}_r = \lambda_r \{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r \quad (3.68)$$

Podobně pro jiný mód s platí (po vynásobení transponovaným r -tým vlastním vektorem) :

$$\{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_s = \lambda_s \{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_s \quad (3.69)$$

Protože $[M]$ a $[K]$ jsou symetrické matice, platí:

$$\{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_s = \{\Psi\}_s^T [K]\{\Psi\}_r \quad \text{a}$$

$$\{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_s = \{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r$$

Potom po odečtení rovnic (3.68) a (3.69) dostaneme:

$$0 = (\lambda_r - \lambda_s) \{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r \quad (3.70)$$

Je zřejmé, že pro $\lambda_r \neq \lambda_s$ (dvě různé vlastní frekvence) platí

$$\{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r = 0 \quad \text{a tedy i} \quad (3.71)$$

$$\{\Psi\}_s^T [K]\{\Psi\}_r = 0 \quad (3.72)$$

Rovnice (3.71) a (3.72) definují ortogonální vlastnosti vlastních tvarů vzhledem k maticím hmotnosti a tuhosti.

V případě, že $\lambda_r = \lambda_s$, platí:

$$\{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_s = \lambda_r \{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_s$$

Takže:

$$\{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_s = K_r \quad \dots \text{zobecněná (modální) tuhost módu } r \quad (3.73)$$

$$\{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_s = M_r \quad \dots \text{zobecněná (modální) hmotnost módu } r \quad (3.74)$$

$$\lambda_r = \Omega_{0r}^2 = \frac{K_r}{M_r} \quad (3.75)$$

V maticovém tvaru:

$$\{\Psi\}^T [K]\{\Psi\} = [K_r] \quad (3.76)$$

$$\{\Psi\}^T [M]\{\Psi\} = [M_r] \quad (3.77)$$

$$[\Omega_{or}^2] = [M_r]^{-1} \cdot [K_r] \quad (3.78)$$

Vlastní tvary vypočtené v předchozím příkladě použijeme k určení zobecněných hmotností a tuhostí obou módů:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} M_1 = 15\text{kg} \\ M_2 = 7,5\text{kg} \end{matrix}$$

Potom

$$K_1 = \Omega_{01}^2 \cdot M_1 = 0,4 \cdot 15 = 6 \text{ N/m}$$

$$K_2 = \Omega_{02}^2 \cdot M_2 = 1 \cdot 7,5 = 7,5 \text{ N/m}$$

3.2.1.3 Normování vlastních tvarů

Jelikož matice vlastních tvarů je v libovolném měřítku, nejsou hodnoty $\mathbf{M}_r$ a $\mathbf{K}_r$ jednoznačné a není radno se odkazovat na určitou zobecněnou hmotnost a tuhost jednotlivého módu. Tento problém se odstraní tzv. normováním vlastních tvarů. Některé z možných způsobů normování jsou:

- normování podle matice hmot (na jednotkovou hmotnost)
- největší prvek v každém vlastním vektoru je roven 1
- velikost vlastního vektoru je rovna 1

Normování na jednotkovou hmotnost

Jde o nejběžnější způsob normování. Vlastní vektory normované na jednotkovou hmotnost se značí $[\Phi]$ a mají tu zvláštní vlastnost, že

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad (3.79)$$

$$[\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\Omega_{or}^2] \quad (3.80)$$

Vztah mezi vlastním tvarem $\{\Phi\}_r$ pro r -tý mód, normovaným na jednotkovou hmotnost, a jeho obecnější formou $\{\Psi\}_r$ je jednoduchý:

$$\{\Phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \cdot \{\Psi\}_r \quad (3.81)$$

neboli

$$[\Phi] = [\Psi] \cdot [M_r]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.82)$$

Normovaný tvar odvodíme tak, že prvky vlastních vektorů normovaných na jednotkovou hmotnost označíme $\mathbf{u}_i$ a dosadíme do vztahu (3.77):

$$\{\Psi\}_1^T \cdot [\mathbf{m}] \cdot \{\Psi\}_1 = M_1 \quad \{\Psi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Phi\}_1^T \cdot [\mathbf{m}] \cdot \{\Phi\}_1 = 1$$

$$\{u_1 \quad u_1\} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\{5u_1 \quad 10u_1\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = 1$$

$$5u_1^2 + 10u_1^2 = 1$$

$$u_1^2 = \frac{1}{15}$$

$$u_1 = \sqrt{1/15} \quad \{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \sqrt{1/15} \\ \sqrt{1/15} \end{Bmatrix}$$

Totéž lze získat dosazením modální hmotnosti do vztahu (3.81):

$$\{\Phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \cdot \{\Psi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{1/15} \\ \sqrt{1/15} \end{Bmatrix}$$

$$\{\Phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \cdot \{\Psi\}_2 = \sqrt{\frac{2}{15}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2/15} \\ -\frac{\sqrt{2/15}}{2} \end{Bmatrix}$$

3.2.1.4 Odezvová analýza systému s více stupni volnosti

Budeme předpokládat, že struktura je buzena sinusovým buzením množinou sil majících stejnou frekvenci, ale různé amplitudy a fáze. Pak :

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$$

a tak jako předtím budeme předpokládat řešení ve tvaru:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

kde $\{f\}$ a $\{x\}$ jsou vektory řádu N časově nezávislých komplexních amplitud.

Pohybová rovnice netlumeného systému pak bude mít tvar:

$$([K] - \omega^2[M]) \cdot \{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.83)$$

nebo, pro vyjádření neznámých odezev:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \cdot \{F\} \quad (3.84)$$

což může být zapsáno jako

$$\{X\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F\} \quad (3.85)$$

kde $[\alpha(\omega)]$ je matice receptance systému řádu $N \times N$ a vytváří jeho odezvosvý model. Obecný prvek této FRF matice, $\alpha_{jk}(\omega)$, je definován následovně:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} ; \quad F_m = 0; \quad m = 1 \dots N ; \quad m \neq k$$

a jako takový představuje vztah pro jednotlivou receptanci velmi podobnou té, jež byla dříve definována pro systém s 1° volnosti.

Je zřejmé, že hodnoty prvků matice $[\alpha(\omega)]$ pro libovolnou frekvenci, která nás zajímá, můžeme určit jednoduše dosazením příslušných hodnot do

$$[\alpha(\omega)] = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \quad (3.86)$$

To však vyžaduje invertovat systémovou matici pro každou frekvenci, což má několik nevýhod, zejména:

- pro systémy s mnoha stupni volnosti se stává pracným
- je neefektivní, pokud nás zajímá jen několik málo FRF
- neposkytuje žádnou představu o formě různých vlastností FRF

Z těchto i z jiných důvodů se používá jiný způsob odvození jednotlivých FRF parametrů, který využívá modálních vlastností systému.

Vyjdeme z invertovaného vztahu (3.86):

$$([K] - \omega^2[M]) = [\alpha(\omega)]^{-1}$$

Vynásobením obou stran zleva $[\Phi]^T$ a zprava $[\Phi]$ dostaneme

$$[\Phi]^T \cdot ([K] - \omega^2[M]) \cdot [\Phi] = [\Phi]^T \cdot [\alpha(\omega)]^{-1} \cdot [\Phi]$$

$$[(\Omega_{0r}^2 - \omega^2)] = [\Phi]^T \cdot [\alpha(\omega)]^{-1} \cdot [\Phi]$$

odkud

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \cdot [(\Omega_{0r}^2 - \omega^2)]^{-1} \cdot [\Phi]^T \quad (3.87)$$

Z této rovnice je zřejmé, že matice receptance $[\alpha(\omega)]$ je symetrická, což představuje princip reciprocity, který se týká mnoha strukturálních charakteristik. Jeho použití v této situaci je následující :

$$\alpha_{jk} = \frac{X_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{X_k}{F_j} \quad (3.88)$$

Předchozí rovnice nám dovoluje vypočíst kterýkoliv prvek FRF $\alpha_{jk}(\omega)$ použitím následujícího vztahu :

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\Phi_j)_r \cdot (\Phi_k)_r}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{(\Psi_j)_r \cdot (\Psi_k)_r}{m_r(\Omega_{0r}^2 - \omega^2)} \quad (3.89)$$

neboli

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk}}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2} \quad A_{jk} \dots \text{modální konstanta, reziduum} \quad (3.90)$$

Na příkladu ukážeme, že stejnou funkci α_{11} lze získat oběma způsoby (přímou inverzí a ze vztahu 3.89).

Pohybové rovnice netlumeného vynuceného kmitání systému dle obr.3.13 jsou:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)X_1 + (-k_2)X_2 &= F_1 \\ (-k_2)X_1 + (k_2 + k_3 - \omega^2 m_2)X_2 &= F_2 \end{aligned}$$

což dává:

$$\left(\frac{X_1}{F_1} \right)_{F_2=0} = \alpha_{11}(\omega) = \frac{k_2 + k_3 - \omega^2 m_2}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3)}$$

číselně (pro $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 2 \text{ N/m}$, $k_3 = 4 \text{ N/m}$):

$$\left(\frac{X_1}{F_1} \right)_{F_2=0} = \alpha_{11}(\omega) = \frac{6 - 10\omega^2}{20 - 70\omega^2 + 50\omega^4}$$

Nyní použijeme součtový modální vzorec spolu s výsledky získanými dříve a dostaneme :

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{(\Phi_1)_1^2}{\Omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{(\Phi_1)_2^2}{\Omega_{02}^2 - \omega^2}$$

číselně (pro $\Omega_{01}^2 = 0.4 \text{ s}^{-1}$, $\Omega_{02}^2 = 1 \text{ s}^{-1}$, ${}_1\Phi_1 = \sqrt{1/15}$, ${}_2\Phi_1 = \sqrt{2/15}$):

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{1/15}{0.4 - \omega^2} + \frac{2/15}{1 - \omega^2} = \frac{6 - 10\omega^2}{20 - 70\omega^2 + 50\omega^4}$$

což je tentýž výraz.

3.2.2 Charakteristiky a znázornění FRF dat s více stupni volnosti

Tak jako u systému s jedním stupněm volnosti jsou zde tři hlavní alternativy s použitím výchylky, rychlosti nebo zrychlení jako odezvy, čímž dostaneme buď receptanci, pohyblivost nebo inertanci (akceleranci). Tyto tři formy FRF jsou v přesně stejném vzájemném vztahu, jak bylo popsáno dříve, takže můžeme psát :

$$[Y(\omega)] = i\omega[\alpha(\omega)] \quad (3.91)$$

$$[A(\omega)] = i\omega[Y(\omega)] = -\omega^2[\alpha(\omega)] \quad (3.92)$$

Podle místa a směru buzení a odezvy rozlišujeme 4 typy FRF:

- *bodová* - souřadnice odezvy a buzení jsou totožné (např. bod č.10)
 - *přímá* - směr buzení a odezvy jsou totožné (např. 10X)
 - *křížová* (vzájemná) - směry buzení a odezvy jsou různé (např. buzení ve směru 10X, odezva ve směru 10Z)
- *přenosová* - souřadnice odezvy a buzení jsou různé
 - *přímá* (např. buzení v 10X, odezva ve 14X)
 - *křížová* (vzájemná) (např. buzení v 10X, odezva ve 14Z)

Bude vhodné prodiskutovat formy, kterých FRF data nabývají při zobrazení v různých grafických formátech. Tyto znalosti jsou nutné při posuzování platnosti a interpretaci naměřených dat.

Začneme s nejjednodušším případem netlumeného systému, pro který je vztah pro receptanci dán rovnicí (3.89): $\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\Phi_r)_j \cdot (\Phi_r)_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2}$

Když použijeme typ log-log grafu, můžeme nakreslit jednotlivé členy řady jako oddělené křivky. Výsledná FRF křivka je součet všech jednotlivých křivek. Odvodit přesný tvar výsledné křivky však není tak úplně jednoduché, protože část informace (fáze) není zobrazena. Ve skutečnosti má v některých úsecích každé křivky receptance kladné znaménko a v jiných záporné, ale na logaritmické křivce to nelze nijak rozeznat, protože zobrazuje pouze modul. Když však děláme součet jednotlivých složek, abychom určili úplný výraz pro receptanci, jsou znaménka jednotlivých členů značně důležitá.

Probereme některé z důležitých rysů a použijeme jednoduchý příklad se dvěma stupni volnosti, který jsme použili už v předchozí kapitole a pro který modální matice je:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{1/15} & \sqrt{2/15} \\ \sqrt{1/15} & -\frac{\sqrt{2/15}}{2} \end{bmatrix}$$

a vlastní frekvence jsou $\Omega_{01} = \sqrt{0.4} \text{ s}^{-1}$, $\Omega_{02} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Vytvoříme dva FRF grafy: bodovou receptanci α_{11} a přenosovou receptanci α_{21} (jde o přímé receptance).

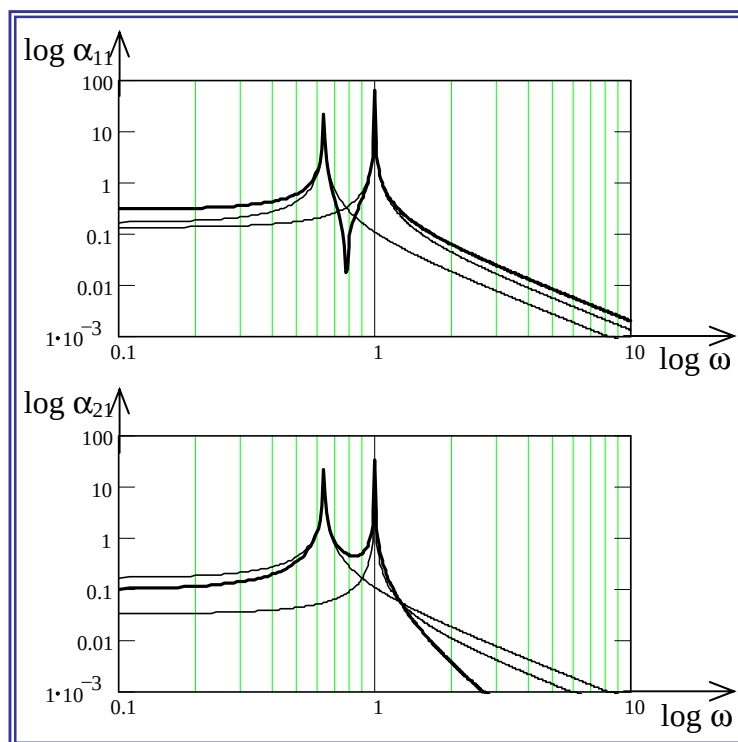
Výrazy pro receptanci jsou :

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{1/15}{\Omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{2/15}{\Omega_{02}^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{1/15}{\Omega_{01}^2 - \omega^2} - \frac{\sqrt{2/15} \cdot \frac{\sqrt{2/15}}{2}}{\Omega_{02}^2 - \omega^2} = \frac{1/15}{\Omega_{01}^2 - \omega^2} - \frac{1/15}{\Omega_{02}^2 - \omega^2}$$

z čehož je vidět, že rozdíl mezi bodovou a přenosovou receptancí je ve znaménku modální konstanty v čitateli druhého módu. Jelikož grafy zobrazují pouze modul, jsou k tomuto

rozdílu zdánlivě necitlivé. Když však uvážíme, co se stane, když ty dva členy sečteme, abychom dostali skutečnou FRF systému s více stupni volnosti, zjistíme skutečnosti, které ilustruje obr. 3.15. Na tomto obrázku je zobrazena receptance, ale následující komentář platí stejně pro všechny formy FRF (receptanci, pohyblivost i inertanci).



Obr. 3.15 - Amplituda bodové a přenosové receptance

Bodová receptance

Na frekvencích nižších než je první vlastní frekvence mají oba členy stejné znaménko a proto se sčítají, čímž způsobí, že celková FRF křivka je vyšší než jednotlivé komponenty, ale při použití logaritmické stupnice je příspěvek druhého módu na těchto nízkých frekvencích relativně nevýznamný. Výsledná FRF křivka je tudíž pouze mírně nad křivkou pro první člen. Podobný důvod a výsledek se hodí na druhý konec nad druhou vlastní frekvenci, kde je výsledná křivka jen těsně nad křivkou pro samotný druhý vlastní tvar. Avšak v oblasti mezi dvěma rezonancemi máme situaci, kde zmíněné dvě složky mají opačná znaménka, takže se odečítají a v bodě, ve kterém se kříží, je jejich součet nulový, protože tam mají stejnou amplitudu, ale opačná znaménka. Na tomto logaritmickém typu grafu to vede k vytvoření antirezonanční charakteristiky, která je podobná rezonanci. Bezprostředním vlivem kterékoliv z rezonancí je to, že příspěvek toho členu, jehož vlastní frekvence je blízko, je o tolik větší než příspěvek druhého členu, že výsledek je v podstatě stejný jako ten jeden člen. Fyzikálně, odezva MDOF systému právě na jedné z jeho vlastních frekvencí je úplně ovládnuta tímto módem a ostatní módy mají velmi malý vliv (u netlumených nebo velmi málo tlumených systémů).

Přenosová receptance

Při postupu přes frekvenční rozsah můžeme použít podobná zdůvodnění, s tím jediným rozdílem, že znaménka zmíněných dvou členů jsou v tomto případě opačná. Při

velmi malých a při velmi velkých frekvencích leží tedy výsledná křivka FRF těsně pod křivkou nejbližší jednotlivé složky, zatímco v oblasti mezi rezonancemi mají nyní obě přítomné složky stejná znaménka a nezaznamenáme tedy jev, kdy se složky vyruší, což vede k antirezonancím v bodové receptanci. Výsledná křivka má na frekvenci, kde se obě složky protínají, amplitudu přesně dvojnásobnou než každá ze složek.

Principy zde uvedené mohou být rozšířeny na jakýkoliv počet stupňů volnosti. Základní pravidlo je to, že když dva následné módy mají stejná znaménka modální konstanty, bude na nějaké frekvenci mezi vlastními frekvencemi těchto dvou módů antirezonance. Pokud mají opačná znaménka, nebude tam antirezonance, ale pouze minimum. (Nejdůležitějším rysem antirezonance je asi skutečnost, že je s ní spojena změna fáze, a současně velmi nízká amplituda.)

Je také zajímavé si všimnout, čím je určeno, zda jednotlivá FRF bude mít kladné nebo záporné modální konstanty, a tedy zda bude vykazovat antirezonance nebo ne. Pochopení tohoto problému je možné zvážením původu modální konstanty: je to součin dvou prvků vlastních vektorů, jednoho v místě odezvy a druhého v místě buzení. Pokud uvažujeme bodovou receptanci, tak musí být modální konstanta pro každý mód kladná, protože je to mocnina čísla. To znamená, že pro bodovou FRF musí být za každou rezonanci bez výjimky antirezonance.

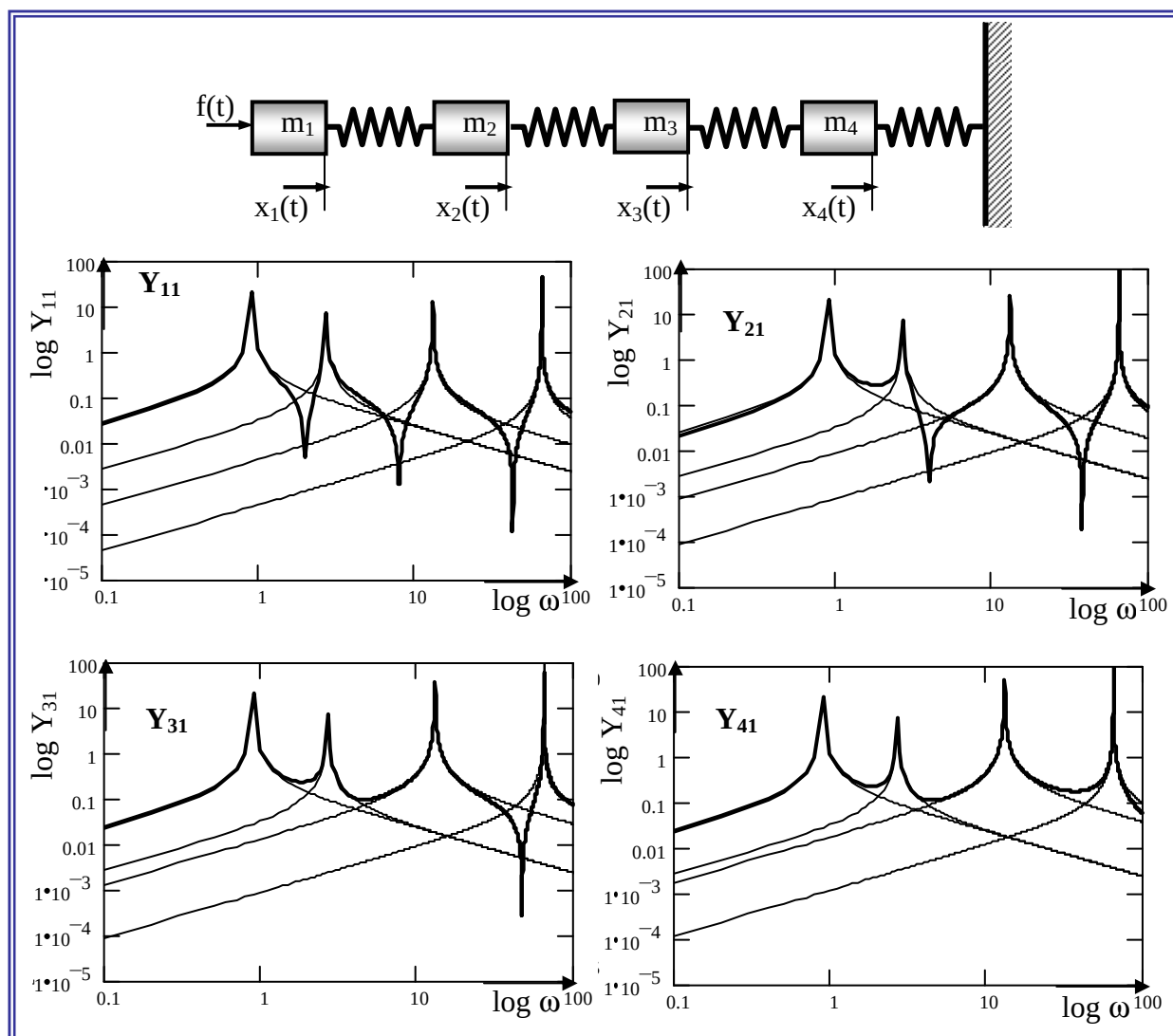
Situace pro přenosové receptance je méně kategorická, protože modální konstanta bude někdy kladná a někdy záporná. Očekáváme tedy, že přenosová měření budou vykazovat směs antirezonancí a minim. Avšak tato směs může být do jisté míry předvídatelná, protože obecně je možno ukázat, že čím více jsou posuzované body vzdáleny, tím je pravděpodobnější, že se u jim odpovídajících prvků vlastních vektorů změní znaménko, jak budeme postupovat přes módy. Můžeme tedy očekávat, že přenosová receptance mezi dvěma místy na struktuře hodně vzdálenými bude vykazovat méně antirezonancí než pohyblivost pro dva body relativně blízko sebe.

Příklad této skutečnosti je uveden na obrázku 3.16 pro systém se 4 stupni volnosti, který zobrazuje úplnou množinu pohyblivostí pro buzení v jednom krajním bodě.

Nakonec je nutno poznamenat, že pokud se buď souřadnice buzení nebo odezvy kryje s uzlem jednoho z módů (tj. ${}_r\Phi_j; {}_r\Phi_k = 0$), tak se tento mód neobjeví jako rezonance na grafu FRF. V tomto případě je ${}_rA_{jk} = 0$, takže jediná odezva, která bude zaznamenána na $\omega = \Omega_{or}$ nebo blízko ní bude vlivem mimorezonančního příspěvku všech ostatních módů.

