INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů

část

TECHNICKÉ KMITÁNÍ

Teorie a příklady k předmětu Technické kmitání

Jan Ondrouch

Jiří Podešva

Ostrava 2012

Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu OP VK CZ.1.07/2.3.00/09.0147 „Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu“.

Název : TECHNICKÉ KMITÁNÍ

Autor : Jan Ondrouch, Jiří Podešva

Vydání : první, 2012

Počet stran : 179

Náklad :

Studijní materiály pro studijní obor Aplikovaná mechanika Fakulty strojní

Jazyková korektura : nebyla provedena.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.

Název:	Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu
Číslo:	CZ.1.07/2.3.00/09.0147
Realizace:	Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2762-9

POKYNY KE STUDIU

Technické kmitání

Pro předmět 5. semestru bakalářského studia oboru Aplikovaná mechanika jste obdrželi studijní balík obsahující výukový text, zaměřený na problematiku technického kmitání.

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování předmětu Matematika, Statika, Dynamika I, vyučované v rámci bakalářského studia.

Cíl učební opory

Cílem je seznámení se základními pojmy technického kmitání. Po prostudování modulu by měl student být schopen provádět středně náročné výpočty lineárního kmitání s jedním stupněm volnosti, s více stupni volnosti a nelineárního kmitání, a to v různých technických aplikacích.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do studijního plánu bakalářského studia oboru Aplikovaná mechanika, studijního programu Strojnictví, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup :

Čas ke studiu : xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden čas potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly.

Cíl: **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

Popsat …

Definovat …

Vyřešit …

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.

Příklad xxx

V každé kapitole je uveden příklad.

Úspěšné a příjemné studium s tímto učebním textem Vám přejí autoři.

Jan Ondrouch a Jiří Podešva

Obsah

Předmluva

Učební text Technické kmitání je určen studentům bakalářského studia oboru Aplikovaná mechanika, Strojní fakulty Vysoké školy báňské – Technické university v Ostravě. Předmět stejného názvu navazuje na předmět Dynamika I. Náplní tohoto předmětu je rozšíření poznatků o kmitání mechanických soustav. Obsah učebního textu zahrnuje kmitání lineárních soustav s jedním a více stupni volnosti a základní poznatky z teorie nelineárního kmitání soustav s jedním stupněm volnosti. I když se jedná pouze o nepatrný zlomek toho,co bylo o tomto oboru publikováno, autoři věří, že učební text pomůže studentům získat poznatky potřebné pro další úspěšné studium, prohloubí jejich zájem o aplikovanou mechaniku a kladný vztah ke studovanému oboru.
Obsah a rozsah učebního textu byl podřízen předmětu Technické kmitání, který se podle učebního plánu vyučuje v rozsahu 2+2.