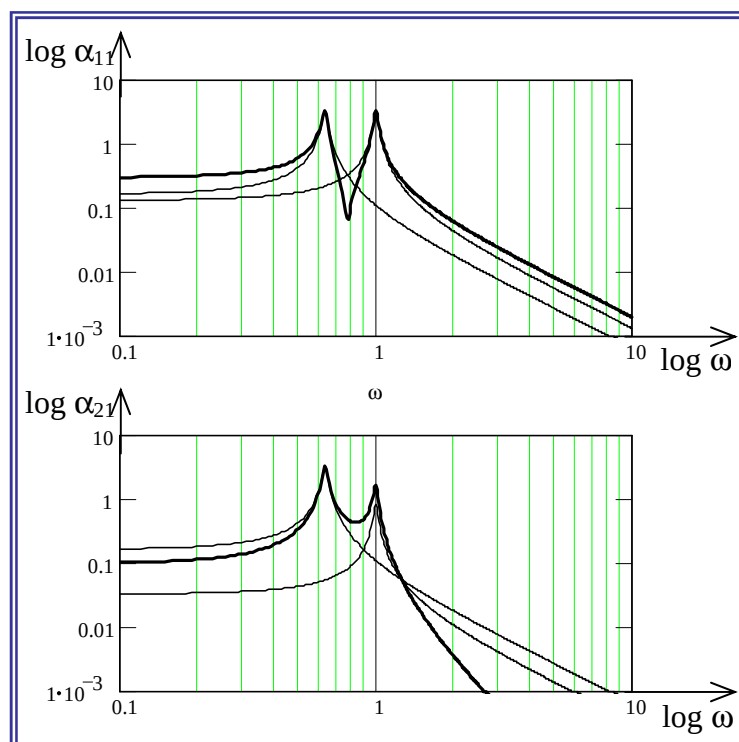
Tvar grafu FRF tlumeného systému je dost podobný grafu pro netlumený případ. Rezonance a antirezonance jsou ztupeny zahrnutím tlumení, a fázové úhly (nejsou zobrazeny) už nejsou přesně 0° nebo 180° , nicméně obecný vzhled grafu je přirozeným rozšířením případu systému bez tlumení. To platí, pokud jsou módy relativně dobře odděleny. Tato podmínka není splněna, pokud rozlišení mezi sousedními vlastními frekvencemi (vyjádřené jako procento jejich střední hodnoty) je stejného řádu jako modální tlumicí faktory nebo menší, a v tomto případě se rozlišení jednotlivých módů stává složitým.

Na obrázku 3.17 je graf receptance systému s dvěma stupni volnosti (stejný jako v předchozím případě na obr. 3.15) s přidaným tlumením.

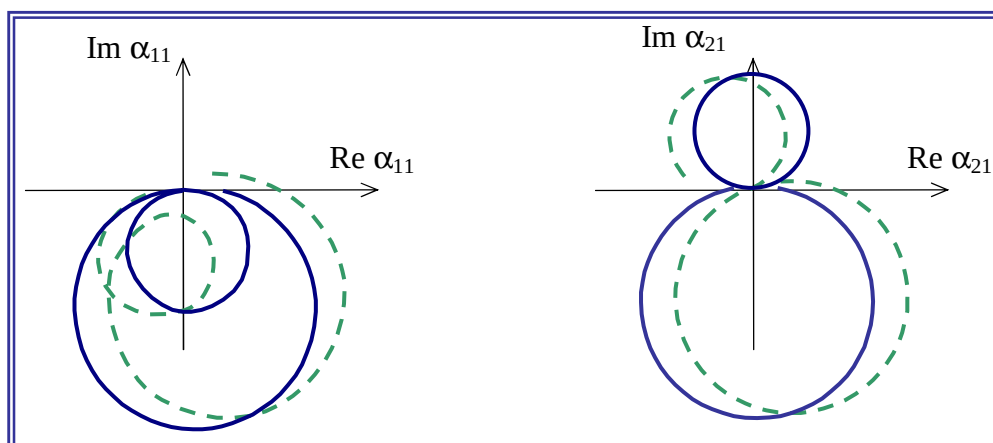


Obr. 3.16 - Grafy pohyblivosti systému se 4° volnosti

Stejně jako u případu s jedním stupněm volnosti bude zajímavé se i u systému s více stupni volnosti podívat na to, jakého tvaru nabývá Nyquistův graf. Na obr.3.18 je zobrazen Nyquistův graf pro systém se 2° volnosti. Vlevo je graf bodové receptance, vpravo přenosové receptance. Plnou čarou je zobrazena receptance proporcionálně tlumeného systému, čárkovanou čarou receptance neproporcionálně tlumeného systému (v tomto případě jsou modální kružnice pootočený). Podrobně se neproporcionálním tlumením budeme zabývat v kapitole 3.2.3.4.



Obr. 3.17 - Amplituda bodové a přenosové receptance (tlumený systém)



Obr.3.18 - Nyquistovy grafy bodové a přenosové receptance

3.2.3 Tlumený systém s více stupni volnosti

3.2.3.1 Proporcionální viskózní tlumení

Zvláštní typ tlumení, poměrně jednoduchý na analýzu, je tzv. proporcionální tlumení. Výhoda při použití modelu s proporcionálním tlumením při analýze struktur je ta, že módy takovéto struktury jsou téměř identické s módy modelu bez tlumení. Přesněji, vlastní tvary jsou identické a vlastní frekvence jsou také velmi podobné vlastním frekvencím netlumeného systému. Modální vlastnosti proporcionálně tlumeného systému je možné odvodit pomocí úplné analýzy netlumené verze a následným provedením korekcí na přítomnost tlumení.

Poněvadž se tento postup často používá při teoretické analýze struktur, je třeba připomenout, že je platný pouze v případě tohoto zvláštního typu rozložení tlumení, což u reálných struktur vyšetřovaných modálními zkouškami nemusí vždy platit.

Pokud se vrátíme k obecné pohybové rovnici MDOF systému a přidáme matici viskózního tlumení $[B]$, dostaneme :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [B]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.93)$$

Probereme nejdříve případ, kdy matice tlumení je přímo úměrná matici tuhosti:

$$[B] = \beta[K] \quad (3.94)$$

Je zřejmé, že pokud vynásobíme matici tlumení zleva a zprava maticí vlastních vektorů netlumeného systému $[\Psi]$ úplně stejným způsobem jako jsme to udělali dříve pro matice hmotnosti a tuhosti, dostaneme :

$$[\Psi]^T [B] [\Psi] = \beta[k_r] = [b_r] \quad (3.95)$$

kde prvky b_r na diagonále reprezentují zobecněné tlumení jednotlivých módů systému. Skutečnost, že tato matice je rovněž diagonální znamená, že vlastní tvary netlumeného systému jsou zároveň i vlastními tvary tlumeného systému, což je zvláštní rys tohoto typu tlumení. Toto lze snadno dokázat. Za $\{x\}$ dosadíme tzv. modální souřadnice $\{p\}$, pro které platí

$$\{x\} = [\Psi] \cdot \{p\} \quad (3.96)$$

Pohybovou rovnici vynásobíme zleva $[\Psi]^T$ a dostaneme :

$$[m_r] \cdot \{\ddot{p}\} + [b_r] \cdot \{\dot{p}\} + [k_r] \cdot \{p\} = \{0\} \quad (3.97)$$

odkud r -tá jednotlivá rovnice je :

$$m_r \ddot{p}_r + b_r \dot{p}_r + k_r p_r = 0 \quad (3.98)$$

což je rovnice systému s jedním stupněm volnosti nebo rovnice jednoho módu systému. Tento mód má komplexní vlastní číslo p s kmitavou částí:

$$\Omega_r = \Omega_{0r} \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad \Omega_{0r}^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad \zeta_r = \frac{b_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \frac{1}{2} \beta \Omega_{0r} \quad (3.99)$$

a útlumovou částí:

$$\delta_r = \zeta_r \Omega_{0r} = \frac{\beta}{2} \cdot \Omega_{0r}^2 \quad (3.100)$$

Tyto charakteristiky vedou k analýze vynuceného kmitání, u které jednoduché rozšíření kroků provedených při analýze vynuceného kmitání netlumeného systému vede k definici obecné frekvenční odezvy funkce receptance jako:

$$[\alpha(\omega)] = [K + i\omega B - \omega^2 M]^{-1} \quad (3.101)$$

nebo

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Psi_j \cdot {}_r\Psi_k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega b_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Phi_j \cdot {}_r\Phi_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2 + 2i\omega\Omega_{0r}\zeta_r} \quad (3.102)$$

kteřá má tvar velmi podobný receptanci pro netlumený systém, až na to, že nyní je ve jmenovateli komplexní, což je důsledek zahrnutí tlumení.

Obecné formy proporcionálního tlumení

Z výše uvedeného je patrné, že jiná rozložení tlumení přinesou přibližně stejný typ výsledku a jsou společně zahrnuta pod označením proporcionální tlumení. Zvláště pokud je matice tlumení přímo úměrná matici hmotnosti, vyplývá z toho, že dostaneme přesně stejný typ výsledků. Obvyklá definice proporcionálního tlumení je taková, že matice tlumení [B] má tvar :

$$[B] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (3.103)$$

V tomto případě bude mít tlumený systém tato vlastní čísla a vlastní vektory :

$$\Omega_r = \Omega_{0r} \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad ; \quad \zeta_r = \frac{\beta\Omega_{0r}}{2} + \frac{\gamma}{2\Omega_{0r}} \quad (3.104)$$

a
$$[\Psi^{\text{tlumené}}] = [\Psi^{\text{netlumené}}]$$

Obvykle se ukáže, že rozložení tlumení výše uvedeného typu jsou zřejmá z praktického pohledu: skutečné tlumící mechanismy jsou obvykle podobné jako u tuhostních prvků (pro vnitřní materiálové neboli hysterézní tlumení) nebo u hmotnostních prvků (pro viskózní tlumení). K tomu, aby měl tlumený systém stejné vlastní tvary jako jeho netlumený protějšek, existuje obecnější definice požadovaných podmínek :

$$([M]^{-1}[K]) \cdot ([M]^{-1}[B]) = ([M]^{-1}[B]) \cdot ([M]^{-1}[K]) \quad (3.105)$$

i když přímá fyzikální interpretace tohoto tvaru je obtížnější.

3.2.3.2 Proporcionální hysterézní tlumení

Stejným způsobem jako v předchozí kapitole můžeme postupovat i u MDOF systému s proporcionálním hysterézním (strukturním) tlumením a dostaneme v podstatě stejné výsledky. Pohybové rovnice systému jsou vyjádřeny jako

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K + iH]\{x\} = \{f\} \quad (3.106)$$

a matice hysterézního tlumení [H] je proporcionální:

$$[H] = \beta'[K] + \gamma'[M] \quad (3.107)$$

Vlastní tvary tlumeného systému jsou v tomto případě opět totožné s vlastními tvary netlumeného systému a vlastní čísla nabývají komplexní tvar :

$$\lambda_r^2 = \Omega_{0r}^2 (1 + i\eta_r) \quad \Omega_{0r}^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad \eta_r = \beta' + \frac{\gamma'}{\Omega_{0r}^2} \quad (3.108)$$

Pozn.: η_r je ztrátový faktor hysterézního tlumení. V kapitole 3.1.3.1 jsme tento ztrátový faktor značili písmenem γ (a v celé kapitole 3.1. jsme písmenem η značili činitel naladění). V dalším textu už bude ztrátový faktor značen písmenem η v souladu s běžně dostupnou literaturou.

Obecný vztah pro FRF má tvar :

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Psi_j \cdot {}_r\Psi_k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i\eta_r k_r} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Phi_j \cdot {}_r\Phi_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_{0r}^2} \quad (3.109)$$

3.2.3.3 Hysterézní tlumení - obecný případ

Jak už bylo uvedeno, případ proporcionálního tlumení je zvláštní případ, který se nehodí vždy. Je oprávněný v teoretické analýze, protože je realistický, a taky z nedostatku jiného přesnějšího modelu. Pokud však máme být schopni interpretovat a správně analyzovat data pozorovaná na skutečných strukturách, je důležité, abychom uvažili ten nejobecnější případ.

Obecná pohybová rovnice MDOF systému s hysterézním tlumením a harmonickým buzením je:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} + i[H]\{x\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.110)$$

Nyní uvažujme nejdříve případ bez buzení a předpokládejme řešení ve tvaru :

$$\{x\} = \{X\}e^{i\lambda t} \quad (3.111)$$

Dosazením do pohybové rovnice vede toto homogenní řešení na komplexní problém vlastních čísel, jehož řešení je ve formě dvou matic (tak jako dříve pro netlumený případ), obsahujících vlastní čísla a vlastní vektory. V tomto případě jsou však obě matice komplexní, což znamená, že každá vlastní frekvence a každý vlastní tvar je popsán pomocí komplexních čísel. r -té vlastní číslo budeme psát jako

$$\lambda_r^2 = \Omega_r^2 (1 + i\eta_r) \quad (3.112)$$

kde Ω_r je vlastní frekvence a η_r je ztrátový faktor pro tento mód. Vlastní frekvence Ω_r není nutně rovna vlastní frekvenci netlumeného systému Ω_{0r} , tak jako tomu bylo u proporcionálního tlumení, i když si tyto dvě hodnoty budou obecně v praxi velmi blízké.

Komplexní vlastní tvary znamenají, že amplituda každé souřadnice má jak velikost, tak fázi. To je pouze malý rozdíl oproti netlumenému případu, protože i tady máme v každém bodě amplitudu a fázový úhel, který je ale buď 0° nebo 180° , což obojí může být zcela popsáno pomocí reálných čísel (0° - kladná amplituda, 180° - záporná amplituda).

Řešení vlastních čísel tlumeného systému se vyznačuje stejným typem ortogonálních vlastností jako byly ty, jež byly uvedeny v kapitole 3.2.1.2 pro netlumený systém. Mohou být definovány rovnicemi :

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [m_r] \quad (3.113)$$

$$[\Psi]^T [K + iH] [\Psi] = [k_r] \quad (3.114)$$

Zobecněné hmotnostní a tuhostní parametry (nyní komplexní) opět závisejí na normování amplitud vektorů vlastních tvarů, ale vždy vyhovují vztahu :

$$\lambda_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (3.115)$$

a můžeme zde opět definovat množinu vlastních vektorů normovaných na jednotkovou hmotnost jako

$$\{\Phi\}_r = m_r^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\Psi\}_r \quad (3.116)$$

3.2.3.4 MDOF systém s obecným hysterézním tlumením - odezvosvá analýza

Pohybová rovnice vynuceného kmitání pro zvláštní případ harmonického buzení a odezvy má tvar

$$[K + iH - \omega^2 M] \{X\} e^{i\omega t} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.117)$$

Opět je možné přímé řešení tohoto problému tak, že použijeme pohybové rovnice a přímou inverzí dostaneme :

$$\{X\} = [K + iH - \omega^2 M]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)] \{F\} \quad (3.118)$$

ale je to pro numerickou aplikaci opět velmi neefektivní a proto opět použijeme ten postup, že vynásobíme obě strany rovnice vlastními vektory. Po úpravách dostaneme:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] [(\lambda_r^2 - \omega^2)]^{-1} [\Phi]^T \quad (3.119)$$

a z této úplné maticové rovnice můžeme dostat kterýkoliv FRF prvek $\alpha_{jk}(\omega)$ a vyjádřit jej explicitně ve tvaru součtu parciálních zlomků

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{j,r} \cdot \Phi_{k,r}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2} \quad (3.120)$$

což lze napsat i různými jinými způsoby, např.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{j,r} \cdot \Psi_{k,r}}{m_r (\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2)} \quad \text{nebo} \quad \alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk,r}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2} \quad (3.121)$$

V těchto vztazích je nyní čitatel i jmenovatel komplexní, což je důsledek komplexity vlastních vektorů. Právě v tomto ohledu se případ s obecným tlumením liší od případu s proporcionálním tlumením.

3.2.3.5 Systémy s více stupni volnosti - shrnutí pro různé typy tlumení

Analýzu systému s obecným viskózním tlumením v tomto textu vynecháme, protože je o poznání složitější než analýza systému s obecným hysterézním tlumením a rozsah tohoto textu je omezen. Uvedeme si zde pouze výsledky. V tabulce 3.1 jsou shrnuty definice FRF a "vlastních frekvencí" pro všechny typy tlumení.

Základní definice vlastní frekvence je odvozena od vlastních čísel netlumeného systému, které dávají frekvence, na kterých může systém kmitat volně. Tyto frekvence se označují symbolem Ω_{0r} a objevují se jak ve vztazích pro volné kmitání

$$x(t) = \sum_{r=1}^N X_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (3.122)$$

tak ve vztazích pro vynucené kmitání, FRF :

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2} \quad (3.123)$$

U tlumených systémů je situace komplikovanější a vede na dva alternativní charakteristické frekvenční parametry, které jsme definovali - oba se nazývají "vlastní" frekvence - jeden pro volné kmitání (Ω_r) a jeden pro vynucené kmitání (Ω'_r).

Tabulka 3.1 - Vztahy pro FRF a "vlastní" frekvence pro všechny typy tlumení

SYSTÉM	ROVNICE PRO FRF	C	D	VLASTNÍ FR.	
				volná Ω_r	vynucená Ω'_r
netlumený	$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{j \cdot r} \cdot \Phi_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2}$	reálné konst.	0	Ω_{0r}	Ω_{0r}
proporc. hysterézní	$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{j \cdot r} \cdot \Phi_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_{0r}^2}$	reálné konst.	reálné konst.	Ω_{0r}	Ω_{0r}
proporc. viskózní	$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{j \cdot r} \cdot \Phi_k}{\Omega_{0r}^2 - \omega^2 + 2i\omega\Omega_{0r}\zeta_r}$	reálné konst.	reálné (ω)	$\Omega_{0r}\sqrt{1-\zeta_r^2}$	Ω_{0r}
obecný hysterézní	$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{j \cdot r} \cdot \Phi_k}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2}$	komplex. konst.	reálné konst.	Ω_r	Ω_r
obecný viskózní	$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{R_{jk} + i\frac{\omega}{\Omega'_r} S_{jk}}{\Omega_r'^2 - \omega^2 + 2i\omega\Omega'_r\zeta_r}$	komplex. (ω)	reálné (ω)	$\Omega'_r\sqrt{1-\zeta_r^2}$	Ω'_r

"Vlastní frekvence" Ω_r vytváří kmitavou část charakteristiky volného kmitání, která je komplexní a jako taková má i exponenciálně klesající část. Máme tedy :

$$x(t) = \sum_{r=1}^N X_r e^{-\delta_r t} e^{i\Omega_r t} \quad (3.124)$$

kde Ω_r se může a nemusí rovnat Ω_{0r} , což záleží na typu a rozložení tlumení.

"Vlastní frekvence" Ω_r' vychází z obecného tvaru výrazu pro frekvenční odezovou funkci, která jako kombinace všech probraných případů může být zapsána ve tvaru :

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{C_r}{\Omega_r'^2 - \omega^2 + iD_r} \quad (3.125)$$

C_r zde může být reálné nebo komplexní a D_r je reálné; obě mohou být buď konstantní nebo frekvenčně závislé a Ω_r' je obecně různé od Ω_{0r} i Ω_r .

V tabulce 3.1 je souhrn všech různých případů, o kterých bylo pojednáno.

3.2.3.6 Buzení obecným silovým vektorem

Předpokládejme opět systém s více stupni volnosti se strukturním tlumením. Připomeňme, že jeho pohybová rovnice má v případě harmonického buzení tvar (3.117):

$$[K + iH - \omega^2 M]\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t}$$

Je-li systém buzen současně ve více bodech (a ne jen v jediném, což je případ jednotlivých FRF výrazů), je řešení této pohybové rovnice dáno vztahem (3.118):

$$\{X\} = [K + iH - \omega^2 M]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\}$$

Zřetelnější tvar tohoto řešení lze odvodit jako :

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Phi\}_r^T \{F\} \{\Phi\}_r}{\Omega_r'^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r'^2} \quad (3.126)$$

Tato rovnice dovoluje výpočet jedné nebo více individuálních odezev na buzení současně několika harmonickými silami. Všechny budící síly musí mít stejnou frekvenci, ale mohou se lišit amplitudou a fází.

Pozn.: Výsledný vektor odezev se někdy nazývá vynucený mód vibrací, nebo častěji *provozní tvar kmitu* (ODS - *Operational Deflection Shape*). Pokud je budící frekvence blízká některé z vlastních frekvencí systému, blíží se provozní tvar kmitu příslušnému vlastnímu tvaru, protože jeden člen řady (3.126) je dominantní. Přesto však v důsledku příspěvků ostatních módů nebude identický.

3.2.3.7 Buzení vektorem soufázových sil

Jiný zvláštní případ nastane, když buzení je tvořeno vektorem monofázových sil. V tomto případě mohou mít budící síly různé amplitudy, ale stejnou frekvenci i fázi. Zkusíme zjistit, zda existují nějaké podmínky, při nichž by bylo možné dostat podobně monofázové odezvy (celý systém by měl odezvu se shodným fázovým úhlem). Předpokládejme tedy vektory sil a odezev ve tvaru :

$$\{f\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.127)$$

$$\{x\} = \{X\}e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (3.128)$$

kde $\{F\}$ a $\{X\}$ jsou vektory vyjádřené reálnými čísly, a dosadíme je do pohybové rovnice. Dostaneme:

$$[K + iH - \omega^2 M]\{X\}e^{i\omega t} \cdot e^{-i\varphi} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (3.129)$$

$$[K + iH - \omega^2 M]\{X\} \cdot e^{-i\varphi} = \{F\}$$

$$[K + iH - \omega^2 M]\{X\} \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \{F\} \quad (3.130)$$

Po rozdělení na reálnou a imaginární část:

$$([K - \omega^2 M]\cos \varphi + [H]\sin \varphi)\{X\} = \{F\} \quad (3.131)$$

$$(-[K - \omega^2 M]\sin \varphi + [H]\cos \varphi)\{X\} = \{0\} \quad (3.132)$$

Druhá z tohoto páru rovnic může být považována za problém vlastních čísel s "kořeny" φ_s a odpovídajícími "vektory" $\{X\}_s$. Tyto mohou být zpětně dosazeny do (3.131), abychom stanovili tvar (monofázového) vektoru sil nezbytného k vyvolání (monofázového) vektoru odezev popsaného $\{X\}_s$. Tak zjistíme, že existuje množina N monofázových vektorů sil, z nichž každý způsobí monofázovou odezvousou charakteristiku, pokud je aplikován na systém jako buzení.

Použité rovnice jsou funkcemi frekvence, a proto každé řešení získané tímto způsobem odpovídá pouze jediné specifické frekvenci ω_s .

Zajímavá situace nastane, pokud charakteristický fázový posun φ mezi všemi silami a všemi odezvami má být přesně 90° . Rovnice (3.132) se v tomto případě zredukuje na tvar :

$$[K - \omega^2 M]\{X\} = \{0\} \quad (3.133)$$

což je rovnice, jejíž řešením dostaneme vlastní frekvence a vlastní tvary netlumeného systému. Došli jsme tedy k důležitému výsledku, že je vždy možné najít množinu monofázových sil, které způsobí množinu monofázových odezev, a navíc, pokud jsou tyto dvě množiny monofázových parametrů proti sobě posunuty přesně o fázový úhel 90° , potom frekvence, na které bude systém kmitat, je identická s jednou z jeho vlastních netlumených frekvencí a tvar výchylek je odpovídající netlumený vlastní tvar.

Tento velmi důležitý výsledek je základem mnoha měřících postupů s více budiči používaných zejména v leteckém průmyslu k izolování netlumených módů struktur, které se potom dají snadno srovnat s teoretickými předpoklady. Je též pozoruhodné, že je to jedna z mála metod k přímému získání netlumených módů, protože téměř všechny ostatní metody získávají skutečné tlumené módy testovaného systému. Fyzikální podstata této techniky je jednoduchá: vektor sil je vybrán tak, aby přesně vyvážil všechny tlumící síly, ať už jsou jakékoli, takže se tento princip hodí stejně dobře na všechny typy tlumení. V literatuře se s touto metodou modální zkoušky můžeme setkat pod názvem *metoda přizpůsobeného buzení*.



Shrnutí pojmů

SDOF, MDOF
netlumený a tlumený systém
pohybová rovnice, charakteristická rovnice
pól
reziduum
vlastní číslo
viskózní tlumení
hysterézní (strukturní) tlumení
3dB pásmo, body s polovičním výkonem
Nyquistův graf
proporcionální a neproporcionální tlumení
rezonanční naladění
odezvová analýza
ortogonalita vlastních tvarů
normování vlastních tvarů
bodová a přenosová FRF
rezonance a antirezonance



Otázky

1. Nakreslete schéma systému s 1^o volnosti a napište jeho pohybovou rovnici.
2. Zakreslete kořeny charakteristické rovnice (póly) v Laplaceově rovině.
3. Jak lze zobrazit naměřenou FRF?
4. Nakreslete, popište a vysvětlete Bodeho graf (amplitudo-fázovou charakteristiku).
5. Jak lze určit tlumení systému z naměřené FRF?
6. Co je to Nyquistův graf?
7. Jak se od sebe liší graf amplitudy bodové a přenosové FRF systému s více stupni volnosti??
8. Jaké znáte modely tlumení?
9. Jaký je rozdíl mezi proporcionálním a neproporcionálním tlumením? Jak se projeví tyto typy tlumení ve vlastních tvarech?
10. Jak je definován jeden prvek matice FRF? (napište vztah pro netlumený systém, systém s viskózním tlumením a systém s hysterézním tlumením)
11. Co je podstatou metody přizpůsobeného buzení?

4 MODÁLNÍ ZKOUŠKA

V této kapitole se dozvíte, jak prakticky modální zkoušku provést. Celý postup zahrnuje tři až čtyři hlavní fáze - přípravu měřené struktury a vytvoření modelu pro měření, vlastní měření, získání modálních parametrů z naměřených dat a případně ověření správnosti získaného modálního modelu, srovnání s výpočtovým modelem atp.