Přehled použitého značení

m hmotnost

k tuhost

b součinitel tlumení

ℓ délka

t, τ čas, tloušťka

x, y, z souřadnice

v rychlost, prvek modální matice

a zrychlení

F síla

F_k direkční síla

F_b tlumící síla

F_v vratná síla

M moment síly

R reakce

Ω, ω kruhová frekvence, úhlová rychlost

f frekvence

T perioda

τ časová konstanta

δ konstanta doznívání

λ vlastní číslo, Rayleighův kvocient

C amplituda, integrační konstanta

A, B integrační konstanty

D determinant

ϕ fázový posuv, úhlová souřadnice

ε úhlové zrychlení

x_0 počáteční výchylka

v_0 počáteční rychlost

η činitel naladění

ξ poměrný útlum

ϑ logaritmický dekrement

ζ činitel dynamického zesílení

n otáčky za minutu

e excentricita

I hmotový moment setrvačnosti, impuls síly

J plošný moment setrvačnosti

p hybnost hmoty, tlak

p, q, r rameno

E modul pružnosti v tahu

G modul pružnosti ve smyku, tíhová síla

K modul objemové stlačitelnosti kapaliny

S plocha

V objem

$\mathbf{M}$ matice hmot

$\mathbf{B}$ matice tlumení

$\mathbf{K}$ matice tuhosti

$\mathbf{q}$ vektor fyzikálních souřadnic

$\mathbf{u}$ vektor modálních souřadnic

$\mathbf{f}$ vektor budících sil

$\mathbf{V}$ modální matice

$\mathbf{v}$ vlastní tvar

$\mathbf{\Lambda}$ spektrální matice

α koeficient konstrukčního tlumení příčinkový činitel

β koeficient materiálového tlumení

$\mathbf{A}$ matice poddajnosti

<u>Řecká abeceda</u>

Α	α	*alfa*	Ν	ν	*ný*
Β	β	*beta*	Ξ	ξ	*ksí*
Γ	γ	*gama*	Ο	ο	*omikron*
Δ	δ	*delta*	Π	π	*pí*
Ε	ε	*epsilon*	Ρ	ρ	*ró*
Ζ	ζ	*(d)zéta*	Σ	σ	*sigma*
Η	η	*éta*	Τ	τ	*tau*
Θ	ϑ	*théta*	Υ	υ	*ypsilon*
Ι	ι	*ióta*	Φ	ϕ	*fí*
Κ	κ	*kappa*	Χ	χ	*chí*
Λ	λ	*lambda*	Ψ	ψ	*psí*
Μ	μ	*mí*	Ω	ω	*omega*

Úvod

Problematika kmitání byla a stále je v popředí zájmu vědců a techniků na celém světě. Pro strojírenství má hlavně význam mechanické kmitání. Důležitost analýzy kmitání při konstrukci strojních zařízení roste se současnými požadavky na zvyšování výkonnosti a rychlosti strojů a snižování jejich hmotnosti. Zvýšené kmitání strojů a konstrukcí, spojené s hlučností, by působilo nepříznivě na jejich životnost i na životní prostředí. Uměle vybuzené kmity však můžeme využít při konstrukci vibračních sít, dopravníků, zhutňovačů a podobných zařízení.

Mechanické kmitání je možno považovat za samostatný vědní obor s velmi širokým obsahem vědomostí. Nejčastěji se rozděluje podle jeho charakteru, vzniku, průběhu a typu fyzikálních charakteristik mechanické soustavy. Podle charakteru řešené soustavy vytváříme mechanické modely se soustředěnými parametry a modely se spojitě rozloženými parametry. Podle vzniku dělíme kmitání na volné, buzené a samobuzené. Podle velikosti disipované energie dělíme kmitání na netlumené a tlumené. Podle druhu, chování a matematického modelu fyzikálních charakteristik rozeznáváme kmitání lineární a nelineární. Podle povahy jevů probíhajících ve strojích a konstrukcích rozeznáváme kmitání deterministické a náhodné. Uvedené dělení lze dále zpřesňovat.

Z výše uvedeného rozsahu teorie kmitání se předkládaný učební text zabývá pouze kmitáním deterministickým soustav se soustředěnými parametry. První kapitola je věnována lineárnímu kmitání soustav s jedním stupněm volnosti, druhá lineárnímu kmitání s více stupni volnosti a třetí nelineárnímu kmitání soustav s jedním stupněm volnosti.

1. Kmitání lineárních soustav s 1° volnosti

Čas ke studiu : 7 hodin

Cíl: **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

Popsat zákonitosti lineárního kmitání s jedním stupněm volnosti.

Definovat základní veličiny kmitání a vztahy mezi nimi.

Vyřešit středně složité úlohy kmitání s jedním stupněm volnosti.

Výklad

V této kapitole stručně zopakujeme poznatky o kmitání získané v předmětu Dynamika I, které následně rozšíříme.

Budeme se zabývat pouze soustavami se soustředěnými parametry. U takových soustav je hmotnost soustředěna do kmitajících dokonale tuhých těles, nositeli pružných a tlumících vlastností jsou nehmotné pružiny a tlumiče. Jejich kmitání je popsáno obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Pokud se jedná o kmitání kolem statické rovnovážné polohy s malými výchylkami, lze v prvním přiblížení zanedbat nelineární elastické a tlumící síly a pohybové rovnice jsou pak lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

1.1. Kmitání podélné

Čas ke studiu : 4 hodiny

Cíl: **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

Popsat specifika podélného kmitání s jedním stupněm volnosti.

Definovat základní veličiny podélného kmitání a vztahy mezi nimi.

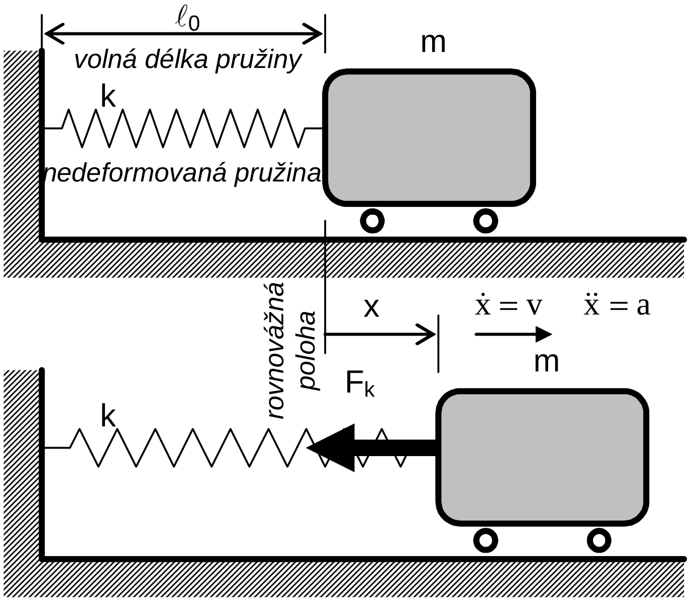
Vyřešit středně složité úlohy podélného kmitání s jedním stupněm volnosti.