Čas ke studiu: 12 hodin



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- Připravit modální zkoušku, vybrat vhodný typ uložení struktury, způsob buzení, snímače, vytvořit experimentální model
- Naměřit všechny potřebné frekvenční odezвовé funkce a ověřit jejich správnost
- Vybrat vhodnou metodu zpracování naměřených dat
- Prezentovat experimentálně získaný modální model



Výklad

Je zřejmé, že volba různých postupů v jednotlivých fázích modální zkoušky do značné míry závisí na tom, za jakým účelem modální zkoušku provádíme (viz kapitola 1.1). V této kapitole si popíšeme jednotlivé možnosti tak, abyste získali přehled o jednotlivých možnostech a mohli se kvalifikovaně rozhodovat.

4.1 Příprava

4.1.1 Příprava měřené struktury

O způsobech uložení struktury při měření už jsme se stručně zmínili v kapitole 1.4. Zde o jednotlivých možnostech pojednáme podrobněji.

4.1.1.1 Volné uložení

Volné uložení je teoreticky takové uložení, kdy měřené těleso nemá žádné vazby s okolím, je volně umístěno v prostoru a při teoretické analýze takto uložené těleso vykazuje 6 módů tuhého tělesa - tj. 3 posuvy ve směru souřadných os a 3 rotace kolem souřadných os. Všechny 6 těchto módů má vlastní frekvenci nulovou.

Prakticky realizujeme volné uložení tělesa buď tím, že jej uložíme na velmi měkkou podložku (např. na molitan) nebo jej zavěsíme pomocí měkkých pružin. Je zřejmé, že v tomto případě vlastní frekvence módů tuhého tělesa nebudou nulové, ale obecně půjde o velmi nízké hodnoty. Takto realizované uložení považujeme za volné, pokud nejvyšší vlastní frekvence

módů tuhého tělesa je menší než 10% hodnoty nejnižší deformační vlastní frekvence. Tak např. pokud u nosníku má jeho první ohybový mód frekvenci 150 Hz, měly by všechny módy tuhého tělesa být menší než 15 Hz. Při splnění tohoto požadavku je ovlivnění deformačních vlastních frekvencí uložením zanedbatelné.

Spíše než vlastní frekvence však může uložení ovlivnit tlumení jednotlivých módů. Pokud tedy provádíme měření s cílem zjistit přesné hodnoty tlumení, je možné vliv uložení minimalizovat tak, že měkké závěsy umístíme do uzlových bodů. Ty jsou však pro každý mód jiné, takže pro získání co nejpřesnějších hodnot tlumení bychom museli měřit každý mód zvlášť s jiným umístěním závěsů.

Volné uložení je jednak nejjednodušší a jednak nejvhodnější, pokud chceme srovnávat modální model získaný měřením s modálním modelem získaným výpočtem. Použijeme jej tedy vždy, pokud to okolnosti dovolí.

4.1.1.2 Pevné uložení

Pevné (vetknuté) uložení je teoreticky takové uložení, kdy některé body na tělese (stupně volnosti) jsou zcela znehybněny připojením k zemi. Toho v praxi v podstatě nelze dosáhnout, takže prakticky považujeme za pevné uložení takové, kdy odezva "znehybněných" stupňů volnosti je menší než 10% odezvy všech ostatních stupňů volnosti. Tento typ uložení dělá problémy při srovnávání modálního modelu získaného měřením s modálním modelem získaným výpočtem, protože rozdíly v obou modelech mohou být způsobeny právě nestejnými okrajovými podmínkami. Někdy se však tomuto typu uložení nemůžeme vyhnout, pokud jde o strukturu, jejíž modální vlastnosti při volném uložení nemají význam (např. u turbínových lopatek).

Další potíž u tohoto typu uložení je s opakovatelností měření. Přes veškerou snahu (utahování spojení struktury s měřicí základnou momentovým klíčem apod.) se nedaří dosáhnout 100% opakovatelnosti měření, pokud provedeme demontáž a opětovnou montáž měřené struktury k měřicí základně. Zkušenost ukazuje, že vlastní frekvence jednotlivých módů se po takovém zásahu mohou změnit v rozsahu až $\pm 5\%$.

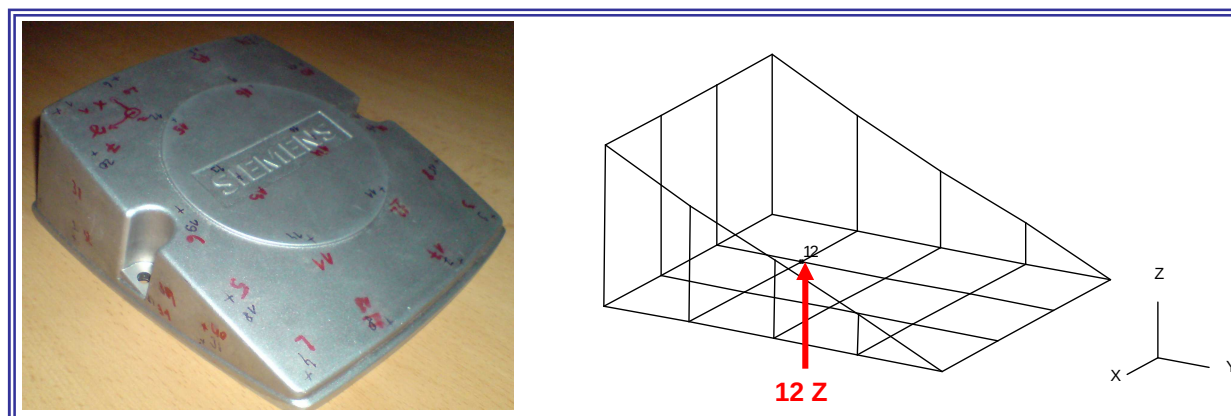
4.1.1.3 Uložení in situ

Tento typ uložení je nejjednodušší na přípravu - žádná není, měření se provádí za skutečných provozních podmínek. Tento typ uložení volíme buď tehdy, když nám nic jiného nezbyvá (např. při měření velmi těžké struktury, většího stroje apod.) nebo tehdy, když nás právě zajímají modální vlastnosti při provozních podmínkách. Je zřejmé, že v tomto případě je srovnávání experimentálního modelu s výpočtovým modelem ještě komplikovanější než při pevném uložení.

4.1.2 Příprava experimentálního modelu

Modelem v této kapitole budeme nazývat geometrický model měřené struktury s nadefinovanými body a stupni volnosti, ve kterých budeme provádět měření, tedy nikoli matematický model (fyzikální, modální nebo odezvoový). Na struktuře si zvolíme síť bodů, ve

kterých budeme provádět měření, a v každém bodě také rozhodneme, ve kterých směrech budeme měřit, tedy nadefinujeme stupně volnosti. Běžně se měří posuvné stupně volnosti (směry X, Y, Z), výjimečně rotační stupně volnosti, neboť ty vyžadují speciální snímače a postupy. Hustota sítě měřících bodů do značné míry záleží na frekvenčním rozsahu měření, resp. na počtu módů, které chceme vyšetřit - platí, že čím vyšší mód, tím je jeho vlastní tvar složitější a tím více bodů je potřeba k jeho realistickému vykreslení. Volíme tedy tak hustou síť, abychom spolehlivě rozlišili všechny zjištěné módy, ale ne zbytečně hustou, aby počet měřených bodů (stupňů volnosti) neúměrně nenarůstal a aby se zbytečně neprodložovala doba měření.



Obr. 4.1. - Měřená struktura a její geometrický model s vyznačením referenčního bodu

Síť bodů zakreslíme na měřenou strukturu a stejný model vytvoříme v softwaru pro modální analýzu. Příklad je uveden na obr. 4.1. Musíme také zvolit referenční stupeň volnosti, tj. místo a směr, ve kterém je při měření s použitím rázového kladívka trvale umístěn snímač odezvy (obvykle akcelerometr) a při měření s použitím budiče je v něm připojen ke struktuře budič. Požadavky na umístění referenčního bodu jsou do jisté míry protichůdné:

- ♦ Měl by být zvolen tak, aby v něm byla dostatečně velká odezva při všech módech, aby byl poměr odezvy a šumu co nejlepší.
- ♦ Měl by být zvolen tak, aby připevněním akcelerometru nebo budiče byla struktura co nejméně ovlivněna.

Je zřejmé, že tyto dva požadavky jsou v rozporu, protože největší vliv na strukturu bude mít umístění akcelerometru nebo budiče v místě, kde má struktura největší odezvu. V praxi je tedy nutné volit rozumný kompromis mezi těmito dvěma požadavky. Navíc, pokud je hmotnost akcelerometru vzhledem k hmotnosti struktury zanedbatelná, ovlivnění struktury je rovněž zanedbatelné.

S prvním požadavkem souvisí i to, že si musíme dát pozor, aby referenční bod nebyl současně uzlovým bodem některého módu z těch, které nás zajímají. V tomto případě by odezva tohoto módu byla nulová a nebyli bychom schopni jej identifikovat. Jednou z možností, jak se této situaci vyhnout, je znát předem přibližné vlastní tvary, např. z výpočtového modelu. Druhou možností, pokud vlastní tvary neznáme a nedokážeme je odhadnout, je vyzkoušet před započítím celé modální zkoušky více různých umístění

referenčního bodu a sledovat, zda je počet rezonancí v naměřené FRF stálý. Pokud by v některém místě některá z rezonancí zmizela, znamená to, že v tomto místě je uzlový bod příslušného vlastního tvaru a tento bod nemůže sloužit jako referenční.

4.2 Měření a měřicí metody

V této kapitole probereme měřicí metody, které se pro modální zkoušky používají. Už v úvodní kapitole jsme zmínili, že existují dva typy měření vibrací:

- ♦ Ty, u kterých se měří jen jeden parametr (obvykle úroveň odezvy)
- ♦ Ty, u kterých se měří jak vstup, tak i odezva na výstupu

Připomeneme-li si základní vztah:

$$\text{ODEZVA} = \text{VLASTNOSTI} \times \text{VSTUP}$$

vidíme, že co se děje s vibracemi testovaného objektu můžeme úplně definovat pouze tehdy, když byly naměřeny dva ze tří členů této rovnice. Měříme-li pouze odezvu, nejsme schopni říci, zda zvlášť vysoká úroveň odezvy je způsobena silným buzením nebo rezonancí struktury.

Modální zkouška se vztahuje ke druhému typu měření, kdy se měří současně buzení i odezva, takže je možné použít základní rovnici k odvození vlastností systému přímo z naměřených dat. V rámci této kategorie existuje více různých přístupů, které mohou být použity, ale tento text je zvláště zaměřen na metodu *buzení v jediném bodě* (i když v průběhu modální zkoušky může tento bod svou polohu na struktuře měnit). Při této metodě měříme jeden sloupec nebo jeden řádek matice frekvenčních odezvových funkcí. Dvě v principu stejné, nicméně přece jen modifikace této metody buzení v jediném bodě jsou:

- ♦ SISO (Single Input Single Output) - jeden vstup (buzení), jeden výstup (odezva)
- ♦ SIMO (Single Input Multiple Output) - jeden vstup, více výstupů - počet výstupů závisí v podstatě na tom, kolik kanálů analyzátorů máme k dispozici a kolik odezev současně jsme schopni sejmout. Princip následného zpracování dat je ale stejný jako u SISO metody, pracujeme s klasickou FRF dle vztahu (1.1).

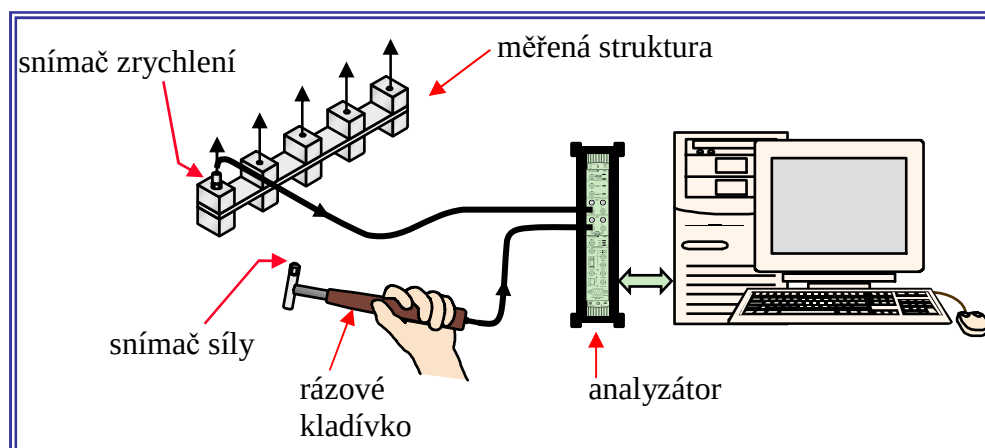
Dalším typem měření je tzv. MIMO (Multiple Input Multiple Output) měření, při kterém se provádí buzení současně ve více bodech. Tento typ měření je nezbytný u modálních zkoušek v těchto případech:

- ♦ U velkých struktur, které nelze celé vybudit jediným budičem.
- ♦ U složitých struktur, které vykazují tzv. lokální módy, při kterých kmitá jen část struktur a které rovněž není možné všechny vybudit jedním budičem.
- ♦ U tzv. symetrických struktur, které vykazují tzv. vícenásobné módy (dva nebo více módů na stejné frekvenci). Aby bylo možné tyto módy izolovat, je nutné mít tolik referenčních bodů, kolika násobné jsou módy.
- ♦ MIMO metoda je běžným standardem v leteckém a automobilovém průmyslu, nicméně má mírně odlišné teoretické pozadí, než je probíráno v tomto textu, takže se jí zde nebudeme podrobněji zabývat.

4.2.1 Základní sestava měření

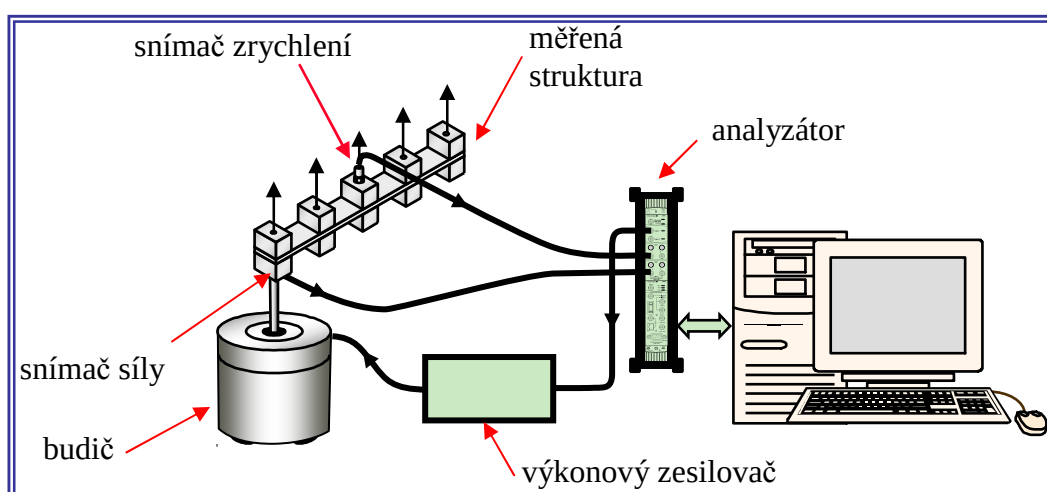
V sestavě experimentu používané pro měření FRF rozlišujeme čtyři hlavní jednotky:

- ♦ mechanismus buzení
- ♦ soustava snímačů k měření budící síly a odezvy
- ♦ analyzátor k získání požadovaných dat
- ♦ výpočetní systém ke zpracování získaných dat



Obr. 4.2 - Sestava měření při použití rázového kladívka

Na obr. 4.2 je zobrazeno typické uspořádání měřicího systému při buzení rázovým kladívkem. V tomto případě je akcelerometr trvale umístěn v referenčním bodě a strukturu postupně budíme kladívkem ve všech bodech. Tím získáme jeden řádek matice FRF. Na obr. 4.3 je typické uspořádání měřicího systému při buzení pomocí dynamického budiče vibrací. V tomto případě je snímač síly trvale umístěn v referenčním bodě a odezvu postupně (nebo najednou, podle počtu dostupných kanálů analyzátoru) snímáme ve všech bodech na struktuře. Tím získáme jeden sloupec matice FRF.



Obr. 4.3 - Sestava měření při použití dynamického budiče vibrací

4.2.1.1 Mechanismus buzení

Způsoby, jakými docílíme rozkmitání měřené struktury, můžeme rozdělit do dvou hlavních skupin:

1. rázové buzení

- ♦ pomocí rázového (modálního) kladívka - nejběžnější způsob
- ♦ uvolněním z deformované pozice - např. přetětím lana
- ♦ úderem padající hmotou
- ♦ kyvadlovým rázovadlem

2. buzení pomocí připojeného budiče vibrací

- ♦ elektromagnetickým budičem - nejběžnější způsob
- ♦ elektrohydraulickým budičem
- ♦ mechanickým budičem - excentricky uložené rotující hmoty

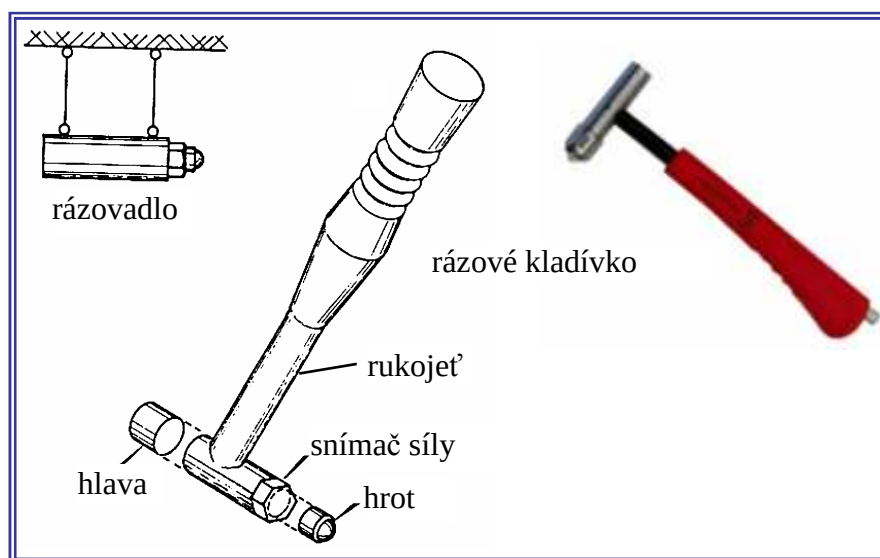
Existují ještě další netradiční způsoby buzení, které se používají u velkých struktur, např. u mostů nebo ropných plošin:

- ♦ pomocí tryskových motorů
- ♦ přirozené buzení větrem, mořskými vlnami, silničním provozem

Poslední dvě metody se uplatní v tzv. provozní modální analýze (viz kap. 5) a vedou k získání nenormovaných vlastních tvarů.

4.2.1.1.1 Rázové buzení pomocí modálního kladívka

Použití modálního (rázového) kladívka je nejjednodušším a nejrychlejším způsobem, jak vybudit kmitání struktury. Nevyžaduje žádné přípravné práce a proto je velmi vhodné pro použití v provozních podmínkách.



Obr. 4.4 - Detaily rázového kladívka

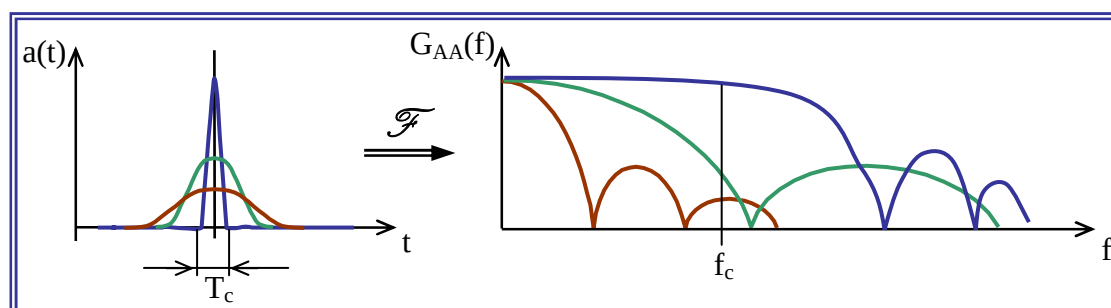
Kladívko se skládá z hlavy, snímače síly, hrotu a rukojeti. Můžeme také použít tzv. rázovadlo, což je v podstatě kladívko bez rukojeti (viz obr. 4.4). K výbavě kladívka standardně patří sada hrotů různých tuhostí a hlav různých hmotností, pomocí nichž lze ovlivnit frekvenční rozsah měření a velikost vyvinuté síly. Snímač síly zjišťuje velikost síly pocítěné kladívkem, o které se předpokládá, že je stejně velká a opačného směru než síla působící na strukturu.

Velikost úderu je v zásadě určena hmotností hlavy kladívka a rychlostí, kterou se pohybuje, když udeří do struktury. Operátor ovlivňuje spíše rychlost než samotnou úroveň síly, a tak vhodnou cestou, jak nastavit řád úrovně síly, je změna hmotnosti hlavy kladívka.

Rozsah frekvencí, který je účinně vybuzen rázovým kladívkem, je řízen tuhostí dotýkajících se povrchů a hmotností hlavy kladívka: na frekvenci dané vztahem

$$\sqrt{\frac{\text{kontaktní tuhost}}{\text{hmotnost kladívka}}}$$
 je rezonance systému, nad kterou je obtížné dodat energii do zkoušené

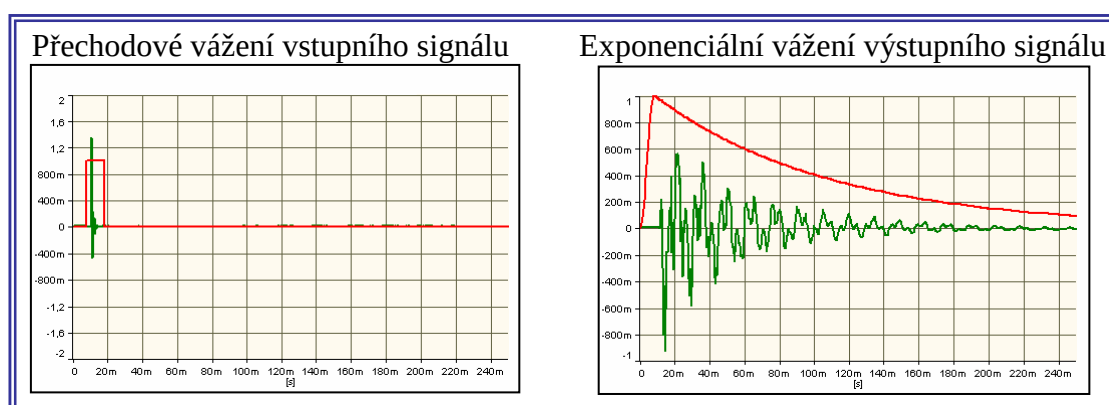
struktury. Když hrot kladívka udeří do testované struktury, vyvolá to silový impuls, který má v podstatě tvar poloviční sinusovky, jak je ukázáno na obr. 4.5 vlevo. Impuls tohoto typu má frekvenční obsah ve tvaru ukázaném na obr. 4.5 vpravo, který je až do určité frekvence (f_c) v podstatě plochý a nad ní je slabší. Pro vybuzení vibrací ve frekvenčním rozsahu nad frekvencí f_c je tedy poměrně neefektivní, takže potřebujeme nějak tento parametr ovlivňovat. Je možné dokázat, že existuje přímý vztah mezi první mezní frekvencí f_c a délkou trvání impulsu T_c a že k tomu, abychom zvýšili frekvenční rozsah, je zapotřebí zkrátit délku pulsu. Ta má zase vztah k tuhosti (ne k tvrdosti) zúčastněných povrchů a k hmotnosti hlavy kladívka. Čím jsou materiály tužší, tím kratší je délka trvání pulsu a tím vyšší je frekvenční rozsah vybuzený úderem. Podobně, čím menší je hmotnost rázovadla, tím vyšší je účinný frekvenční rozsah. Za tím účelem, aby bylo možné regulovat použitelný frekvenční rozsah, se používá na kladívko sada různých hrotů a hlav. Obecně lze říci, že se má použít nejměkčí možný hrot, aby veškerá vstupní energie byla dodána ve frekvenčním pásmu, které nás zajímá. Použití tužšího hrotu než je nutné vede k tomu, že dodaná energie způsobí vibrace vně frekvenčního pásma, které nás zajímá, na úkor těch, které jsou uvnitř tohoto pásma.



Obr. 4.5 - Silový impuls a jeho spektrum

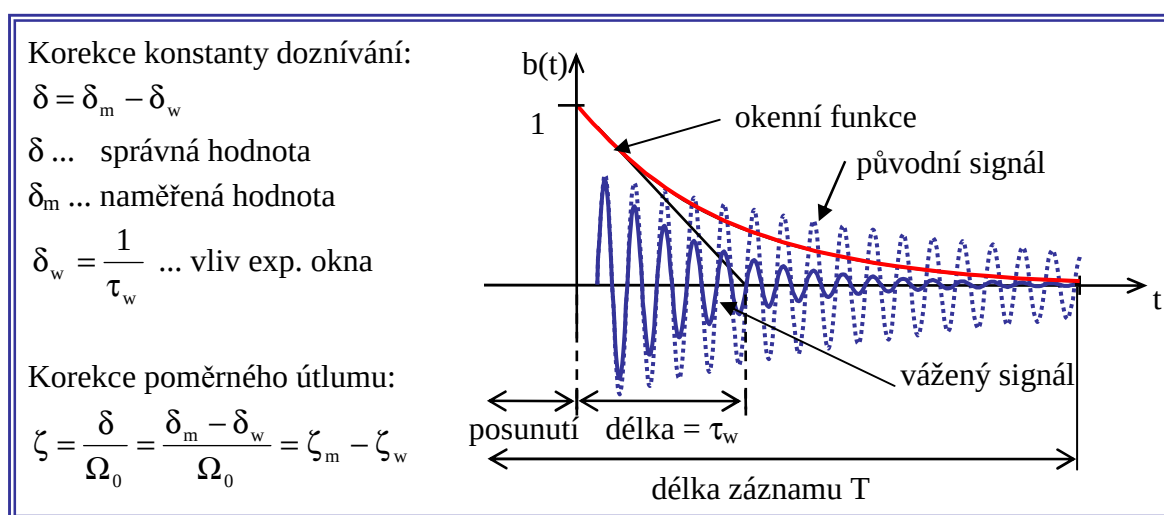
Nevýhodou při použití kladívka je to, že regulace pásma buzení je omezena a většinou není možné použít frekvenční lupu (zoom). Činitel výkmitu (crest faktor) je vysoký a v důsledku vysoké špičkové hodnoty působící síly je nebezpečí lokálního poškození struktury a vybuzení jejího nelineárního chování.

Další relativní nevýhodou je nutnost použít speciální váhové funkce na vstupní i výstupní signál. Na vstupní signál se používá přechodové okno, které slouží k potlačení šumu v době, kdy silový impuls nepůsobí, ale probíhá měření. Aby bylo správně zvoleno posunutí a délka okna, je dobré expandovat svislou osu tak, aby byla vidět úroveň šumu. U výstupního signálu často zlepší analýzu exponenciální vážení, a to tím, že zmenší chybu únikem způsobenou ořezáním signálu. Aby bylo optimálně nastaveno okno, je třeba se dívat na amplitudu váženého signálu. Délka exponenciálního okna (časová konstanta) má být vybrána tak, aby signál byl na konci záznamu zeslaben na úroveň šumu, nebo alespoň o 40 dB. Začátek okna by měl být stejný jako u okna pro vstupní signál, pokud není v systému dopravní zpoždění. Nastavení oken viz obr.4.6.



Obr. 4.6 - Váhová okna při rázovém buzení

Použitím exponenciálního vážení přidáváme do systému elektronické tlumení. Za těchto okolností bude tlumení systému zjištěné měřením nadsazené a chceme-li získat jeho přesnou hodnotu, musíme provést korekci na vliv exponenciálního okna (viz obr. 4.7).

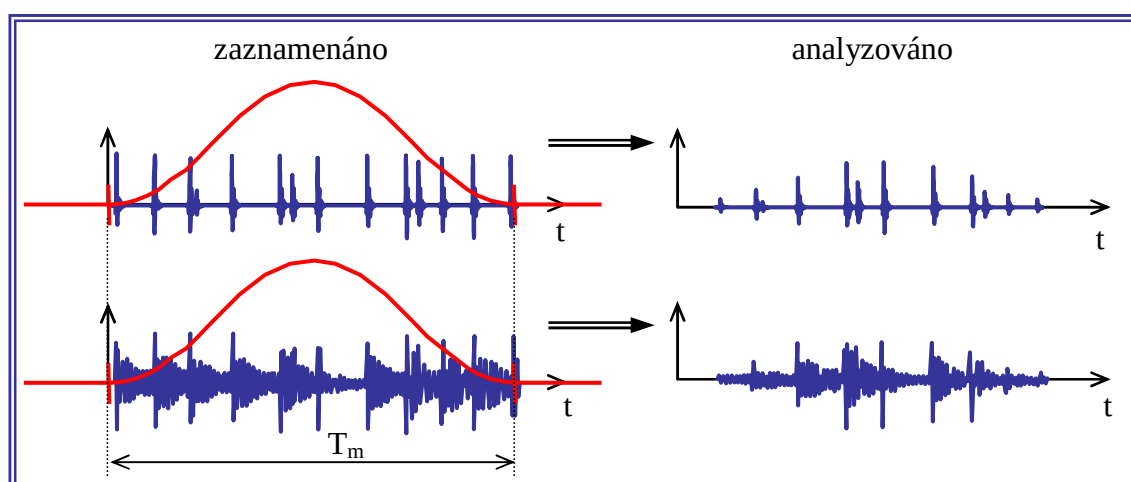


Obr. 4.7 - Korekce vlivu exponenciálního okna na tlumení

Některé nevýhody při použití rázového kladívka lze odstranit použitím tzv. náhodného rázového buzení. Jde o více úderů po sobě jdoucích v průběhu záznamu (viz obr 4.8). V tomto případě se používá na vstupní i výstupní signál Hanningovo okno, abychom na začátku a na konci doby měření signál potlačili k nule a tím omezili chybu únikem. Jelikož okna na vstupní

a výstupní signál jsou stejná, jejich vliv se ve FRF vyruší a není nutné provádět korekci vlivu okna při určování tlumení.

Náhodné rázové buzení vnese do struktury v průběhu jednoho časového záznamu více energie než jednotlivý úder a činitel výkmitu je nižší. Přitom zůstávají zachovány výhody rázového buzení, tedy snadná použitelnost v provozních podmínkách. Tento způsob buzení je vhodné použít, provádíme-li měření v nízkém frekvenčním pásmu nebo s použitím frekvenční lupy. V tomto případě je doba měření relativně dlouhá a při použití pouze jednoho úderu by běžně tlumená struktura kmitala mnohem kratší dobu, než by byla doba měření. Aplikací více úderů toto odstraníme, ale stále zůstává nebezpečí, že většina energie dodané struktuře bude vně frekvenčního pásma, které měříme, protože regulace frekvenčního pásma buzení je při použití rázového buzení vždy omezená (jen tuhostí hrotu kladívka a hmotností jeho hlavy).



Obr. 4.8 - Signály při náhodném rázovém buzení

4.2.1.1.2 Buzení pomocí připojeného budiče vibrací

Asi nejběžnějším typem budiče je elektromagnetický (neboli elektrodynamický) vibrátor, ve kterém je přiváděný vstupní signál převáděn na střídavé magnetické pole, ve kterém je umístěna cívka, která je připojena k poháněcí části zařízení a ke struktuře. V tomto případě jsou frekvence a amplituda buzení řízeny nezávisle na sobě, čímž je dána větší pružnost ovládání - což je zvláště užitečné, protože někdy potřebujeme při průchodu přes rezonance měnit úroveň buzení. Je však třeba poznamenat, že elektrický odpor těchto zařízení se s amplitudou pohybu pohyblivé cívky mění a není tedy možné odvodit budící sílu z měření napětí přiváděného do budiče ani z měření proudu procházejícího budičem, protože tím neměříme sílu působící na samotnou strukturu, ale na celek tvořený strukturou a pohonem budiče. I když se může zdát, že rozdíl mezi touto silou (generovanou v budiči) a silou, která působí na strukturu bude asi malý, je třeba si uvědomit, že právě v blízkosti rezonance je k vytvoření velké odezvy zapotřebí velmi malá síla a obvykle se stane to, že aniž bychom změnili nastavení na výkonovém zesilovači nebo na generátoru signálu, dojde na frekvencích blízkých vlastním frekvencím struktury ke znatelnému zmenšení úrovně síly. To má mimo jiné za následek, že měření síly na frekvencích blízkých rezonancím je náchylné na znečištění šumem.

Sílu působící na strukturu tedy měříme co nejbližše jejímu povrchu snímačem síly, stejně jako u rázového buzení.

Obecně lze říci, že čím větší je budič, tím větší sílu může pro vybuzení struktury vyvinout, současně se však snižuje užitečný frekvenční rozsah. Účinné buzení je možné pouze do té doby, dokud pohyblivé části budiče zůstávají tuhou hmotou. Poté, co frekvence vibrací dosáhne a přejde přes první vlastní frekvenci cívky a stolu pohonu budiče, dojde k závažnému zeslabení síly, která je dostupná pro pohon zkoušeného objektu a přestože i nad touto kritickou frekvencí je nějaké buzení možné, představuje to přirozený limit užitečného pracovního rozsahu zařízení. Tato frekvence je přirozeně pro větší budiče nižší.

Ve speciálních případech je vhodné použít elektrohydraulický budič. Je to tehdy, pokud zkoušíme struktury nebo materiály, jejichž normální vibrační prostředí je spojeno s větším statickým zatížením, které může docela dobře změnit jejich dynamické vlastnosti nebo dokonce jejich geometrii. Elektrohydraulický budič je schopen současně s dynamickým vibračním zatížením aplikovat i statické zatížení, což je v těchto případech nezbytné. Jinou výhodou, kterou mohou elektrohydraulické budiče poskytnout, je to, že umožňují dát relativně dlouhý úder, a tím dovolují vybuzení struktur na velkých amplitudách - možnost, která není dostupná se srovnatelně velkými elektromagnetickými budiči. Na druhé straně mají elektrohydraulické budiče sklon mít omezený pracovní frekvenční rozsah a jen ty velmi specializované dovolují měření v rozsahu nad 1 kHz, zatímco elektromagnetické budiče mohou pracovat až v oblasti 30-50 kHz, v závislosti na jejich velikosti. Jsou také složitější a dražší, i když kompaktnější a lehčí ve srovnání s elektromagnetickými zařízeními.

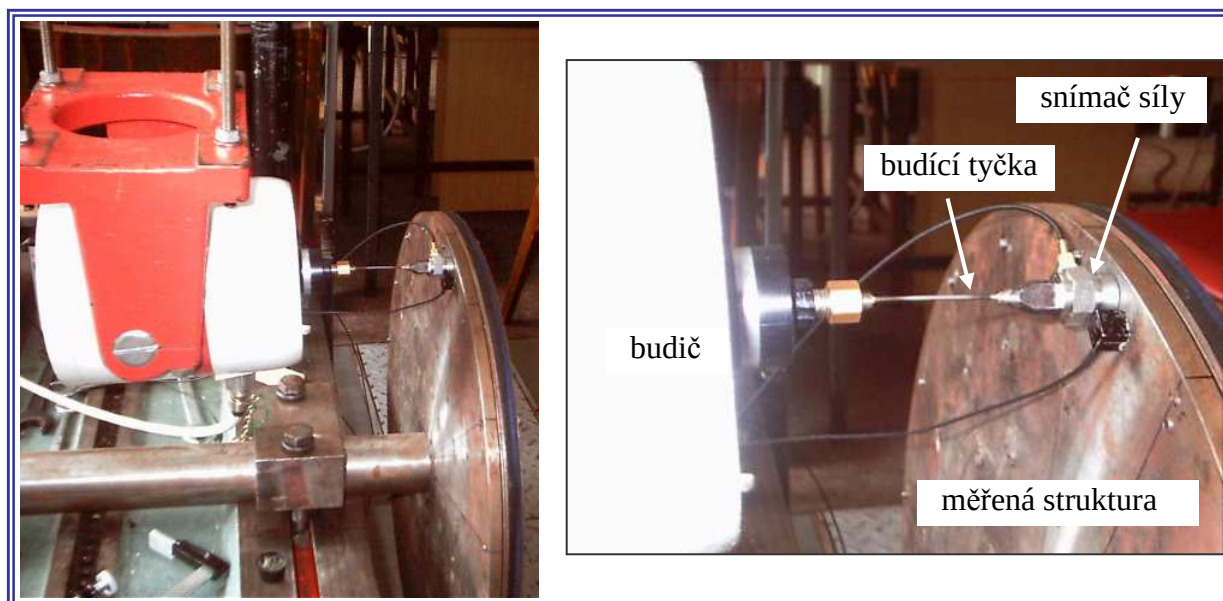
Posledním typem budiče, o kterém je vhodné se zmínit, je mechanický budič, který je realizován pomocí excentricky uložených rotujících hmot (nevývažků). Je schopen generovat předepsanou sílu na různých frekvencích, i když řízení jeho použití je relativně málo pružné. Velikost síly je dána nevývažkem a dá se změnit pouze jeho úpravou - což není nic, co by se dalo udělat v průběhu kmitání. Tento typ mechanismu buzení je také relativně neúčinný na nízkých frekvencích, protože velikost budící síly je závislá na druhé mocnině otáček. Pokud však amplituda vibrací způsobená budičem není příliš velká vzhledem k orbitě nevývažků, je amplituda a fáze budící síly poměrně přesně známa a nevyžaduje další měření, tak jako u ostatních typů budičů. Tento typ budiče se používá pro měření velkých struktur, např. mostů nebo základových desek turbogenerátorů.

Připojení budiče ke struktuře

U elektromagnetického i elektrohydraulického budiče je nezbytné připojit poháněcí základnu budiče ke struktuře, obvykle s vestavěním snímače síly. Přitom se musíme vyhnout zavedení nechtěného buzení nebo neuvážených modifikací struktury. Z toho to první je asi nejdůležitější, protože je nejméně vidět. Vrátime se k definici jednotlivé FRF jako poměru mezi harmonickou odezvou v místě **j** způsobenou jedinou harmonickou silou působící v místě **k**. Tato definice platí s výhradou, že tato jediná síla musí být jediným buzením struktury a o splnění této podmínky musíme při modální zkoušce usilovat. I když se může zdát, že budič je schopen působit silou pouze v jednom směru - je to v podstatě jednosměrné zařízení - je zde u většiny praktických struktur, jejichž pohyb je obecně složitý a vícesměrný, problém. Tento

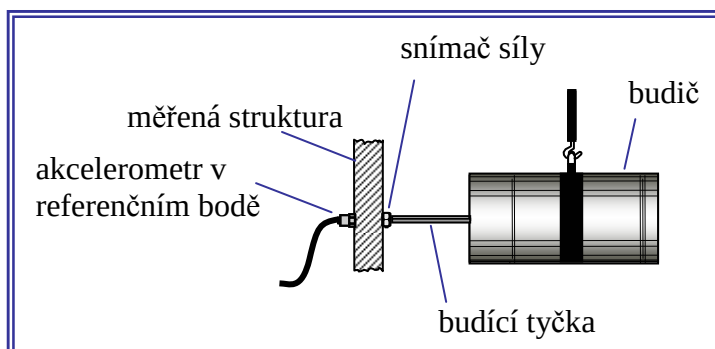
problém spočívá v tom, že když zatlačíme v jednom směru - řekněme ve směru osy x - odpovídá struktura nejen v tomtéž směru, ale i v jiných, jako např. ve směru os y a z a také ve třech rotačních směrech. Takový pohyb je zcela v pořádku a je předpokládán, ale je možné, že pokud je budič ke struktuře připojen nesprávně, vznikne tím druhotná forma buzení.

Pohyblivá část budiče je obvykle velmi pohyblivá ve směru osy svého pohonu, ale zcela opačně je tomu v jiných směrech (tzn. je velmi tuhá). Pokud tedy struktura chce odpovídat řekněme v příčném směru stejně jako ve směru působení budiče, potom tuhost budiče způsobí vznik odporových sil a momentů, které se na struktuře projeví ve formě druhotného buzení. Snímače odezvy o tomto nic nevědí a snímají celkovou odezvu, která je způsobena nejen budicí silou (která je známa), ale i druhotnými neznámými silami.



Obr. 4.9 - Připojení budiče k měřené struktuře - budící tyčka

Řešením je připojení budiče ke struktuře přes budící tyčku nebo podobné spojení, které má tu vlastnost, že je tuhé v jednom směru (ve směru zamýšleného buzení) a současně je relativně pružné v ostatních pěti směrech. Vhodná budící tyčka, která je vyrobena z pružinového drátu délky cca 5 cm, je ukázána na obr. 4.9. Je třeba dát pozor, aby nedošlo k překompenzování: pokud je budící tyčka příliš dlouhá nebo příliš pružná, začíná zavádět do měření své vlastní rezonance a může být velmi obtížné je z pravých dat odstranit.

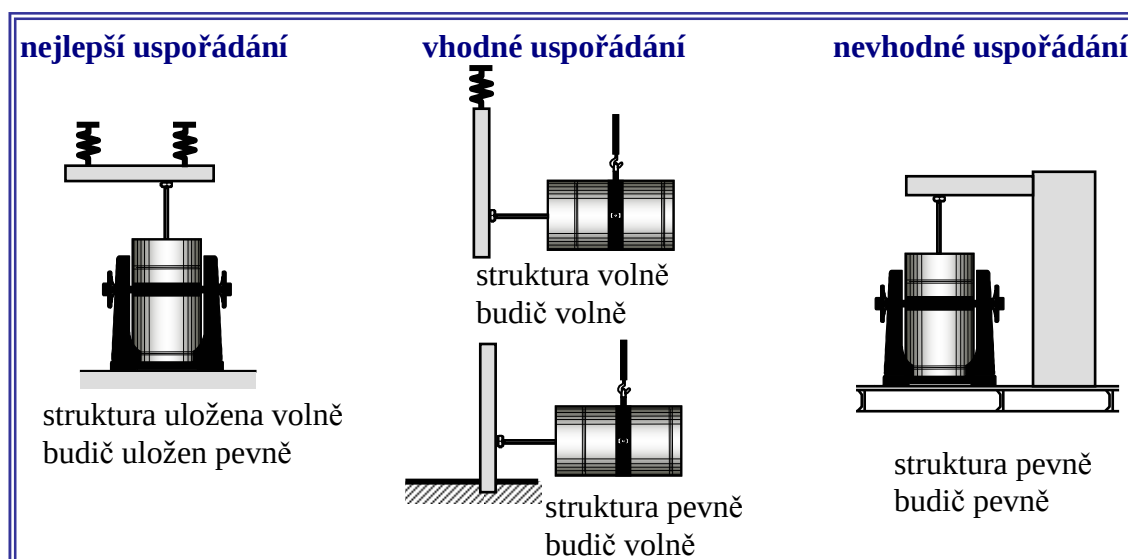


Obr. 4.10 - Umístění snímače síly při měření pomocí budiče

Z hlediska přesného měření budící síly je nutné, aby snímač síly byl co nejbližší měřené struktuře. Správné uspořádání nutné k tomu, aby naměřené frekvenční odezvové funkce byly co nejspolehlivější, je uvedeno na obr. 4.10.

Dále je třeba zvážit, jak má být budič uložen nebo připojen ve vztahu ke zkoušené struktuře z hlediska reakčních sil od budiče. Obecně je možno říci, že buď budič nebo měřená struktura musí být uloženy volně. Na obrázku 4.11 jsou ukázány tři vhodné způsoby a jeden nevhodný. Na obrázku 4.11 vlevo (a též na obr. 4.12) je budič uložen pevně a působí na něj reakce od vnějšího uložení. To se často používá u malých struktur, které mohou být při měření uloženy volně (na měkkém závěsu). Nesmí ale docházet k rezonanci uložení budiče. Na dvou obrázcích uprostřed je budič zavěšen a projevují se reakce od jeho setrvačnosti. To samozřejmě omezuje vyvinutou sílu, ale je možné k budiči připojit přídavné hmoty. Měřená struktura může být rovněž zavěšena volně, ale může být i pevně uložená.

Příklad na obr. 4.11 vpravo není pro modální zkoušku vhodný, protože reakční síly v uložení budiče zavádějí přídavné buzení do struktury, které ale není snímačem síly měřeno.



Obr. 4.11 - Připojení budiče k měřené struktuře z hlediska reakčních sil

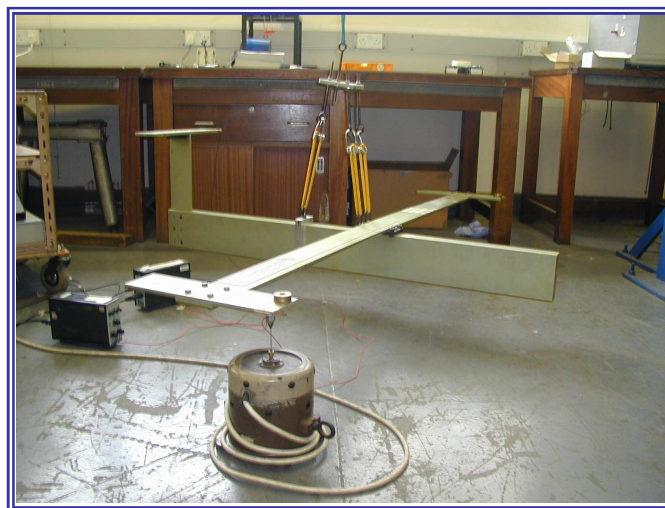
4.2.1.1.3 Typy budících signálů

Při realizaci buzení pomocí připojeného budiče vibrací máme široké možnosti při výběru budících signálů. Typy signálů můžeme rozdělit na (viz obr. 4.13):

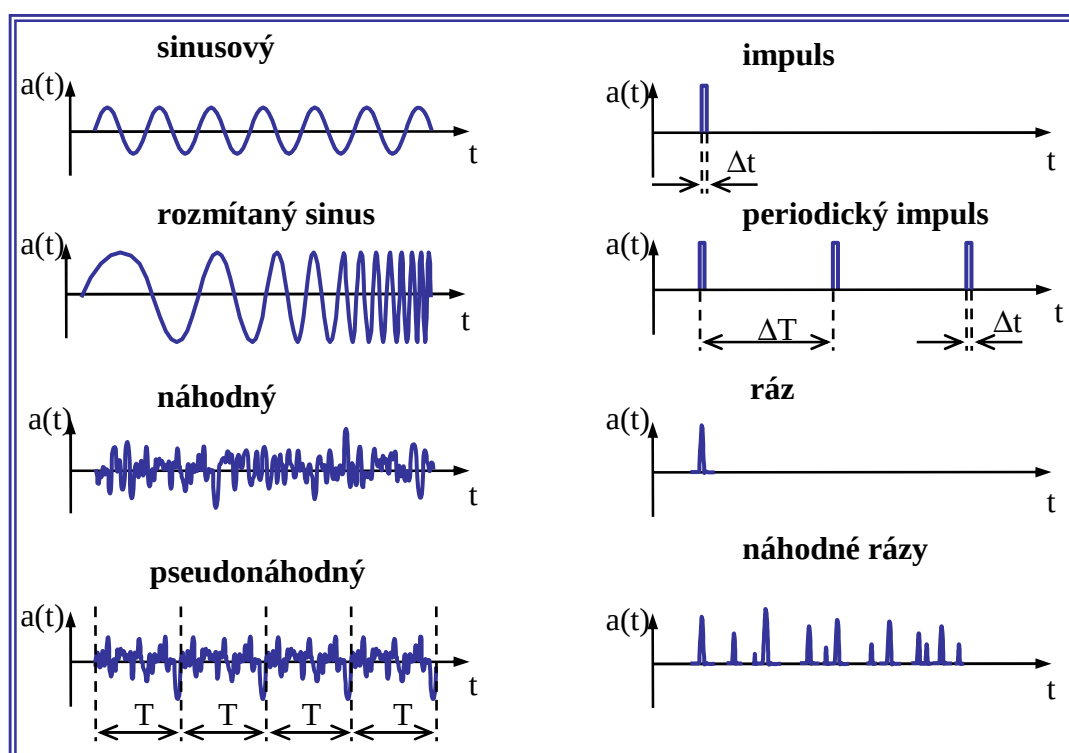
- ♦ harmonické (sinusový signál) - spektrum obsahuje pouze jednu frekvenci sinusové vlny
- ♦ širokopásmové - spektrum obsahuje pásmo frekvencí. Dále se dělí na:
 - impulsní (přechodový)
 - jeden impuls (nebo ráz)
 - periodický impuls
 - náhodné rázové buzení
 - náhodné
 - pseudonáhodné
 - rozmítaný sinus

Impulsní buzení většinou aplikujeme ve formě rázového nebo náhodného rázového buzení s použitím rázového kladívka, ale je možné tento typ buzení aplikovat i pomocí připojeného budiče vibrací. V tomto případě by šlo nejspíše o buzení impulsní nebo periodické impulsní. Všechny uvedené typy signálů jsou obvykle dostupné v generátoru signálů, který je součástí analyzátoru. Signál z generátoru pak přes výkonový zesilovač vstupuje do elektromagnetického budiče vibrací a je přenášen do struktury.

Pozn.: Signál rozmítaného sinu lze vyvodit také pomocí mechanického budiče vibrací, o náhodný signál jde např. i při buzení silničním provozem nebo mořskými vlnami.