Výklad

U mechanického modelu podélného kmitání koná těleso přímočarý posuvný pohyb. Jeho poloha je určena jedinou souřadnicí, jedná se tedy o pohyb s jedním stupněm volnosti.

1.1.1. Volné netlumené kmitání

Mechanický model netlumeného volného kmitání je na obr. 1.1. Je složen z tuhého tělesa hmotnosti m, které se pohybuje po vodorovné, dokonale hladké podložce bez odporu prostředí. Těleso je uchyceno k rámu prostřednictvím nehmotné pružiny o tuhosti k. (Tuhost pružiny je poměr síly a deformace. U lineární pružiny je konstantní.)



Obr. 1.1 - Model mechanické kmitající soustavy netlumené.

Zde m - <u>hmotnost</u> [kg],

k - <u>tuhost pružiny</u> [N/m],

ℓ_0 - <u>volná délka pružiny</u>, délka nezatížené pružiny [m],

x - <u>souřadnice</u>, určující polohu tělesa, rovněž pak <u>prodloužení pružiny</u> [m].

Poznámka : Například tuhost vinuté spirálové pružiny je :

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3}$$

kde G - modul pružnosti ve smyku [Pa] - vlastnost materiálu,

d - průměr drátu, z něhož je pružina svinuta [m],

D - střední průměr spirály pružiny [m],

n - počet závitů pružiny [-].

Při posunutí tělesa vzniká v pružině síla, lineárně závislá na její deformaci, tzv. direkční síla :

$$F_k = k \cdot x \tag{1.1}$$

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot a = \sum_i F_i = -F_k = -k \cdot x$$

neboli

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{1.2}$$

a po úpravě

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 \cdot x = 0 \tag{1.3}$$

kde

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.4}$$

je vlastní kruhová frekvence [s^{-1}] (nebo též úhlová) netlumeného kmitání, dále pak :

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi} \tag{1.5}$$

je vlastní frekvence [Hz ≡ s^{-1}] (počet kmitů za sekundu) a

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega_0} \tag{1.6}$$

je perioda [s] netlumeného kmitání (doba jednoho kmitu).

Řešení pohybové rovnice, obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, je :

$$x_{(t)} = C \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) \tag{1.7}$$

kde C - amplituda (maximální výchylka) [m],

ϕ_0 - fázový posuv [rad],

jsou integrační konstanty řešení.

Dále pak rychlost je :

$$v = \dot{x} = C \cdot \Omega_0 \cdot cos(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = C_v \cdot cos(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) \tag{1.8}$$

kde $C_v = C \cdot \Omega_0$ je amplituda rychlosti, zrychlení je :

$$a = \dot{v} = -C \cdot \Omega_0^2 \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = -C_a \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = -\Omega_0^2 \cdot x \tag{1.9}$$

kde $C_a = C \cdot \Omega_0^2$ je amplituda zrychlení.

Poznámka : Snadno si ověříme splnění pohybové rovnice (1.2) :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$-m \cdot C \cdot \Omega_0{}^2 \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) + k \cdot C \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = 0$$

$$-m \cdot \frac{k}{m} + k = 0$$

$$-k + k = 0$$

$$0 = 0$$

Integrační konstanty C a ϕ_0 určíme z počátečních podmínek : t = 0 ... $x = x_0$ (počáteční výchylka), $v = v_0$ (počáteční rychlost).