Obr. 4.12 - Praktická realizace uložení struktury volně a budiče pevně



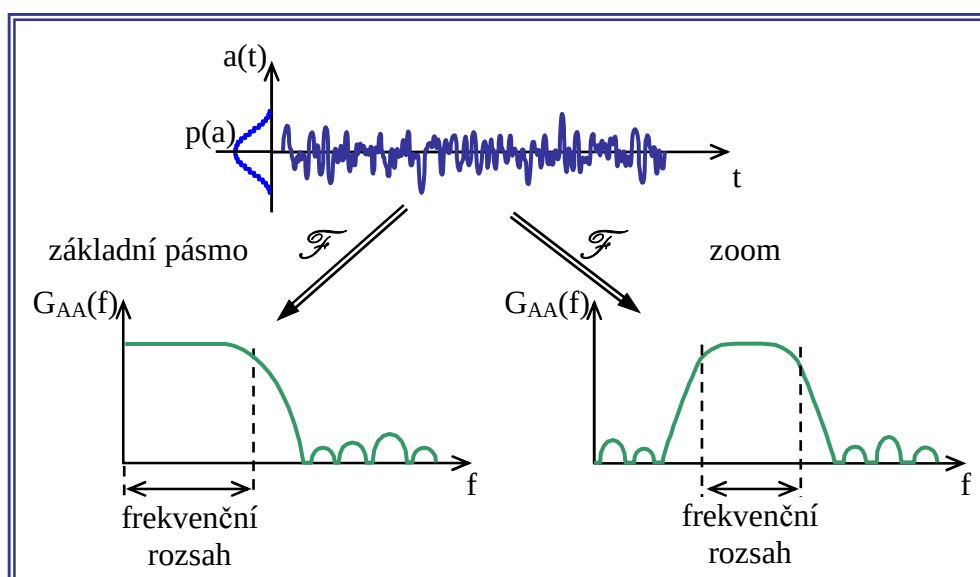
Obr. 4.13 - Základní typy budících signálů

Sinusový signál

Jednoduchý sinusový signál konstantní frekvence se v modální analýze uplatní stěží. Pokud už takový signál používáme, tak v podobě krokovaného sinu v tzv. FRA analyzátorech (FRA - Frequency Response Analyzer), které na rozdíl od běžně používaných FFT analyzátorů neprovádějí Fourierovu transformaci signálu, ale přímo měří ustálenou odezvu systému na ustálené harmonické buzení. Frekvence buzení se krokově mění a zaznamenává se podíl odezvy a buzení. Takto postupně se vykreslí celá FRF v požadovaném frekvenčním pásmu. Tento proces je velmi pomalý, ale je to v podstatě jediná možnost, pokud chceme podrobně zkoumat nelinearity ve strukturách. Je zřejmé, že frekvenční pásmo může být zvoleno libovolně, takže obvykle se tento postup používá v souvislosti s frekvenční lupou ke zkoumání oblastí v okolí rezonancí.

Náhodný signál

Náhodný signál je charakterizován výkonovou spektrální hustotou $G_{AA}(f)$ a hustotou pravděpodobnosti amplitudy $p(a)$, která má Gaussovo normální rozložení (viz obr.4.14). Může být pásmově omezen podle toho, jaký frekvenční rozsah nás zajímá. Stejně dobře jej lze použít pro měření v základním pásmu i pro měření s frekvenční lupou (viz obr.4.14). Signál není v čase záznamu periodický, je tedy nutné (na vstupní i výstupní signál) použít Hanningovo okno, abychom omezili chybu únikem. Změny amplitudy a fáze budícího signálu jsou náhodné, což znamená, že průměrováním se odstraní vliv případných nelinearit v systému a získáme ideální linearizovaný odhad FRF. Jelikož jde o náhodný signál, je průměrování samozřejmě nezbytné. Činitel výkmitu a poměr signálu k šumu jsou u tohoto typu signálu docela dobré.



Obr. 4.14 - Náhodný signál - časový průběh a spektrum

Pseudonáhodný signál

Pseudonáhodný signál je vlastně kus náhodného signálu opakujícího se s periodou T . Tato perioda je rovna délce záznamu. V důsledku toho nedochází k chybě únikem, protože signál je v době záznamu periodický, takže použití váhových oken není nutné (obdélníkové okno = žádné okno). Čáry spektra se shodují s čarami analyzátoru a případné nelinearity v

systému se neodprůměrují. Tento typ signálu se tedy hodí pouze na dokonale lineární systémy. Stejně jako u náhodného signálu, je možné i pseudonáhodný signál použít jak na měření v základním pásmu, tak na měření s frekvenční lupou.

Zvláštním typem pseudonáhodného signálu je tzv. *cvrkot* (v anglické literatuře *chirp*). Jde o rychle rozmítaný sinus, kdy se průchod od minimální frekvence k maximální opakuje každou periodu T , a tato perioda je rovna délce záznamu. Dá se použít ke studiu nelinearit.

4.2.1.2 Snímače k měření budící síly a odezvy

Podrobné pojednání o jednotlivých typech snímačů není předmětem tohoto textu. Pro připomenutí nahlédněte do skript z Vibrační diagnostiky. Zde pouze připomeneme, že každý snímač měří to, co se děje s ním samotným. Správným uchycením snímače musíme zajistit, aby to bylo totéž, co se děje se strukturou a co chceme měřit. Dále je třeba si uvědomit, že každý snímač má nějakou vlastní rezonanční frekvenci, která závisí především na velikosti snímače, a která je dále více nebo méně ovlivněna připevněním snímače k měřené struktuře. Účinné frekvenční pásmo, ve kterém můžeme snímač použít, je cca do 1/3 hodnoty této frekvence. Možné způsoby připevnění, seřazené podle toho, nakolik snižují vlastní frekvenci snímače (od nejlepších k nejhorším), jsou:

- ♦ šroub
- ♦ speciální lepidlo
- ♦ oboustranně lepící páska
- ♦ včelí vosk (jen do 40° C)
- ♦ magnet

Včelí vosk je v modální analýze velmi často používán k upevnění akcelerometrů, protože je to metoda nenáročná a rychlá a nijak podstatně použitelný frekvenční rozsah snímače nesnižuje. Naopak uchycení snímačů magnetem není příliš vhodné a spíše je použijeme u provozních měření, ale pouze do cca 2000 Hz. Pokud měříme strukturu s nerovným povrchem, je možné použít podložku s natáčecí základnou.

Snímač síly je buď součástí rázového kladívka a v tom případě jeho připevnění neřešíme, nebo při buzení budičem musíme snímač síly k měřené struktuře připevnit, což se dělá nejčastěji šroubem. Pokud nechceme nebo nemůžeme do měřené struktury vrtat závit pro šroub, je možné použít váleček, který má z jedné strany hladkou plochu, kterou speciálním lepidlem přilepíme k měřené struktuře, a z druhé strany díru pro závit, do které zašroubujeme snímač (viz obr. 4.9).

Dalším aspektem, který v souvislosti se snímači musíme vzít v úvahu, je hmotnost snímače vzhledem k hmotnosti měřené struktury, aby nedošlo k nadměrnému ovlivnění dynamických vlastností struktury snímačem. Už jsme se o tom zmínili v kapitole 4.1.2 v souvislosti s volbou referenčního bodu, kde jsme diskutovali vliv umístění snímače na dynamické vlastnosti struktury. Hmotnost snímače hraje roli zvláště u lehkých struktur. Obecně platí, že by měla být menší než 10% hmotnosti struktury. Z principu konstrukce akcelerometrů je zřejmé, že čím menší je snímač, tím menší je jeho citlivost, ale vyšší

užitečný měřicí rozsah. Problém s hmotností snímače by mohl nastat u lehkých struktur, u nichž bychom potřebovali měřit v nízkém frekvenčním pásmu. Mohlo by se stát, že snímač, který by byl dostatečně lehký na to, aby strukturu neovlivnil, by neměl dostatečnou citlivost. V tomto případě pak je možné použít bezdotykový laserový snímač vibrací.

4.2.1.3 Analyzátor

Analyzátor typu FRA

FRA – Frequency Response Analyzer. O tomto typu analyzátoru už jsme se zmínili v kapitole 4.2.1.1 v souvislosti s buzením krokovaným sinusovým signálem. Tento typ analyzátoru neprovádí Fourierovu transformaci časových signálů. Princip jeho práce je následující: Řídící signál je sinusový. Měřený vstupní i výstupní signál se podrobí digitální filtraci, při které se z nich odstraní ty složky, které mají jinou frekvenci než řídící signál. Vyřazování nesynchronních složek se zlepšuje filtrováním v delším časovém úseku, což se udává pomocí počtu cyklů řídicího signálu, během něhož se provádějí výpočty. Tím dosáhneme přesného měření složky signálu ze snímačů na požadované frekvenci. FRF na požadované frekvenci se získá jako přímý podíl amplitud vstupního a výstupního signálu. Takto se postupně měří celé požadované frekvenční pásmo. Jde o velmi přesné a velmi časově náročné měření. Běžně se tento typ analyzátoru pro modální zkoušky nepoužívá.

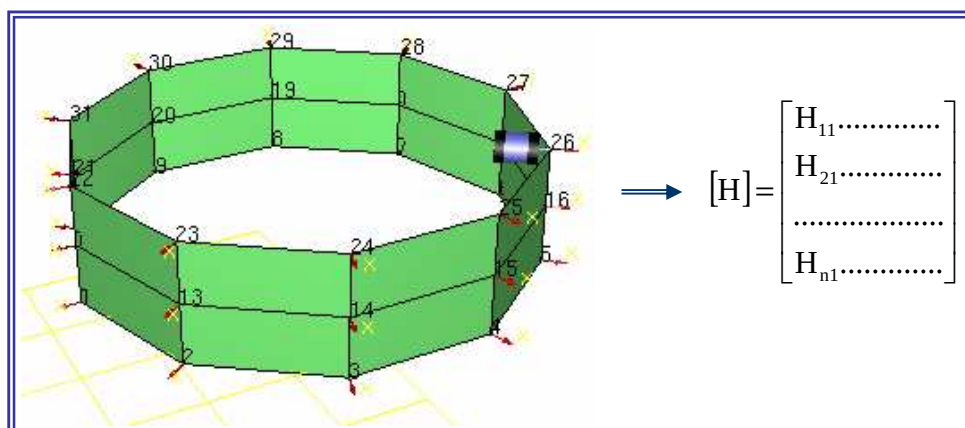
FFT analyzátor (frekvenční, spektrální analyzátor)

Princip práce tohoto typu analyzátoru už byl popsán v kapitole 2 - Dvoukanálová analýza. Provádí rychlou Fourierovu transformaci (FFT) naměřeného signálu. Zopakujeme zde základní principy jeho práce:

- ♦ měří současně všechny frekvenční složky přítomné ve složitém časově proměnném signálu
- ♦ výstupem je spektrum obsahující konečné množství složek, popisujících relativní amplitudy celého rozsahu frekvencí přítomných v signálu
- ♦ vypočítává další funkce, přičemž všechny výpočty jsou založeny na diskrétní Fourierově transformaci
- ♦ před vstupem signálu do A/D převodníku musí být vždy zařazen anti-aliasingový filtr

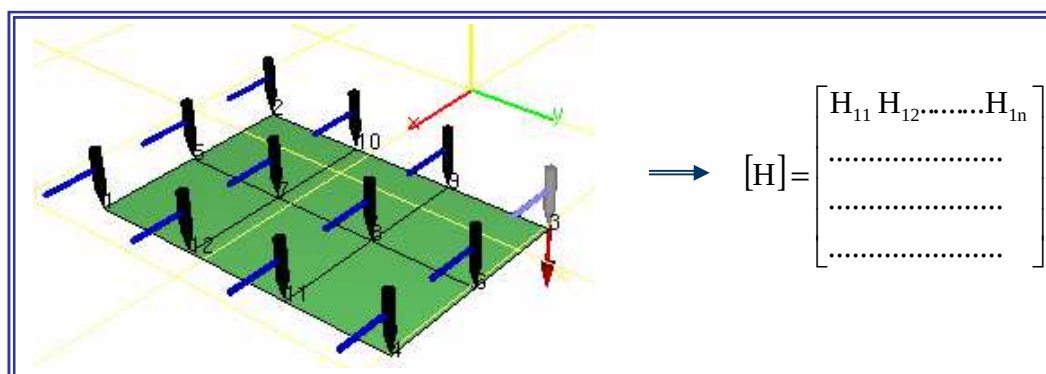
4.2.2 Měření

Po přípravě měřené struktury a přípravě geometrického modelu začneme s vlastním měřením. Připomeneme, že při buzení připojeným budičem vibrací je budič a snímač síly umístěn v referenčním bodě a snímač odezvy se postupně stěhuje do všech bodů struktury (viz obr.4.15). Pokud snímaných stupňů volnosti není více, než kanálů analyzátoru, který máme k dispozici, můžeme sejmut odezvu ve všech požadovaných stupních volnosti současně. Tímto způsobem získáme jeden sloupec matice FRF.



Obr. 4.15 - Měření při buzení budičem

Při buzení kladívkem je v referenčním bodě umístěn obvykle snímač zrychlení a kladívkem postupně budíme strukturu ve všech bodech. Tím získáme jeden řádek matice FRF (viz obr. 4.16). Není to však striktním pravidlem. Pokud je měřená struktura složitější a některé její body, ve kterých chceme měřit, jsou hůře dostupné, může být snazší do nich umístit akcelerometr než v nich provést úder. V tom případě může být i při buzení kladívkem struktura buzena ve stále stejném bodě (referenčním) a snímač odezvy se může stěhovat. Stejně tak, pokud ke snímání odezvy chceme použít trojosý snímač, nemůžeme jej použít jako referenční, protože referenční je pouze jeden stupeň volnosti. I v tomto případě bychom budili strukturu ve stále stejném bodě (referenčním) a snímač odezvy bychom přemísťovali.



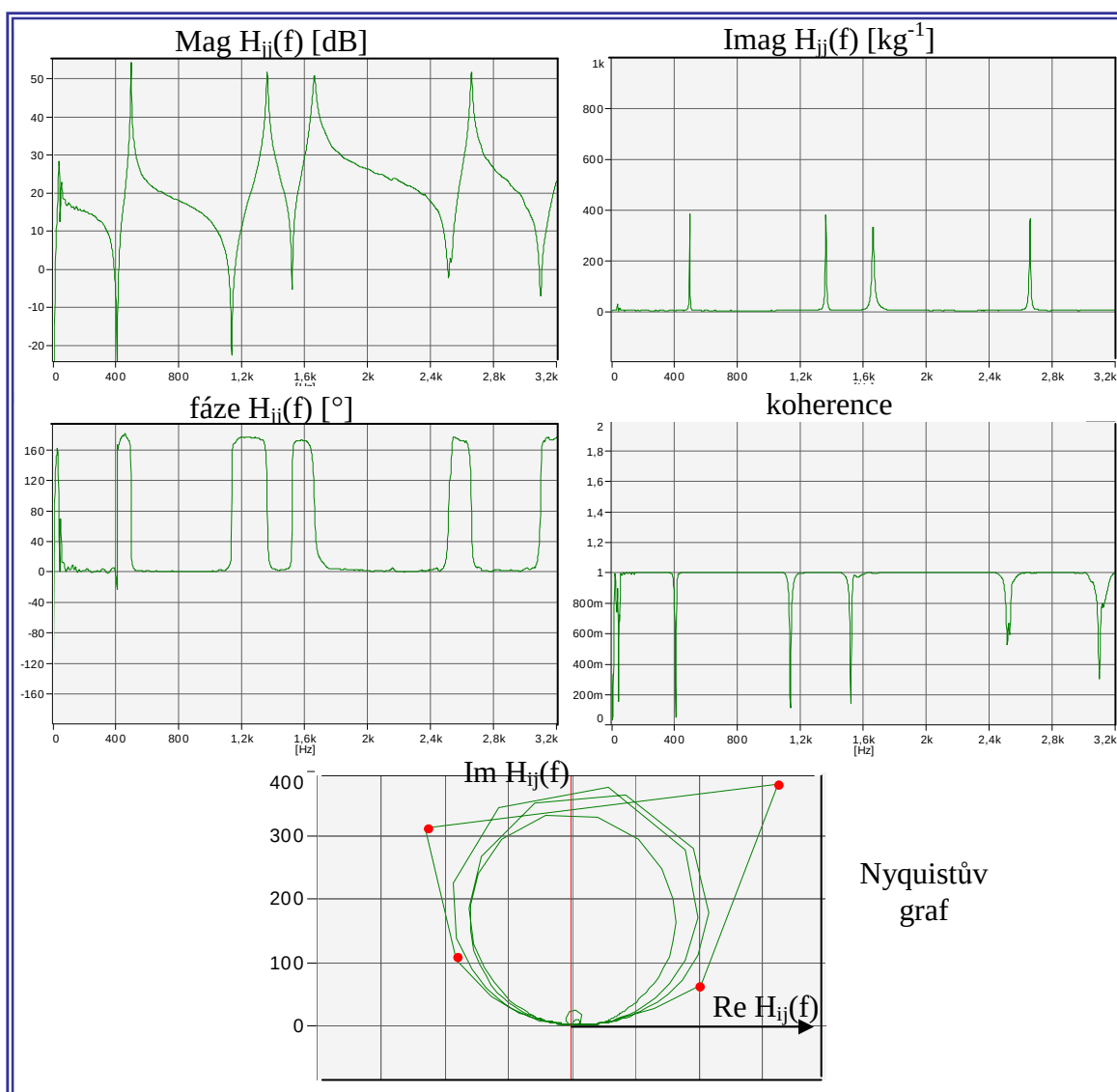
Obr. 4.15 - Měření při buzení rázovým kladívkem

Předtím, než začneme vlastní měření, je vhodné provést některé kontroly, abychom si byli jisti, že naměřená data budou správná. U buzení kladívkem je snadné provést kontrolu reciprocity. Teoreticky platí, že $H_{ij}(f) = H_{ji}(f)$. Změříme-li tedy FRF při buzení v místě i a odezvě v místě j a poté místa buzení a odezvy přehodíme, měli bychom naměřit tutéž FRF. Nejdůležitější kontrolou, kterou bychom nikdy neměli opomenout, je kontrola správnosti měření v referenčním bodě.

4.2.2.1 Měření v referenčním bodě

V kapitole 4.1.2 bylo rozebráno, jaké jsou požadavky na tzv. referenční bod a jakým způsobem se volí. Měření je vhodné začít právě měřením v referenčním bodě a zkontrolovat správnost tohoto měření, než budeme pokračovat v měření všech ostatních bodů na struktuře. Mějme stále na paměti, že z nekvalitních dat nemůžeme žádnými dalšími postupy získat věrohodný modální model a z tohoto pohledu se péče věnovaná počátečním kontrolám správnosti dat jeví jako výhodná investice. Správné měření v referenčním bodě vypadá tak, že (viz obr. 4.17):

- ♦ v grafu amplitudy FRF zobrazené v dB je mezi každou rezonancí antirezonance
- ♦ v grafu fáze FRF se rozsah fáze mění pouze v rozmezí 180°
- ♦ v grafu imaginární složky inertance a receptance a v grafu reálné složky pohyblivosti mají všechny špičky stejná znaménka



Obr. 4.17 - Kontrola správnosti měření FRF(inertance) v referenčním bodě

Pro všechna měření, nejen v referenčním bodě, by pak mělo platit, že koherence (vztah 2.10) se co nejvíce blíží hodnotě 1. Běžně se toho ale nepodaří dosáhnout v celém měřeném frekvenčním rozsahu. I při kvalitních měřeních je obvykle v antirezonancích koherence výrazně menší než 1 (viz obr.4.15) v důsledku toho, že úroveň signálu odezvy je na těchto frekvencích srovnatelná s úrovní šumu. Naopak, i při nepříliš kvalitních měřeních bývá koherence obvykle alespoň v okolí rezonancí rovna téměř 1.

Pro všechna měření by také mělo platit, že Nyquistův graf vykreslí pro všechny rezonance zřetelné kružnicové úseky. Na obr. 4.17 dole je vidět, že jeden z módů (jde o první mód) nevykreslil příliš zřetelnou kružnici. Jde o projev chyby únikem a s tím souvisejícího nedostatečného frekvenčního rozlišení měření. Blíže bude tento případ prodiskutován v kapitole 4.3.1.2 poté, co se seznámíme s vlastnostmi modální kružnice.

4.3 Identifikace modálních parametrů

Poté, co jsme měřením získali všechna potřebná data (tj. jeden řádek nebo jeden sloupec matice FRF) a přenesli jsme tato data do počítače, nás čeká jejich zpracování. Této části modální zkoušky se říká *experimentální modální analýza*, protože je to fáze experimentálního přístupu, která odpovídá fázi nazývané se modální analýza i v teoretickém přístupu. V obou případech vede modální analýza k odvození modálních vlastností systému. Je však třeba si všimnout, že ty dva procesy samotné jsou poněkud odlišné: v experimentu jde o proces *aproximace křivek* (*curve-fitting*), zatímco v teoretické analýze jde o řešení problému vlastních čísel.

Ke zpracování naměřených dat je v dnešní době k dispozici množství programových balíků určených pro experimentální modální analýzu a nepředpokládá se, že by uživatel tuto fázi prováděl bez softwarové podpory. Každý software má k dispozici několik různých metod zpracování naměřených dat, a je na uživateli, aby byl schopen vybrat nejvhodnější metodu pro každou aplikaci. Podle složitosti pracují jednotlivé metody buď s částí FRF grafu obsahující jednu rezonanci, s částí FRF grafu obsahující více rezonancí, nebo jsou schopny zpracovat všechny naměřené FRF globálně. Ve všech případech je však úloha v zásadě stejná: najít takové koeficienty v teoretických výrazech pro frekvenční odezvou funkci, které budou v co největším souladu s naměřenými daty. Tato úloha se dá nejsnáze řešit s použitím výrazů pro FRF ve formě řady, tak jak byly odvozeny v kapitole 3 pro různé typy systémů. Zvláštní výhodou tohoto přístupu je, že koeficienty takto určené jsou v přímém vztahu k modálním vlastnostem testovaného systému, a většinou jsou to jediné parametry, které nás zajímají.

V tomto textu není účelem probrat všechny dostupné metody získávání modálních parametrů. Probereme si stručně jen tři z nich.

4.3.1 Metody aproximace systémem s 1° volnosti

Existuje více metod modální analýzy sdílejících stejný základní předpoklad: že v blízkosti rezonance je celková odezva ovládnuta příspěvkem módu, jehož vlastní frekvence

je nejbližší. Tyto metody se ještě dělí na metody, které předpokládají, že veškerá odezva je dána tímto jediným módem, a metody, které předpokládají, že příspěvky ostatních módů jsou reprezentovány jednoduchou aproximací. K prvním z nich patří nejjednodušší metoda, které se říká *špička-amplituda* (peak-amplitude) nebo *sbírání špiček* (peak-picking). Ke druhým patří asi nejběžněji používaná metoda *aproximace kružnicí*.

4.3.1.1 Metoda špička-amplituda (sbírání špiček)

Je to metoda, která dostatečně funguje u struktur, jejichž FRF mají dobře separované módy a které nejsou tak málo tlumené, aby nebylo možné získat přesné měření v rezonancích, ale které na druhé straně nejsou tlumené natolik, aby odezva v rezonanci byla silně ovlivněna více než jedním módem. Tím je sice použitelnost metody omezena, ale u složitějších případů je možné ji použít alespoň k získání počátečních odhadů požadovaných parametrů, čímž se urychlí obecnější aproximační postupy. Tato metoda se také používá k získání provozních tvarů kmitů. Aplikuje se následovně:

- 1) Na grafu FRF se identifikují jednotlivé rezonanční špičky a frekvence, na kterých je odezva maximální, jsou vzaty jako vlastní frekvence Ω_r .
- 2) Zaznamenají se amplitudy $|H|$ na těchto vlastních frekvencích.
- 3) Určí se tlumení pomocí bodů s polovičním výkonem - ω_a a ω_b (vztah 3.40):

$$\eta_r = \frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)}{\Omega_r^2} \cong \frac{\Delta\omega}{\Omega_r} \quad \eta_r = 2\zeta_r$$

- 4) Proveďte se odhad modální konstanty analyzovaného módu za předpokladu, že celková odezva v této rezonanční oblasti je dána jediným módem - jediným členem v řadě

$$(vztah 3.121): \alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r A_{jk}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2} \quad \text{pro } \omega = \Omega_r$$

$$\text{Může být tedy získána ze vztahu } |H| = \frac{A_r}{\Omega_r^2 \eta_r}, \quad \text{takže } A_r = |H| \cdot \Omega_r^2 \eta_r$$

4.3.1.2 Metoda aproximace kružnicí (circle-fit)

Pro systém s jedním stupněm volnosti vytváří Nyquistův graf frekvenčně odezvových vlastností křivku blízkou kružnici a pokud je zvolen správný typ odezvového parametru pro daný model tlumení, tak jde o přesnou kružnici. I systémy s více stupni volnosti vytvářejí Nyquistovy grafy FRF dat obsahující téměř kružnicové úseky, odpovídající oblastem v blízkosti vlastních frekvencí. Tyto charakteristiky jsou základem jedné z nejdůležitějších metod modální analýzy, která je známa jako metoda aproximace kružnicí pro systém s jedním stupněm volnosti (SDOF circle-fit method).

Postup v tomto textu bude odvozen na systému se strukturním tlumením. Proto musíme použít FRF ve formě receptance, protože tato vytváří v Nyquistově diagramu přesnou kružnici. Pokud by však bylo třeba použít model s viskózním tlumením, bylo by nutné použít FRF ve formě pohyblivosti. I když to vede na odlišný vzhled diagramů - protože jsou v komplexní rovině pootočený o 90° - většina následující analýzy a poznámek se hodí stejně

dobře i na tento případ. Některé z programových balíčků pro modální analýzu, které více rozlišují, nabízejí výběr mezi těmito dvěma typy tlumení a v závislosti na tomto výběru použijí k aproximaci kružnicí buď receptanci nebo pohyblivost.

Metoda aproximace kružnicí využívá skutečnosti, že v blízkosti rezonance je chování většiny systémů ovládnuto jediným módem. Algebraicky to znamená, že amplituda FRF je fakticky dána jedním ze zlomků v řadě - tím, který přísluší módu, jehož rezonance je sledována. Tento předpoklad můžeme vyjádřit následovně. Ze vztahu (3.121) máme:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{s A_{jk}}{\Omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \Omega_s^2} \quad (4.1a)$$

To může být bez zjednodušení přepsáno jako

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{r A_{jk}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2} + \sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{s A_{jk}}{\Omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \Omega_s^2} \quad (4.1b)$$

Předpoklad 1° volnosti je takový, že pro malý rozsah frekvencí v blízkosti vlastní frekvence r -tého módu je druhý člen ve výrazu (4.1b) téměř nezávislý na frekvenci ω a výraz pro receptanci může být zapsán jako:

$$\alpha_{jk}(\omega)_{\omega \approx \Omega_r} \cong \frac{r A_{jk}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \Omega_r^2} + B_{jk} \quad (4.2)$$

S grafem celkové receptance pak lze zacházet jako s kružnicí mající stejné vlastnosti jako modální kružnice vyšetřovaného módu, která je ale posunuta z počátku komplexní roviny v míře určené příspěvkem všech ostatních módů. Nedá se říci, že by ostatní módy byly nedůležité nebo zanedbatelné - právě naopak, jejich vliv může být významný - ale spíše se dá říci, že jejich společný vliv může být vyjádřen v okolí rezonance konstantou.

Vlastnosti modální kružnice

Základní funkce, kterou se zabýváme, je

$$\alpha = \sum_{r=1}^N \frac{1}{\Omega_r^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_r} \right)^2 + i\eta_r \right)} \quad (4.3)$$

protože jediný vliv zahrnutí modální konstanty $r A_{jk}$ je v zavedení měřítka velikosti kružnice (násobení $|r A_{jk}|$) a v pootočení kružnice (o $\angle_r A_{jk}$). Graf veličiny α dle vztahu (4.3) je zobrazen na obr. 4.18. Z něj je možné vidět, že pro libovolnou frekvenci ω můžeme napsat následující vztahy:

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{\operatorname{Re}(\alpha)} = \frac{\eta_r}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_r} \right)^2} \quad (4.4a)$$

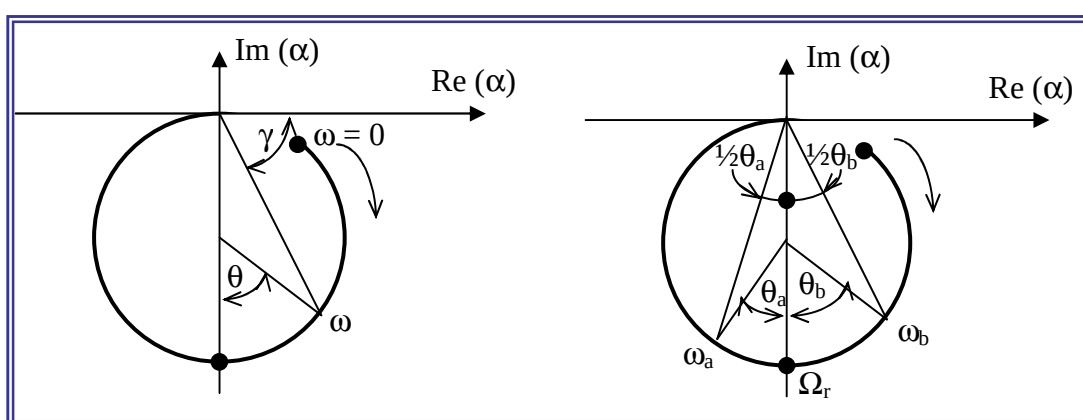
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{\operatorname{Im}(\alpha)} = \operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2}{\eta_r} \quad (4.4b)$$

ze kterých dostaneme:

$$\omega^2 = \Omega_r^2 \cdot (1 - \eta_r \cdot \operatorname{tg}(\theta/2)) \quad (4.4c)$$

Derivací rovnice 4.4c podle θ dostaneme:

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{\Omega_r^2 \cdot \eta_r}{2} \cdot \left(1 + \frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_r} \right)^2 \right)^2}{\eta_r^2} \right) \quad (4.5)$$



Obr. 4.18 - Vlastnosti modální kružnice

Převrácená hodnota této veličiny je mírou rychlosti, s jakou funkce přeběhne přes kruhový oblouk. Je vidět, že dosáhne maximální hodnoty (maximální rychlosti probíhání), když $\omega = \Omega_r$, tedy při vlastní frekvenci. To je vidět na další derivaci, tentokrát podle frekvence:

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\omega^2}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{pro} \quad \Omega_r^2 - \omega^2 = 0 \quad (4.6)$$

Výše uvedená vlastnost je užitečná při analýze dat systémů s více stupni volnosti, protože obecně není přesně známo, kde je vlastní frekvence, ale pokud prošetříme relativní vzdálenosti mezi naměřenými body podél kruhového oblouku v blízkosti každé rezonance, měli bychom být schopni tuto hodnotu určit z rychlostí průběhu rezonancí.

Tlumení můžeme určit pomocí dvou bodů na modální kružnici - ω_a nad rezonancí a ω_b pod rezonancí. Dosadíme do vztahu (4.4b):

$$\operatorname{tg}(\theta_b/2) = \frac{1 - \left(\frac{\omega_b}{\Omega_r}\right)^2}{\eta_r} \quad \operatorname{tg}(\theta_a/2) = \frac{\left(\frac{\omega_a}{\Omega_r}\right)^2 - 1}{\eta_r}$$

a z těchto dvou rovnic dostaneme výraz pro tlumení tohoto módu:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\Omega_r^2 \cdot (\operatorname{tg}(\theta_a / 2) + \operatorname{tg}(\theta_b / 2))} \quad (4.7)$$

Toto je přesný vztah a hodí se na jakoukoliv úroveň tlumení. Pokud se zabýváme malým tlumením, (řekněme pro ztrátové faktory menší než 2-3%), zjednoduší se výše uvedený výraz na:

$$\eta_r \cong 2 \cdot \frac{\omega_a - \omega_b}{\Omega_r \cdot (\operatorname{tg}(\theta_a / 2) + \operatorname{tg}(\theta_b / 2))} \quad (4.8)$$

Pokud vezmeme dva body, pro které platí $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$ (body s polovičním výkonem), dostaneme známý vztah:

$$\eta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega_r} \quad (4.9a)$$

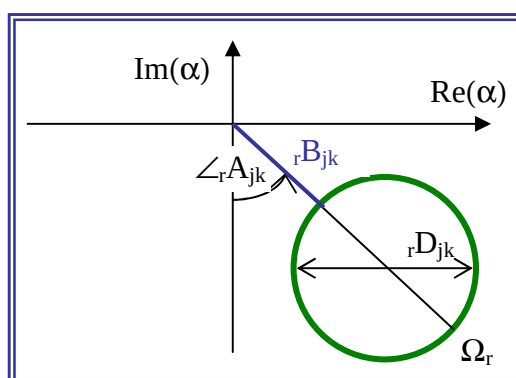
nebo, pokud tlumení není malé:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\Omega_r^2} \quad (4.9b)$$

Poslední vlastnost se vztahuje na průměr kružnice, který je pro veličinu specifikovanou rovnicí (4.3) dán vztahem $\frac{1}{\Omega_r^2 \eta_r}$. Pokud se zavede pomocí modální konstanty v čitateli měřítko, bude průměr

$${}_r D_{jk} = \frac{|{}_r A_{jk}|}{\Omega_r^2 \cdot \eta_r} \quad (4.10)$$

a jak už bylo zmíněno dříve, celá kružnice bude pootočená tak, že hlavní průměr - ten, který prochází bodem příslušejícím vlastní frekvenci - je orientován o úhel $\angle {}_r A_{jk}$ od záporné imaginární osy. Všimněte si, že to znamená, že když A bude záporné, bude kružnice ležet v horní polorovině, což je situace, která nemůže nastat u bodové FRF, ale u přenosové ano. Konstantní člen ${}_r B_{jk}$ z rovnice (4.2) určíme jako vzdálenost vršku hlavního průměru modální kružnice od počátku (viz obr. 4.19).



Obr. 4.19 - Posunutí a natočení modální kružnice

Při vyhodnocování modálních parametrů ze skutečných naměřených dat nemáme k dispozici vždy celou modální kružnici. U systému s dobře oddělenými módy se dá očekávat, že každá rezonance vytvoří větší část kružnice, ale se stoupajícím modálním rušením při bližších módech nebo větších úrovních tlumení musíme očekávat, že budou identifikovatelné pouze malé kružnicové úseky (možná 45° nebo 60°). Pokud Nyquistův diagram nevytvoří v blízkosti některé z rezonancí zřetelnou kružnicovou část, je vyhodnocení modálních parametrů problematické.

Na obr. 4.17 dole je Nyquistův graf z měření systému s dobře oddělenými módy. Jde o měření v referenčním bodě a všechny ostatní grafy na tomto obrázku ukazují na kvalitní měření. Nyquistův graf prvního módu však nevykreslil zřetelný kružnicový úsek. V tomto případě je to v důsledku nedostatečného frekvenčního rozlišení. Na obrázku jsou červeně označeny 4 body, které jsou blízko rezonance a je vidět, že průběh přes rezonanci je v tomto případě tak rychlý, že nestihne vykreslit kružnici. Z tohoto měření by byla bez problémů přesně vyhodnocena vlastní frekvence, ale odhad tlumení by byl velmi nespolehlivý. Řešením této situace by bylo snížit frekvenční rozsah měření, s čímž souvisí prodloužení doby měření, zmenšení chyby únikem a zlepšení frekvenčního rozlišení.

4.3.2 Metody aproximace systémem s více stupni volnosti

Je mnoho situací, ve kterých je SDOF přístup k modální analýze nedostatečný nebo nevhodný a existuje pro ně několik alternativních metod, které mohou být společně nazvány jako aproximace s více stupni volnosti.

Jedním zvláštním případem jsou systémy s extrémně malým tlumením, u kterých jsou měření v rezonancích nepřesná a obtížně získatelná. Těmito se zde podrobněji zabývat nebudeme.

Opačným případem jsou systémy s úzce svázanými módy, kde je aproximace jedním módem nevhodná. Blízce svázanými módy myslíme takové systémy, které mají buď vlastní frekvence velmi blízko u sebe nebo mají relativně velké tlumení nebo obojí. U těchto systémů odezva dokonce ani v rezonanci není určena pouze jedním módem (neboli jedním členem ve FRF řadě). Tady můžeme použít buď jednoduché rozšíření SDOF metody nebo použít obecný přístup k aproximaci. Jeho princip si zde stručně vysvětlíme.

Obecný přístup k aproximaci

Označíme jednotlivá naměřená FRF data jako:

$$\alpha_{jk}^m(\omega_\ell) = \alpha_\ell^m \quad (4.11a)$$

zatímco odpovídající "teoretické" hodnoty se značí

$$\alpha_{jk}(\omega_\ell) = \alpha_\ell = \sum_{s=m_1}^{m_2} \frac{s A_{jk}}{\Omega_s^2 - \omega_\ell^2 + i \eta_s \Omega_s^2} + \frac{1}{K_{jk}^R} - \frac{1}{\omega_\ell^2 M_{jk}^R} \quad (4.11b)$$

kde koeficienty ${}_1 A_{jk}$, ${}_2 A_{jk}$, ..., Ω_1 , Ω_2 , ..., η_1 , η_2 , ..., K_{jk}^R a M_{jk}^R máme všechny určit.

Člen $\frac{1}{\omega_\ell^2 M_{jk}^R}$ představuje vliv nízkofrekvenčních módů (těch, které leží pod spodní hranicí měřeného frekvenčního pásma) a člen $\frac{1}{K_{jk}^R}$ představuje vliv vysokofrekvenčních módů (těch, které leží nad horní hranicí měřeného frekvenčního pásma).

Můžeme definovat jednotlivou chybu jako ε_ℓ , kde

$$\varepsilon_\ell = (\alpha_\ell^m - \alpha_\ell) \quad (4.12)$$

a to vyjádříme jako skalární veličinu:

$$E_\ell = |\varepsilon_\ell|^2 \quad (4.13)$$

Pokud dále zvýšíme obecnost přidáním váhového faktoru w_ℓ do každého frekvenčního bodu, který vyšetřujeme, musí aproximační proces určit hodnoty neznámých koeficientů v (4.11) tak, aby celková chyba

$$E = \sum_{\ell=1}^p w_\ell E_\ell \quad (4.14)$$

byla minimalizována. Toho se dosáhne tak, že se výraz (4.14) derivuje podle každé neznámé zvlášť, čímž se vytvoří množina tolika rovnic, kolik je neznámých, každá ve tvaru:

$$\frac{dE}{dq} = 0 \quad ; \quad q = {}_1A_{jk}, {}_2A_{jk}, \dots, \text{atd.} \quad (4.15)$$

Takto vytvořená množina rovnic není bohužel pro mnoho koeficientů lineární (všechny parametry Ω_s a η_s) a není tedy možné ji řešit přímo. Kvůli tomu si různé algoritmy vybírají své vlastní postupy, přičemž provádějí různá zjednodušení. Většina jich používá nějakou formu iteračního řešení, některé výraz linearizují, aby problém zjednodušily a téměř všechny se velmi spoléhají na dobré počáteční odhady.

4.4 Modální model

Ať už jsme použili kteroukoliv ze zde uvedených nebo jiných metod aproximace, výsledkem by měl být konzistentní modální model. Při použití globálních metod aproximace je konzistentní model přímo jejich výstupem, při použití jednodušších SDOF metod je třeba použít některé dodatečné postupy, jako je průměrování vlastních frekvencí a modálních tlumení získaných z jednotlivých naměřených FRF charakteristik. Nicméně, všechny tyto kroky bývají v softwarových prostředcích pro experimentální modální analýzu zabudovány a pokud uživatel nechce, nemusí se o ně starat.

Jak už bylo řečeno v kapitole 1.2, modální model je tvořen dvěmi maticemi:

- ♦ **spektrální matice** (na diagonále má vlastní čísla, tj. vlastní frekvenci a tlumení)
- ♦ **modální matice** - její sloupce jsou vlastní vektory příslušející k jednotlivým vlastním frekvencím

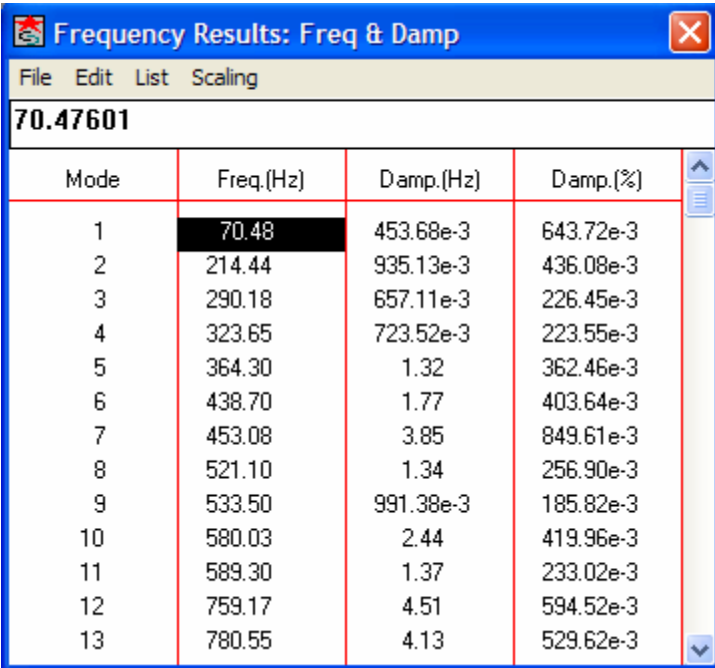
4.4.1 Prezentace získaného modálního modelu

Skutečný výstup z programu pro modální analýzu může být v tabulkové formě. Ukázka výstupu z programu Star Struct je uvedena na obrázcích 4.18 a 4.20. Na obr.4.18 je tabulka se zjištěnými vlastními frekvencemi a tlumeními. Tlumení je zde udáno ve dvou formách: damp[Hz] udává polovinu šířky 3dB pásma, damp[%] je poměrný útlum násobený 100. Jiné softwarové balíky mohou udávat tlumení v jiné formě, např. jako ztrátové faktory η . Na obr.4.20 je tabulka vlastních tvarů. V ní jsou číselně uvedeny jednotlivé vlastní tvary - ve formě poměrných výchylek a fází v jednotlivých stupních volnosti. V zobrazené tabulce jsou vidět hodnoty pro 1.mód pro prvních několik bodů. Data pocházejí z měření s trojosým akcelerometrem, takže každý bod má 3 stupně volnosti - ve směrech X,Y a Z.

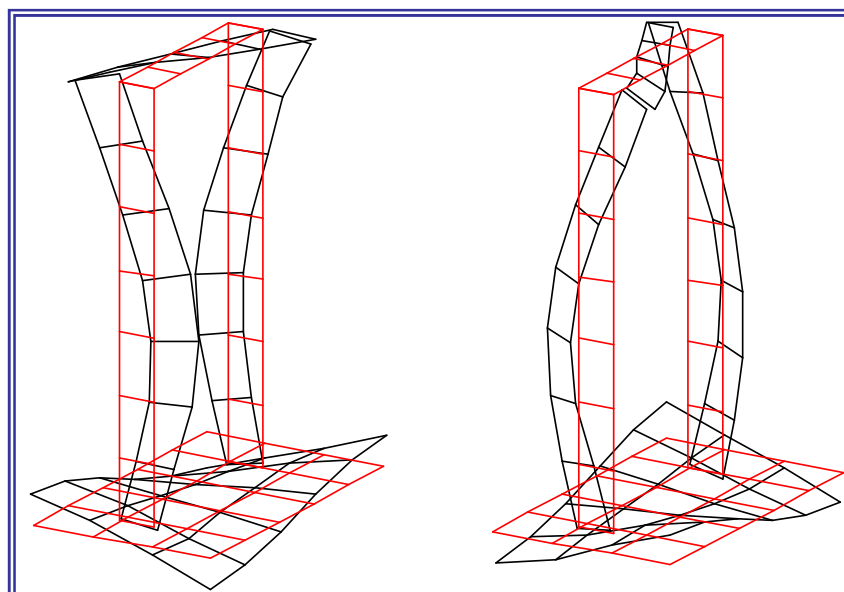
Softwarové balíky většinou umožňují export a import datových souborů ve standardním formátu UFF a mnohé z nich umožňují i předávání dat mezi jinými programovými balíky, nejen pro experimentální modální analýzu, ale běžně komunikují např. s programem ANSYS apod.

Tabulkový výstup vlastních tvarů není příliš přehledný a pro posouzení vlastních tvarů se nepoužívá, je však nutný, pokud chceme číselně srovnat vlastní tvary získané experimentem a výpočtem (blíže viz kap.4.4.3). Pro běžné posouzení a prohlížení vlastních tvarů se používá vykreslení tvaru a jeho animace. Animaci umožňují všechny softwarové balíky pro modální analýzu, ale jen některé umožňují i export animovaného tvaru v AVI formátu. Pokud potřebujeme vlastní tvar prezentovat v tištěné podobě, musíme se spokojit se statickým obrázkem, jako např. na obr. 4.18 - zde jsou zobrazeny dvě krajní polohy 3. vlastního tvaru z tabulky 4.1. Nedeformovaná struktura je zobrazena červeně, vlastní tvar černě.

Tabulka 4.1 - Výstup z programu STAR - tabulka vlastních frekvencí a tlumení



Mode	Freq.(Hz)	Damp.(Hz)	Damp.(%)
1	70.48	453.68e-3	643.72e-3
2	214.44	935.13e-3	436.08e-3
3	290.18	657.11e-3	226.45e-3
4	323.65	723.52e-3	223.55e-3
5	364.30	1.32	362.46e-3
6	438.70	1.77	403.64e-3
7	453.08	3.85	849.61e-3
8	521.10	1.34	256.90e-3
9	533.50	991.38e-3	185.82e-3
10	580.03	2.44	419.96e-3
11	589.30	1.37	233.02e-3
12	759.17	4.51	594.52e-3
13	780.55	4.13	529.62e-3



Obr. 4.18 - Statické zobrazení vlastního tvaru

Tabulka 4.2 - Výstup z programu STAR - tabulka vlastních tvarů

Frequency Results: Shapes						
File Edit List Scaling						
Mode	Freq.(Hz)	Damp.(Hz)	Damp.(%)	Units:	Description:	
1	70.48	453.68e-3	643.72e-3	Unknown	# 2:70.48 Hz	
Point	Dir.1		Dir.2		Dir.3	
	Mag.	Phase	Mag.	Phase	Mag.	Phase
1	2.12	187.63	3.45	187.64	1.88	7.27
2	2.09	187.32	3.37	7.52	1.51	187.01
3	2.15	7.04	3.42	6.93	1.31	6.80
4	2.11	6.98	3.26	186.44	1.58	187.92
5	2.15	187.36	2.43	8.04	1.38	188.00
6	2.22	187.51	903.14e-3	8.28	475.36e-3	187.97
7	2.18	187.13	624.01e-3	187.86	616.94e-3	7.97
8	2.15	187.10	2.01	187.39	1.39	7.23
9	2.18	7.29	2.16	6.25	1.39	8.58
10	2.22	6.84	1.01	6.64	526.27e-3	6.88
11	2.23	7.39	230.25e-3	179.35	642.15e-3	190.33
12	2.10	6.80	1.78	186.56	1.23	186.87
13	950.13e-3	187.35	2.35	8.09	861.78e-3	188.79
14	938.74e-3	7.28	2.08	7.02	619.62e-3	8.12
15	823.21e-3	187.63	779.29e-3	7.80	180.60e-3	187.14
16	882.33e-3	7.51	913.71e-3	8.17	163.18e-3	3.27
17	858.27e-3	188.09	525.07e-3	188.12	215.31e-3	8.43
18	933.97e-3	7.10	603.51e-3	188.34	266.58e-3	184.25
19	913.82e-3	187.22	2.20	187.53	914.45e-3	7.23
20	717.38e-3	7.42	1.68	186.05	930.07e-3	189.75

4.4.2 Kontrola získaného modálního modelu

Tak jako jsme kontrolovali správnost měření v referenčním bodě (kap 4.2.2.1), než jsme se pustili do všech dalších měření, bude i nyní vhodné alespoň orientačně prověřit správnost získaného modálního modelu, než se pustíme do jeho srovnání např. s výpočtovým modelem získaným pomocí metody konečných prvků.

Pokud měříme strukturu, jejíž módy jsou dobře odděleny (a pokud ji navíc měříme ve volném uložení), žádné problémy s identifikací modálních parametrů asi nenastanou a získaný modální model bude správný. U složitějších struktur s vázanými módy, s velkou mírou (neproporcionálního) tlumení bude i proces získání modálních parametrů komplikovanější. Mnohdy je nutné nebo alespoň vhodné zkusit použít různé aproximační metody a vybrat tu metodu, která dává nejlepší výsledky. Jak je poznáme? Když si vizuálně prohlédneme získané vlastní tvary, musejí vykazovat "systematický" pohyb. Některé "vlastní" tvary vykazují pohyb chaotický, jsou všelijak "hrbolaté" apod. Pokud se to stane, jsou dvě možnosti: buď na dané frekvenci žádný vlastní tvar není, ale program jej vytvořil, protože jsme to po něm v zadaném frekvenčním pásmu chtěli, anebo tam vlastní tvar je, ale jeho identifikace se tak úplně nepodařila. Při rozhodování, o kterou z daných možností v konkrétním případě jde, se musíme opřít hlavně o zkušenosti, ale jsou i možnosti, jak si pomoci, např.:

- ♦ Pokud už máme pro danou strukturu modální parametry získané výpočtem, víme, jak mají vlastní tvary přibližně vypadat, a všechny přebytečné můžeme z naměřeného souboru vyřadit. Vypadá to logicky, ale i zde bychom mohli udělat chybu: Pokud měříme strukturu v jiném než volném uložení, mohou být skutečné okrajové podmínky jiné než okrajové podmínky zadané do výpočtu a i získané vlastní tvary se mohou lišit. Tuto situaci poznáme často tak, že z měření získáme pěkné hladké tvary, které ve výpočtovém modelu chybějí. V tomto případě bude chyba spíše na straně výpočtového modelu. V každém případě nám ale znalost teoretických vlastních tvarů pomůže vyřadit naměřené "hrbolaté" vlastní tvary (anebo nás donutí je identifikovat lépe).
- ♦ Můžeme prozkoumat tzv. komplexitu vlastních tvarů, tzn. do jaké míry jsou výchyly ve vlastních tvarech komplexní čísla. Obecně se dá říci, že čím je tvar méně komplexní, tím je větší pravděpodobnost, že je správný. Zvláště to platí u málo tlumených struktur měřených ve volném uložení, u kterých se komplexní tvar vůbec nemůže vyskytnout. Naopak, u hodně tlumených struktur s neproporcionálním tlumením (např. s pryžovými prvky) je výskyt vysoce komplexních tvarů běžný a nemusí znamenat chybu při identifikaci.

Pokud je tlumení měřené struktury neproporcionální, jsou získané vlastní tvary vždy komplexní. Při animaci poznáme komplexní vlastní tvar tak, že se jakoby "vlní". Tento vizuální efekt vzniká tím, že výchyly v jednotlivých bodech nedosahují svých maximálních hodnot současně. Důsledkem toho je, že uzlové čáry mění svou polohu. Dalším důsledkem je, že tyto tvary není možné zobrazit staticky. Pokud se o to chceme pokusit, musíme je takzvaně normalizovat, tzn. že fázím, které mají hodnotu blíže k nule, přiřadíme nulu (kladná amplituda) a fázím, které mají blíže ke 180° , přiřadíme 180° (záporná amplituda). Tímto vyhlazením získáme reálné přiblížení těchto vlastních tvarů. Když se podíváme do tabulky 4.2, vidíme, že v ní uvedený tvar je velmi slabě komplexní, protože fáze jsou vesměs velmi blízko 0° nebo 180° .

Pokud dva nebo více vlastních tvarů vypadají podobně, může být opět chyba v identifikaci. Může se to stát, když si např. nejsme jisti, kolik módů se v daném frekvenčním pásmu vyskytuje, a chceme po programu, aby jich našel více, než jich ve skutečnosti je. Program nám vždy vyhoví, ale identifikuje v tomto případě tzv. "falešné módy". Pro tento případ je dobré podívat se na tzv. MAC matici. Podrobně o ní bude pojednáno v následující kapitole, protože hlavní účel jejího použití je porovnání dvou modelů získaných různými metodami, ale lze ji použít i pro jeden model. V tomto případě bude mít MAC matice na hlavní diagonále všechny hodnoty rovny 1 a na mimodiagonálních prvcích by měla být velmi malá čísla. Pokud se tam vyskytnou čísla blízka 1, velmi pravděpodobně jde o falešné módy. Pokud si jsou velmi podobné vlastní tvary módů, které jsou frekvenčně dosti vzdálené, je to obvykle v důsledku toho, že se tyto tvary liší něčím, co nebylo měřeno. Geometrický model pro modální zkoušku bývá obvykle poměrně jednoduchý, takže se snadno může stát, že nepostihne všechny detaily pohybu, a dva vlastní tvary se pak mohou jevit stejné, i když ve skutečnosti stejné nejsou. V tomto případě nejde o chybu měření, ale pouze o důsledek nedostatečně jemného modelu.

4.4.3 Srovnání experimentálně získaného a výpočtového modálního modelu

V kapitole 1.1 jsme uvedli, že velmi často je modální zkouška prováděna s cílem provést přímé srovnání mezi předpovězeným (vypočteným) dynamickým chováním struktury a tím, které je v praxi skutečně pozorováno. Někdy se tento proces nazývá verifikace (ověřování) teoretického modelu, které probíhá v několika krocích:

- porovnání dynamických vlastností - experimentální vs. výpočtový model
- kvantifikace rozsahu rozdílů mezi těmito dvěma množinami dat
- provedení úprav v jedné z množin výsledků tak, aby bylo dosaženo většího souladu

Když je toho dosaženo, je možné prohlásit teoretický model za ověřený a je tímto připraven k použití v následné analýze.

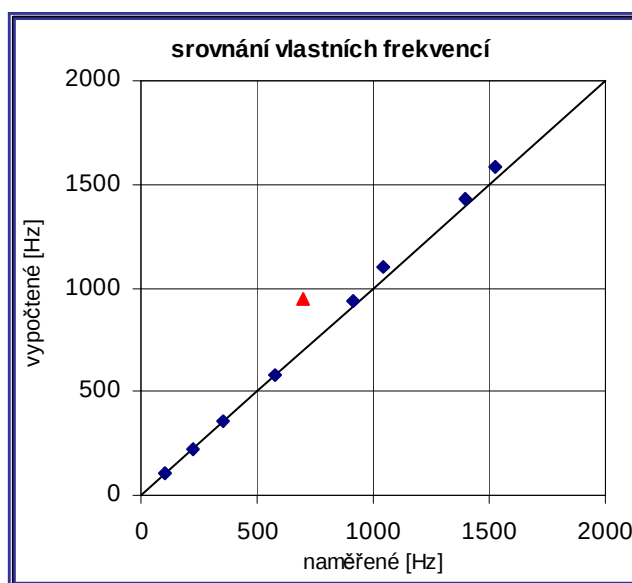
Srovnání dynamických vlastností experimentálního a výpočtového modelu můžeme provést pro všechny tři typy dynamických modelů (fyzikální, modální a odezvoový). Z opačných postupů, kterými se ubírá experimentální a teoretická analýza, je zřejmé, že co je nejpohodlnějším typem modelu pro teoretickou analýzu, to je nejhůře dosažitelné pro experimentální analýzu a opačně. Při teoretické analýze vycházíme z fyzikálního modelu, ale dostat se k němu přes naměřená data je poměrně obtížné a vyžaduje aplikaci dalších postupů zpracování dat, které už nebývají součástí softwarových balíčků. Naopak frekvenční odezvové funkce, které přímo získáme měřením, je relativně pracné získávat v teoretickém modelu. Proto je nejčastějším formátem pro srovnávání dvou množin dat modální model. Uvedeme si zde několik možností, které máme při srovnávání modálních modelů k dispozici.

4.4.3.1 Srovnání vlastních frekvencí

Zcela samozřejmé je provést srovnání naměřených vs. vypočtených vlastních frekvencí. To se často dělá jednoduchou tabelací obou množin výsledků, ale užitečnější formát je vykreslení

experimentální hodnoty oproti vypočtené hodnotě pro všechny módy zahrnuté do srovnání, jak je ukázáno na obr. 4.19. Tímto způsobem lze vidět nejen stupeň souladu mezi oběma množinami výsledků, ale taky povahu a možnou příčinu vyskytujících se odchylek. Vykreslené body by měly ležet na přímce se směrnici 1 nebo blízko ní. Jestliže leží poblíž přímky, která má jinou směrnici, pak je téměř určitě příčina nesouladu v chybných materiálových vlastnostech použitých při výpočtu. Pokud jsou body podél přímky široce rozptýleny, je v modelu, který reprezentuje strukturu, závažná chyba a je nutno provést základní přehodnocení. Zvláštní pozornost vyžaduje případ, kdy se body lehce odchylují od ideální přímky, ale systematickým a nikoli náhodným způsobem, protože tato situace naznačuje, že zde je specifický rys, který je za odchylku odpovědný, a že to nelze jednoduše přičíst na vrub experimentálním chybám.

Pokud je rozptyl malý a podél přímky se sklonem 45° náhodně rozložený, tak lze předpokládat, že hodnoty pocházejí z normálního procesu modelování a měření. Obvyklé je to, že čím vyšší (v pořadí) je vlastní frekvence, tím je rozdíl mezi vypočtenou a naměřenou hodnotou větší. Rozdíly by měly mít tu tendenci, že vypočtené frekvence jsou vyšší než naměřené, protože do výpočtu obvykle nezahrnujeme tlumení, kdežto naměřené frekvence jsou vždy tlumené, a tedy nižší.



Obr. 4.19 - Grafické srovnání vlastních frekvencí

Pokud je většina bodů blízko ideální přímky (modré body na obr. 4.19) a některé body jsou od této přímky hodně vzdálené (červený bod na obr. 4.19), může to být tím, že srovnáváme různé módy. To je velmi častou chybou. Je třeba zdůraznit, že pokud získáme z měření 10 módů a v témže frekvenčním pásmu z výpočtu 10 módů, není ještě zaručeno, že je můžeme automaticky přiřadit první k prvnímu...až desátý k desátému. Může se totiž stát, že:

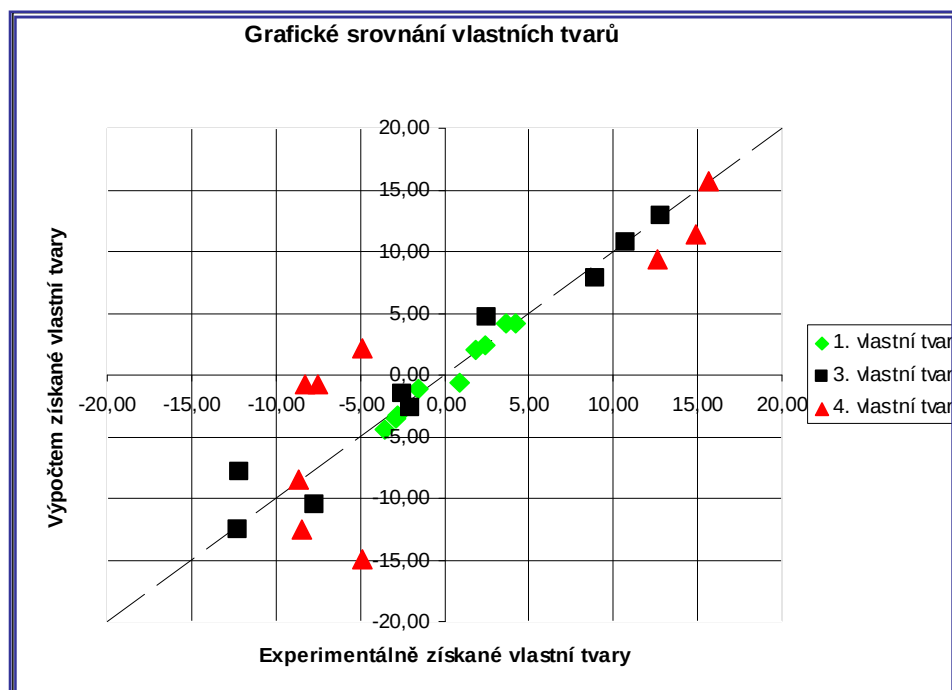
- ♦ Pořadí dvou frekvenčně blízkých módů je ve dvou srovnávaných modelech přehozeno.
- ♦ Z měření nám jeden mód "vypadl" (třeba proto, že jsme měli referenční bod v jeho uzlovém bodě), takže bychom měli z experimentu o jeden mód méně, ale poslední z experimentu zjištěný mód je ve výpočtovém modelu už nad zkoumaným frekvenčním pásmem, takže zase chybí ve výpočtu. Tím se počet módů vyrovná.

Kdybychom chtěli takto automaticky porovnávat zjištěné módy, tak ve všech zde uvedených metodách dojdeme k neuspokojivým závěrům. Proto je nezbytně nutné, abychom před zahájením jakéhokoliv porovnávání dvou modelů nejdříve vizuálně prošli vlastní tvary a přiřadili příslušné módy k sobě. Tím vyloučíme nebezpečí porovnávání dvou módů, které k sobě nepatří. To, že v experimentálním modelu nějaký mód chybí, je celkem běžné, takže nebezpečí plynoucí ze srovnávání dvou nesouhlasných módů je velké. Nicméně, pokud módy k sobě správně přiřadíme, nedá se chybějící mód v experimentálním modelu považovat za chybu, která by nám bránila kvalitnímu srovnání obou modelů nebo naladění výpočtového modelu. Je zcela dostatečné, když výpočtový model naladíme podle těch módů, které máme k dispozici (předpokládá se, že nebude chybět první mód, ale spíše některý z vyšších módů).

4.4.3.2 Grafické srovnání vlastních tvarů

Jednou z možností, jak provést srovnání vlastních tvarů, je vykreslit deformovaný tvar pro oba modely - experimentální a teoretický - a překrýt jeden obrázek přes druhý. Nevýhodou tohoto přístupu je to, že i když jsou vidět rozdíly, je obtížné je interpretovat a často jsou takto získané obrázky velmi matoucí, protože je v nich obsaženo příliš mnoho informací.

Pohodlnější metoda je podobná té pro grafické srovnání vlastních frekvencí. Prvky vektorů vlastních tvarů se vykreslí do x-y grafu, opět naměřené vs. vypočtené, a v ideálním případě by opět měly být rozloženy poblíž přímky se směrnicí 1. Pro toto srovnání je potřeba vybrat z výpočtového modelu, který má obvykle mnohem více stupňů volnosti než experimentální model, ty stupně volnosti, které se shodují s experimentálním modelem.



Obr. 4.20 - Grafické srovnání vlastních tvarů

Povaha odchylek od ideálního stavu může opět poměrně jasně indikovat příčinu nesouladu: pokud body leží blízko přímky se směrnici jinou než 1, pak jeden ze srovnávaných vlastních tvarů není normalizován podle matice hmot nebo je v datech nějaká jiná forma chyby měřítka. Pokud jsou body kolem přímky široce rozptýlené, je v jedné nebo druhé množině dat závažná nepřesnost a pokud je rozptyl nadměrný, může jít o případ, že srovnáváme prvky dvou vlastních vektorů, které nepřísluší stejnému módu.

Na obr. 4.20 je provedeno srovnání tří vlastních tvarů, každý jinou barvou. Je vidět, že 1. a 3. vlastní tvar vykazují dobrou shodu, u 4. vlastního tvaru je shoda horší. Tento výsledek je typický, protože se vzrůstající složitostí vlastních tvarů je obtížnější dosáhnout shody.

4.4.3.3 Numerické srovnání vlastních tvarů

Jako alternativu k výše uvedenému grafickému přístupu můžeme použít numerické srovnání vlastních tvarů. Níže uvedené vzorce předpokládají, že data vlastních tvarů mohou být komplexní. Experimentální - naměřený vlastní tvar je značen $\{\phi_X\}$ a teoreticky vypočtený - analytický vlastní tvar $\{\phi_A\}$. Tato kritéria jsou ve skutečnosti užitečná pro všechny druhy srovnání, nejen experiment vs. teorie, ale mohou být použity pro srovnání libovolného páru odhadů vlastních tvarů.

První kritérium se týká veličiny, která se nazývá *faktor modálního měřítka* (Modal Scale Factor - MSF) a představuje směrnici nejlepší přímky proložené body na obr. 4.20. Tato veličina je definována jako (mohou být 2 formy, podle toho, který z vlastních tvarů je vzat jako referenční):

$$\text{MSF}(X, A) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_A)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\phi_A)_j (\phi_A)_j^*} \quad \text{MSF}(A, X) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_A)_j (\phi_X)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_X)_j^*} \quad (4.16)$$

Je třeba poznamenat, že toto kritérium nedává žádnou indikaci kvality aproximace bodů přímkou, ale pouze její sklon.

Druhé kritérium se nazývá koeficient korelace vlastních tvarů (Mode Shape Correlation Coefficient - MSCC) nebo *kritérium modální věrohodnosti* (Modal Assurance Criterion - MAC) a poskytuje míru odchylky bodů od přímky ve smyslu nejmenších čtverců. Je definováno jako:

$$\text{MAC}(A, X) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_A)_j^* \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\phi_X)_j (\phi_X)_j^* \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\phi_A)_j (\phi_A)_j^* \right)} \quad (4.17)$$

a je to skalární veličina, i když jsou data vlastních tvarů komplexní. Stejně jako faktor modálního měřítka neindikuje stupeň souladu, nerozlišuje ani kritérium modální věrohodnosti mezi náhodným rozptylem zodpovědným za odchylky a systematickými odchylkami. Takže i když jsou tyto parametry užitečným prostředkem pro kvantifikaci srovnání mezi dvěma

množinami dat vlastních tvarů, nedávají celkový obraz a měly by být brány v úvahu přednostně ve spojení s grafy ve tvaru zobrazeném na obr. 4.22.

Stojí za to uvážit dva zvláštní případy: (1) ten, kdy jsou dva vlastní tvary identické a (2) ten, kdy se liší jednoduchým skalárním násobkem. V případě (1) máme:

$$\{\phi_X\} \equiv \{\phi_A\}$$

z čehož je vidět, že

$$\text{MSF}(X, A) = \text{MSF}(A, X) = 1$$

a taky, že:

$$\text{MAC}(X, A) = 1$$

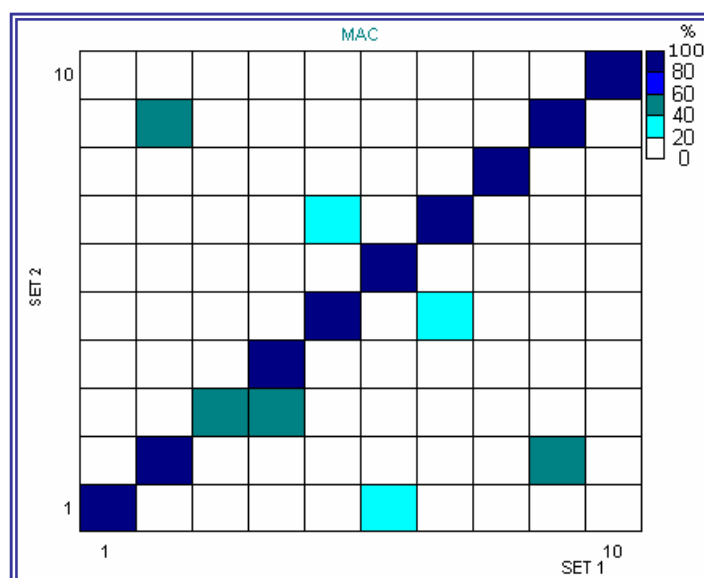
V případě (2) máme $\{\Phi_X\} = \gamma\{\Phi_A\}$ a zjistíme, že

$$\text{MSF}(X, A) = \gamma, \quad \text{zatímco} \quad \text{MSF}(A, X) = \frac{1}{\gamma}$$

ale protože oba módy spolu stále téměř dokonale korelují, stále máme:

$$\text{MAC}(X, A) = 1$$

V praxi budou typická data méně ideální než tato a očekává se, že pokud použitý experimentální a teoretický vlastní tvar budou skutečně ze stejného módu, pak hodnota MAC bude blízko 1 zatímco pokud budou skutečně patřit dvěma různým módům, měli bychom dostat hodnotu blízkou 0. Když vezmeme množinu m_X experimentálních módů a množinu m_A teoretických módů, můžeme vypočíst $m_X \times m_A$ matici MAC kritérií modální věrohodnosti a zobrazit je v matici, která by měla jasně indikovat, který experimentální mód náleží ke kterému vypočtenému módu. Je obtížné uvést přesné hodnoty, kterých by mělo MAC nabývat, aby byly zajištěny dobré výsledky. Obecně se však ukazuje, že hodnoty větší než 0,9 bychom měli získat pro k sobě patřící módy a hodnoty menší než 0,05 pro módy, které k sobě nepatří.



Obr. 4.21 - MAC matice - grafické znázornění

Stojí za to zmínit se o některých příčinách nedokonalých výsledků těchto výpočtů. Kromě zjevného důvodu, že model je nesprávný, mohou být hodnoty MAC menší než 1 způsobeny:

- ♦ nelinearitami ve zkoušené struktuře
- ♦ neodprůměrovaným šumem v naměřených datech
- ♦ nedbalou modální analýzou naměřených dat
- ♦ nesprávným výběrem stupňů volnosti zahrnutých do korelace

Na obr. 4.21 je příklad MAC matice, která pochází ze srovnání dvou měření - při buzení kladívkem a budičem. Šlo o strukturu, která má 3. a 4. mód velmi podobné a frekvenčně od sebe vzdálené o 0,4 Hz, jejichž identifikace byla problematická. To je vidět na MAC matici, kdy prvek (3,3) je menší než 0,8 a prvek (3,4) je větší než 0,4.

Pozn.: V kapitole 4.4.2 už jsme se o hodnotách MAC kritéria zmínili. Uplatníme-li MAC kritérium na 1 sadu výsledků, dostaneme na hlavní diagonále vždy přesně hodnoty 1, takže signifikantní jsou pro nás mimodiagonální hodnoty - měly by být blízké nule. Pokud nejsou, je zde nebezpečí výskytu falešných módů.



Shrnutí pojmů

experimentální model
volné uložení, pevné uložení, uložení in situ
SISO, SIMO, MIMO
FRA analyzátor, FFT analyzátor
referenční bod
metody aproximace: metoda špička-amplituda, metoda aproximace kružnicí
kritérium MAC



Otázky

1. Jaké znáte způsoby uložení měřené struktury a jaké jsou výhody a nevýhody každého z nich?
2. Co se myslí pojmem "experimentální model"? Jak souvisí kvalita experimentálního modelu s kvalitou získaných modálních parametrů?
3. Kterým typem měřicí metody (SISO, SIMO, MIMO) se převážně zabývá tento učební text?
4. U jakého typu struktur je nutné použít MIMO metodu?
5. Jaký je vztah mezi tuhostí hrotu rázového kladívka a vybuzeným frekvenčním rozsahem?
6. Jaký je vztah mezi hmotností hlavy rázového kladívka a vybuzeným frekvenčním rozsahem?
7. Proč se nedoporučuje použití rázového kladívka pro měření s frekvenční lupou?
8. Jaké jsou výhody a nevýhody buzení pomocí rázového kladívka?
9. Jaké jsou výhody a nevýhody buzení pomocí připojeného budiče vibrací?
10. Jaké typy budících signálů znáte?
11. Jaké typy analyzátorů znáte?
12. Jaké měřicí vybavení použijete pro studium nelinearity v systému?
13. Co je to referenční bod a jaké požadavky jsou na něj kladeny?
14. Jaké znáte metody identifikace modálních parametrů?
15. Jak se dá z Nyquistova grafu zjistit vlastní frekvence?
16. Jak poznáte při animaci komplexní vlastní tvar a jak takový tvar vzniká?
17. Jak by měl vypadat graf srovnávající experimentálně získané a vypočtené vlastní frekvence? (Načrtněte takový graf pro dobře odladěný MKP model.)
18. Jak by měla vypadat MAC matice srovnávající experimentálně a výpočtově získaný model? Co prvky matice MAC vyjadřují?

5 PROVOZNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA

V této kapitole se seznámíte s moderní metodou, která umožňuje získat modální parametry pouze z provozních dat, bez nutnosti umělého vybuzení měřené struktury.



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

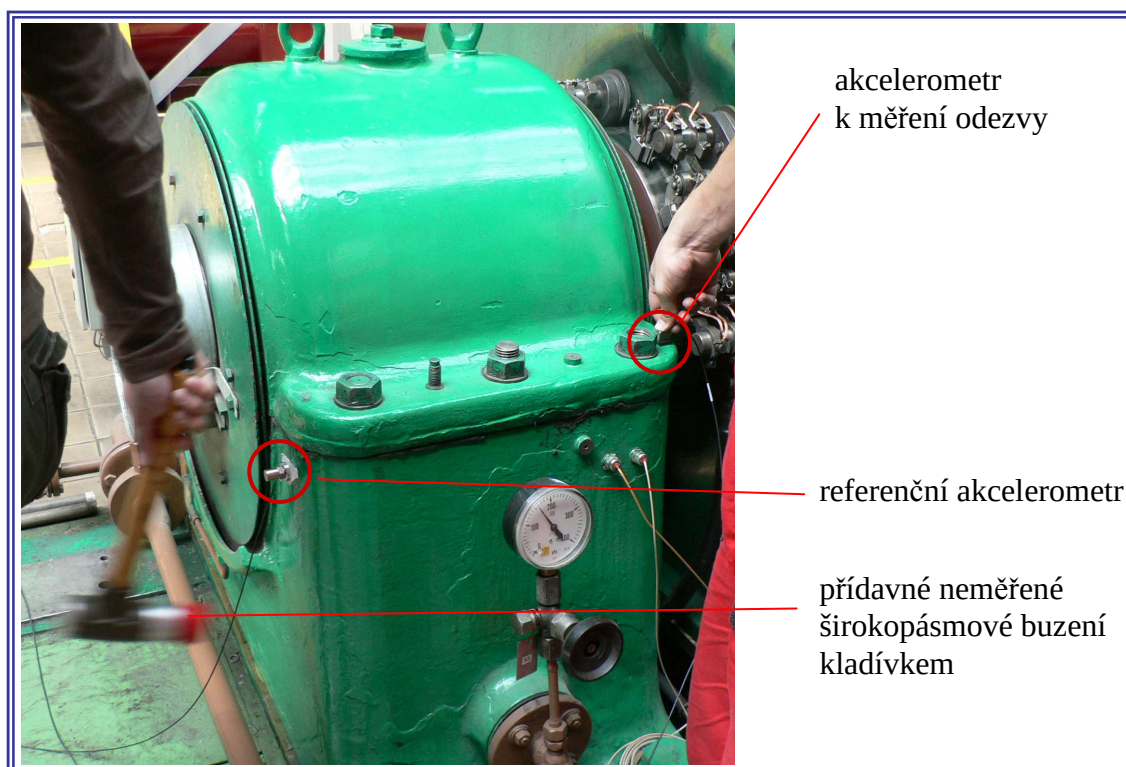
- ✚ Vysvětlit podstatu provozní modální analýzy
- ✚ Posoudit možnosti použití provozní modální analýzy
- ✚ Provést provozní modální analýzu a posoudit získané výsledky



Výklad

Provozní modální analýza je metoda, pomocí které je možné získat modální model pouze na základě měření odezvy. Postup měření je stejný jako u měření přenositelnosti (transmissibilit) u provozních tvarů kmitu. Potřebujeme tedy jeden referenční akcelerometr, který zůstává po celou dobu zkoušky na místě, a jeden nebo více akcelerometrů na snímání odezvy, které se přemísťují po struktuře. Matematické pozadí, které stojí za provozní modální analýzou, je však mnohem složitější, než je tomu jak u provozních tvarů kmitů, tak u klasické modální zkoušky, kterou se až dosud zabýval tento učební text. Dá se říci, že teprve masivní nárůst výpočetní kapacity počítačů v posledních letech umožnil vznik a rozšíření této metody.

Provozní modální analýza, jak už název napovídá, se provádí za skutečných provozních podmínek měřeného stroje nebo zařízení, přičemž se neměří vstupní budící síly, ale pouze vibrační odezvy. Přesto jejím provedením získáme platný modální model měřeného systému, i když nenormovaný. Tato metoda je zvláště vhodná pro měření velkých struktur, u kterých by bylo umělé buzení problematické nebo nemožné. S úspěchem se používá pro modální zkoušky mostů, budov, těžebních plošin apod. Přírozené buzení od silničního provozu, větru nebo mořských vln je v tomto případě širokopásmové, což je hlavní předpoklad pro úspěšný průběh modální zkoušky. Literatura uvádí, že v současnosti se OMA začíná uplatňovat i ve strojírenských aplikacích - u rotačních strojů, zkoušek při jízdě, za letu apod. Limitujícím faktorem v těchto případech bývá právě způsob přirozeného buzení. Např. u rotačních strojů pochází hlavní budící frekvence od otáček rotoru a buzení na ostatních frekvencích bývá velmi slabé. Za těchto okolností bude spolehlivost získaného modálního modelu malá. Situaci můžeme zlepšit tím, že aplikujeme přídatné širokopásmové buzení, které neměříme (viz obr. 6.1).



Obr. 6.1 - Sestava měření při provozní modální analýze s přídavným buzením

Výhody provozní modální analýzy oproti klasické modální zkoušce se dají shrnout takto:

- ♦ Není třeba připravovat upevnění struktur, budičů a snímačů síly:
 - nevyžaduje testovací přípravky
 - příprava je rychlá
 - není dynamické zatížení od budičů a budících tyček
 - nejsou problémy s činitelem výkmitu jako při použití kladívka
 - nehrozí potenciální poškození struktury
- ♦ Modální model reprezentuje skutečné provozní podmínky:
 - skutečné okrajové podmínky
 - skutečné síly a úrovně vibrací
- ♦ Je zapotřebí pouze přirozené náhodné nebo neměřené umělé širokopásmové buzení.
- ♦ Nenarušuje běžný provoz.
- ♦ Modální zkouška může být provedena současně s jinými aplikacemi.
- ♦ Metoda je přirozeně polyreferenční, protože buzení působí ve více místech měřené struktury. Je možná identifikace vícenásobných módů.

Je třeba se však zmínit i o nevýhodách, a to:

- ♦ Získaný modální model je nenormovaný (nemá měřítko), nelze tedy provádět simulace modifikací a vynucené odezvy.
- ♦ Metoda vyžaduje větší zkušenosti operátora, často je zapotřebí předběžná analýza.
- ♦ Může vyžadovat dlouhé časové záznamy.
 - je potřebná větší kapacita pro zpracování dat
 - je potřebný větší výpočetní výkon

Při provozní modální analýze přijímáme některé předpoklady, které můžeme rozdělit na teoretické (matematické) a praktické.

Teoretické předpoklady:

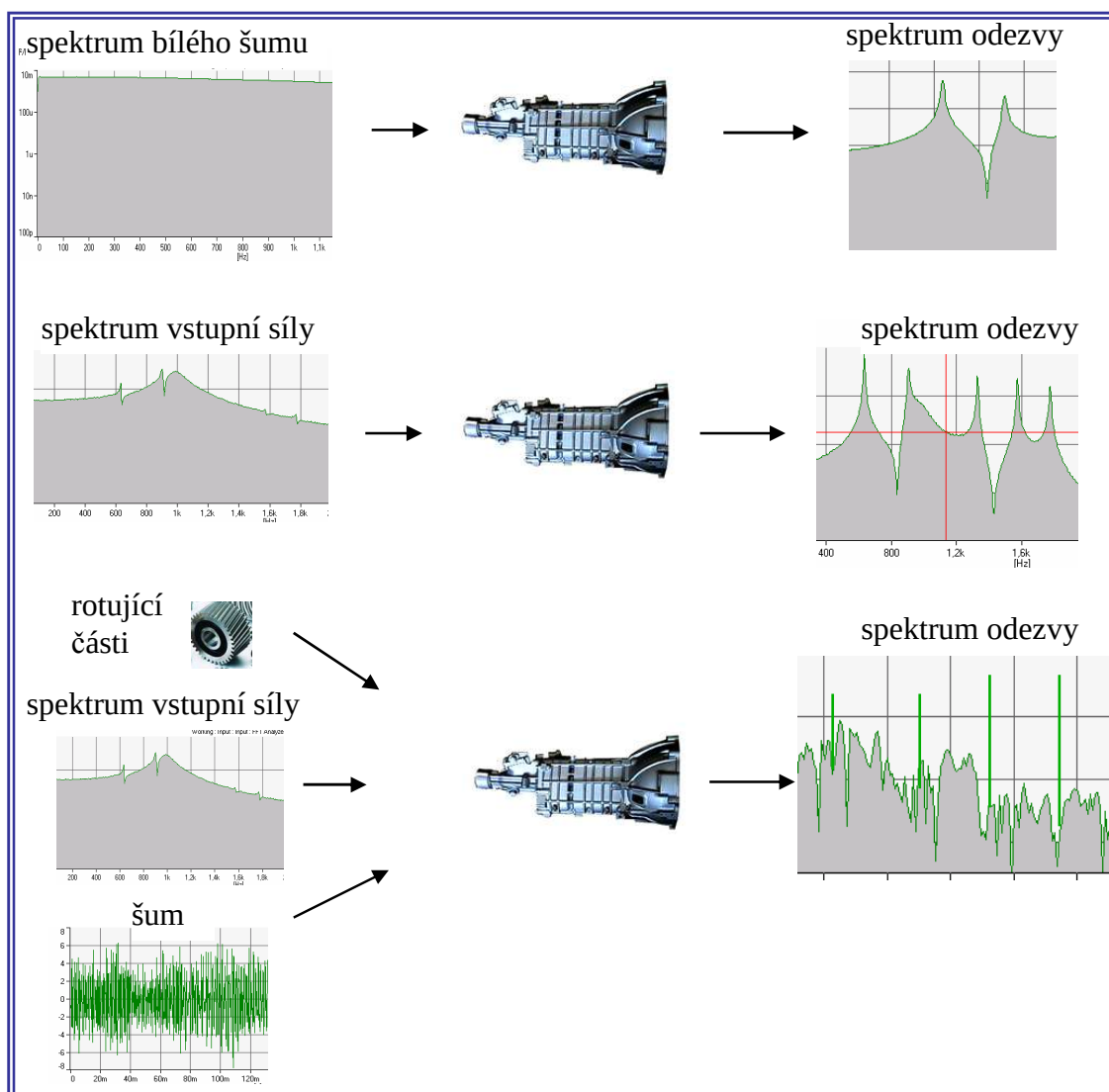
- ♦ Stacionární signály vstupních sil mohou být aproximovány filtrovaným Gaussovským bílým šumem s nulovou střední hodnotou.
 - Signály jsou úplně popsány svými korelačními funkcemi.
 - Vypočtené spektrální hustoty a korelační funkce jsou podobné těm, které se získají z experimentálních dat.

Praktické předpoklady:

- ♦ Buzení je širokopásmové.
- ♦ Musí být vybudeny všechny módy (jako u klasické modální zkoušky).

A je to právě nedokonalé splnění předpokladu širokopásmového buzení, co způsobuje problémy při analýze dat. Pokud je struktura buzena pouze bílým šumem, veškeré špičky ve spektru odezvy přísluší pouze módům, takže spektrum obsahuje pouze informace o samotné struktuře (obr. 6.2 nahoře). Tak tomu ale v praxi není. Kdybychom měřili spektrum budící síly (což u provozní modální analýzy neděláme), zjistili bychom, že toto spektrum není ploché, ale má své spektrální rozložení. To se pak projeví ve spektru odezvy jako další módy (obr. 6.2 uprostřed). To ale ještě není vše, co kontaminuje spektrum odezvy. Také se v něm projeví vliv šumu a vliv harmonických složek od otáčkové frekvence rotujících částí. Výsledkem je spektrum odezvy dle obr. 6.2 dole. Je jasné, že sebedokonalejší matematický aparát není schopen rozlišit skutečné strukturní módy od falešných módů pocházejících z nerovnoměrností spektra budících sil. K tomu jsou potřebné zkušenosti operátora nebo předběžné znalosti o strukturních módech získané z výpočtového modelu.

U rotačních strojů je každopádně vhodné znát alespoň provozní tvary kmitu, než se pustíme do provozní modální analýzy. Jejím výsledkem totiž nejspíš bude směs strukturních módů a provozních tvarů kmitu, přičemž druhé z nich budou dominantní a je dobré o nich předem vědět. Pokud provozní tvary kmitu předem nezměříme, je minimálně nutné počítat s tím, že se na otáčkové frekvenci a jejích násobcích ve výsledcích z provozní modální analýzy objeví.



Obr. 6.2 - Spektrum odezvy v provozních podmínkách

5.1 Metody identifikace

Softwarové balíky pro provozní modální analýzu nabízejí dvě metody identifikace modálních parametrů:

- ♦ neparametrická - *dekompozice ve frekvenční oblasti* (FDD - Frequency Domain Decomposition) - modální parametry jsou určovány přímo z naměřených dat.
- ♦ parametrická - *identifikace v podprostoru* (SSI - Stochastic Subspace Identification) - modální parametry jsou určeny z modálního modelu, který se hodí na data získaná zpracováním naměřeného signálu.

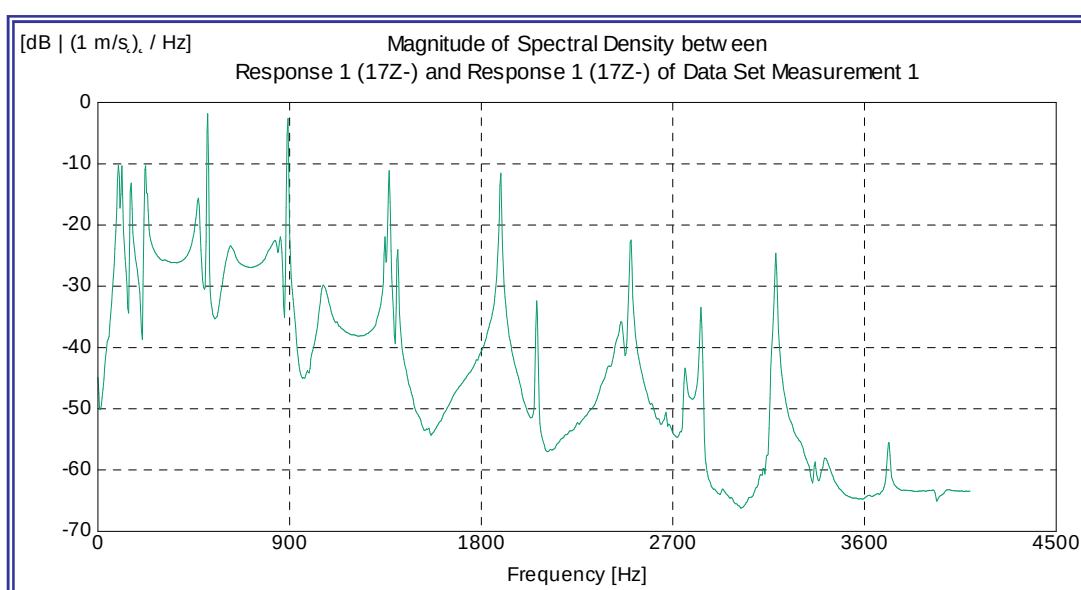
Stručně si uvedeme pouze postup u metody FDD, který je následující:

- odhad výkonových spektrálních hustot (PSD - Power Spectral Density) (obr. 6.3)
- rozklad PSD do singulárních hodnot (SVD - Singular Value Decomposition)
- identifikace modelů s 1° volnosti (SDOF) ze SVD
- identifikace modálních parametrů ze SDOF modelů

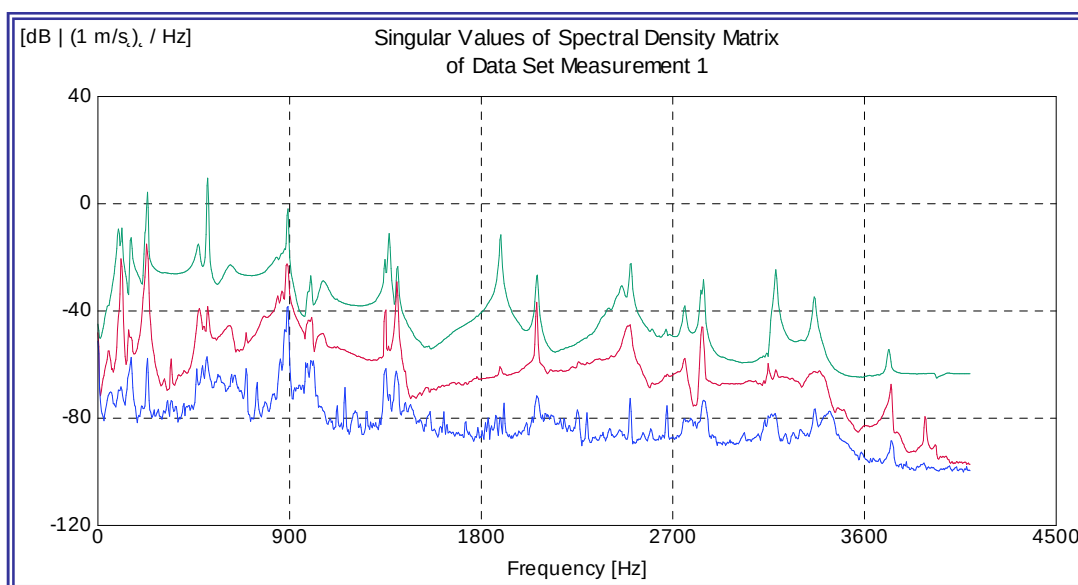
Rozklad výkonových spektrálních hustot do singulárních hodnot probíhá dle vztahu

$$G_{yy}(i\omega_j) = \sum_k \frac{d_k}{i\omega_j - \lambda_k} \phi_k \phi_k^T + \frac{d_k^*}{i\omega_j - \lambda_k^*} \phi_k^* \phi_k^{*T} = \sum_k s_k \phi_k \phi_k^T + s_k \phi_k^* \phi_k^{*T} \quad (6.1)$$

kde s_k je konstanta, která je pro danou frekvenci reálná. Tento rozklad se provede pro každou frekvenci.



Obr. 6.3 - Odhad výkonové spektrální hustoty



Obr. 6.4 - Singulární hodnoty

V programu se zadává, kolik čar singulárních hodnot chceme určit (na obr. 6.4 jsou tři). Teorie říká, že pokud je v horní řadě špička, má na příslušné frekvenci struktura alespoň jeden mód, pokud je v druhé řadě špička, má na příslušné frekvenci struktura alespoň dva módy atd. Krátké zkušenosti autorky textu s metodou provozní modální analýzy tuto teorii zatím nepotvrdily.

5.2 Prezentace výstupů

Stejně jako u klasické modální analýzy, i u provozní modální analýzy získáme modální model, tzn. modální a spektrální matici. Aby šlo skutečně o platný modální model, je nejdříve nutné z výsledků odstranit falešné módy a provozní tvary kmitu, tak jak o tom bylo pojednáno dříve.

Tabulka 6.1 - Vlastních frekvence a poměrné útlumy získané pomocí OMA

Mode	Frequ...	Std. Fr...	Dam...	Std. ...	Creation Date...
Mode 1	99.62	5.972	3.349	1.129	22-05-2007 12:31:32
Mode 2	112	0.3705	1.989	0.2421	22-05-2007 12:31:38
Mode 3	146.9	14.54	1.885	0.5866	22-05-2007 12:31:42
Mode 4	232	0.01487	0.8545	0.02111	22-05-2007 12:31:47
Mode 5	476.6	10.36	1.249	0.3852	22-05-2007 12:31:52
Mode 6	515.4	0.491	0.4158	0.03736	22-05-2007 12:31:57
Mode 7	891.5	0.6606	0.3261	0.1367	22-05-2007 12:32:05
Mode 8	992.9	8.048	0.2991	0.1439	22-05-2007 12:32:13
Mode 9	997.4	7.178	0.3038	0.1577	22-05-2007 12:32:19
Mode 10	1368	0.6367	0.194	0.01442	22-05-2007 12:34:36
Mode 11	1888	2.718	0.1491	0.04608	22-05-2007 12:34:40
Mode 12	2060	1.83	0.1377	0.01951	22-05-2007 12:34:47
Mode 13	2499	1.933	0.123	0.03253	22-05-2007 12:34:54

Spektrální matici zobrazuje program (v tomto textu jsou použity ukázkové výstupy z programu PULSE Operational Modal Analysis) ve tvaru tabulky, ve které jsou uvedeny vlastní frekvence a poměrné útlumy (obr. 6.5). (Protože jde o statistické odhady, ke každé hodnotě je uvedena i její směrodatná odchylka.) Modální matici, tedy číselné vyjádření vlastních tvarů, je možné exportovat v univerzálním formátu (UFF). Nejvhodnější způsob zobrazení vlastních tvarů je opět jejich animace.



Shrnutí pojmů

provozní modální analýza

přídavné buzení

přirozené buzení



Otázky

1. Vysvětlete pojem "provozní modální analýza".
2. Jaký je postup měření u provozní modální analýzy?
3. Jaké jsou výhody a nevýhody provozní modální analýzy ve srovnání s klasickou modální zkouškou?
4. Jaká jsou omezení provozní modální analýzy při použití u rotačních strojů?
5. Je modální model získaný provozní modální analýzou plnohodnotný?

**Souhrnné otázky**

1. Jak je definována pohyblivost?
2. Jak je definována akcelance?
3. Jaké typy frekvenčních odezvových funkcí znáte (podle typu měřené veličiny)?
4. Je možné získat funkce dynamické poddajnosti a pohyblivosti z naměřené funkce akcelance? Pokud ano, uveďte jak.
5. Uveďte výhody rázového buzení oproti buzení pomocí připojeného budiče vibrací signálem náhodného šumu.
6. Uveďte výhody buzení pomocí připojeného budiče vibrací signálem náhodného šumu oproti buzení rázovému.
7. Uveďte nevýhody rázového buzení oproti buzení pomocí připojeného budiče vibrací signálem náhodného šumu.
8. Uveďte nevýhody buzení pomocí připojeného budiče vibrací signálem náhodného šumu oproti buzení rázovému.
9. Jaké typy signálů je možné použít pro buzení struktury pomocí připojeného budiče vibrací?
10. Jaké typy buzení je možné použít pro buzení struktury?
11. Proč se provádějí modální zkoušky (uveďte alespoň 3 možnosti použití výsledků).
12. Co je to referenční bod a jaké požadavky musí splňovat?
13. Jak se liší frekvenční odezvová funkce naměřená v referenčním bodě od frekvenčních odezvových funkcí naměřených v ostatních bodech?
14. Jak se dá zkontrolovat správnost měření v referenčním bodě?
15. Jaké jsou požadavky kladené na budicí tyč spojující strukturu a budič vibrací?
16. Uveďte správné řazení těchto prvků při měření pomocí budiče vibrací: budicí tyč, snímač síly, budič, měřená struktura.
17. Co je to koherence (uveďte definiční vztah)?
18. Uveďte 3 důvody, pro které se může stát, že koherence v naměřené frekvenční odezvové funkci je na některých frekvencích výrazně menší než 1.
19. Jak hmotnost rázového kladívka a hrot použitý na kladívku ovlivňují použitelnost při měření?
20. Čím je jednoznačně určen mód vibrací?
21. Co je to reziduum (případně definiční vztah)?
22. V jakých jednotkách se určuje konstanta doznívání δ ?

23. Co je to vlastní číslo?
24. Jakými maticemi je popsán fyzikální model dynamického systému a jakými modální model?
25. Jakého řádu bude matice frekvenčních odezvových funkcí naměřených na struktuře s definovanými 60 stupni volnosti a se zjištěnými 7 vlastními frekvencemi v měřeném frekvenčním rozsahu?
26. Jakého řádu bude modální matice získaná při modální zkoušce struktury s definovanými 60 stupni volnosti a se zjištěnými 7 vlastními frekvencemi v měřeném frekvenčním rozsahu?
27. Uveďte vztah, kterým je dán jeden prvek matice frekvenčních odezvových funkcí $H_{ij}(\omega)$.
28. Jakou maticí je tvořen odezvový model dynamického systému?
29. Který ze tří modelů dynamického systému (fyzikální, odezvový, modální) získáme změřením frekvenčních odezvových funkcí?
30. Jak vypadá matice vlastních tvarů a jaký je její řád pro systém s 60 stupni volnosti, pokud bylo v měřeném frekvenčním rozsahu naměřeno 12 vlastních tvarů?
31. Je nutné při provádění modální zkoušky měřit všechny prvky matice frekvenčních odezvových funkcí?
32. Kolika stupni volnosti je úplně definován jeden bod na struktuře a kolik stupňů volnosti se obvykle měří v jednom bodě při provádění modální zkoušky?
33. Co je to stupeň volnosti, které stupně volnosti lze měřit snadno a které obtížně?
34. Co je to impulsní odezvová funkce?
35. Načrtněte, jak vypadá impulsní odezvová funkce (= odezva v časové oblasti) tlumeného systému s jedním stupněm volnosti a jak je možné z ní zjistit hodnotu vlastní frekvence, tlumení a rezidua.
36. Načrtněte, jak vypadá frekvenční odezvová funkce tlumeného systému s jedním stupněm volnosti a jak je možné z ní zjistit hodnotu vlastní frekvence, tlumení a rezidua.
37. Uveďte alespoň 2 způsoby zobrazení dat naměřených při modální zkoušce.
38. Co je to modální kružnice a které veličiny je možné z ní odečíst?
39. Co se stane, když měřená odezva neskončí v měřeném čase a jak se tato situace při modálních zkouškách řeší?
40. Jaké vážení se používá pro vstupní signál při rázovém buzení?
41. Jaké vážení se používá pro výstupní signál při rázovém buzení?
42. Jaké vážení se používá pro vstupní i výstupní signál při buzení signálem náhodného šumu?

43. Jak se v rezonanci mění fáze?
44. Co je to normování vlastních tvarů a jaké normování znáte?
45. Vyjadřují vlastní tvary skutečnou odezvu systému v absolutních hodnotách?
46. Lze použít modální model získaný pomocí rázového buzení pro předpovězení odezvy systému na harmonické buzení?
47. Uveďte vztahy popisující ortogonalitu vlastních tvarů.
48. Co vyjadřuje MAC kritérium a jaké by ideálně měly být prvky matice MAC při porovnání dvou matic vlastních tvarů téhož systému (např. matice vlastních tvarů získaná experimentem vs. matice vlastních tvarů získaná pomocí MKP).

POUŽITÁ LITERATURA



Další zdroje

- [1] Ewins, David J.. *Modal Testing - Theory, Practice and Application*, England: Research Studies Press Ltd., 2000, ISBN 0-86380-218-4
- [2] Zaveri, K.. *Modal Analysis of Large Structures - Multiple Exciter Systems*, Denmark: Brüel&Kjær, 1985, ISBN 87-87355-03-5
- [3] Randall, R.B.. *Frequency Analysis*, Denmark: Brüel&Kjær, 1987, ISBN 87-87355-07-8
- [4] firemní materiály firmy Brüel&Kjær