$$x_0 = C \cdot sin(\phi_0)$$

$$v_0 = C \cdot \Omega_0 \cdot cos(\phi_0)$$

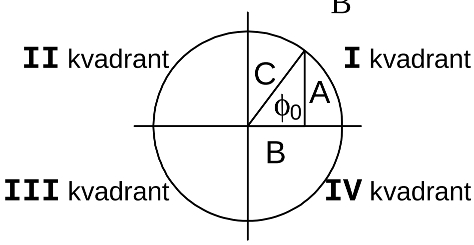
a tedy :

$$C = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\Omega_0{}^2}} \tag{1.10}$$

$$\phi_0 = arctan \frac{\Omega_0 \cdot x_0}{v_0} \tag{1.11}$$

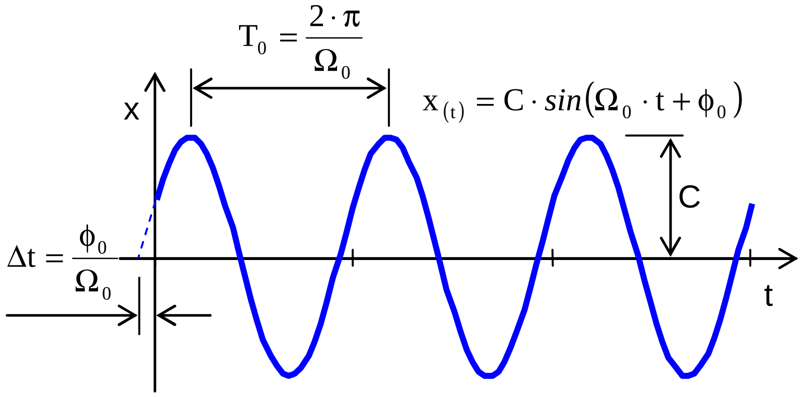
Poznámka : Funkce arctan má v intervalu ⟨0, 360°⟩ (nebo ⟨-180°, 180°⟩) vždy 2 kořeny, posunuté vůči sobě o 180°. Například arctan 0,5 = 26,6° ale též arctan 0,5 = 206,6°. Běžná kalkulačka vždy vrací ten kořen, který leží v intervalu ⟨-90°,90°⟩. Řešitel však sám musí zvážit který kořen je správný. Obecně platí :

$$\phi_0 = arctan \frac{A}{B}$$



	B < 0		B > 0	
A > 0	$\phi_0 \in \langle 90°, 180° \rangle$	(II. kvadrant)	$\phi_0 \in \langle 0, 90° \rangle$	(I. kvadrant)
A < 0	$\phi_0 \in \langle -180°, -90° \rangle$	(III. kvadrant)	$\phi_0 \in \langle -90°, 0 \rangle$	(IV. kvadrant)

Časový průběh souřadnice $x_{(t)}$ (1.7) je na obr. 1.2 :



Obr. 1.2 - Časový průběh souřadnice x.

Z obrázku je patrný fyzikální význam periody T_0 (čas mezi dvěma po sobě následujícími maximy), amplitudy C (maximální výchylka) a fázového posuvu ϕ_0 (fázový posuv vydělený kruhovou frekvencí představuje posunutí sinusovky po časové ose vlevo).

Poznámka : Řešení ve tvaru (1.7) lze rovnocenně nahradit alternativním tvarem :

$$x = C \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) = A \cdot cos(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot sin(\Omega_0 \cdot t)$$

kde :

$$A = C \cdot sin\,\phi_0 \qquad \text{a} \qquad B = C \cdot cos\,\phi_0$$

jsou integrační konstanty. Je-li dále rychlost :

$$v = \dot{x} = -A \cdot \Omega_0 \cdot sin(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \Omega_0 \cdot cos(\Omega_0 \cdot t)$$

pak z počátečních podmínek : t = 0 ... x = x_0, v = v_0 určíme integrační konstanty :

$$x_0 = A \cdot cos\,0 + B \cdot sin\,0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$$
$$v_0 = -A \cdot \Omega_0 \cdot sin\,0 + B \cdot \Omega_0 \cdot cos\,0 = B \cdot \Omega_0$$

tedy :

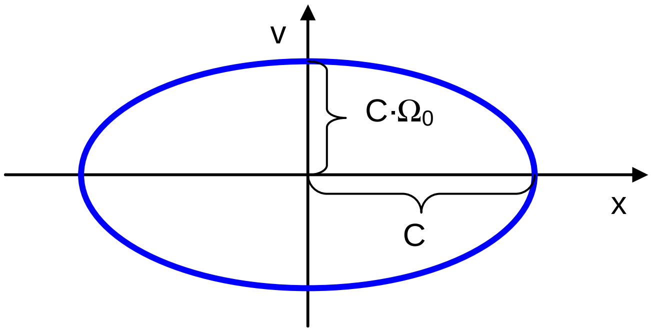
$$A = x_0 \qquad \text{a} \qquad B = \frac{v_0}{\Omega_0}$$

a konečně :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\Omega_0^{\,2}}} \qquad \text{a} \qquad \phi_0 = arctan\frac{A}{B} = arctan\frac{x_0 \cdot \Omega_0}{v_0}$$

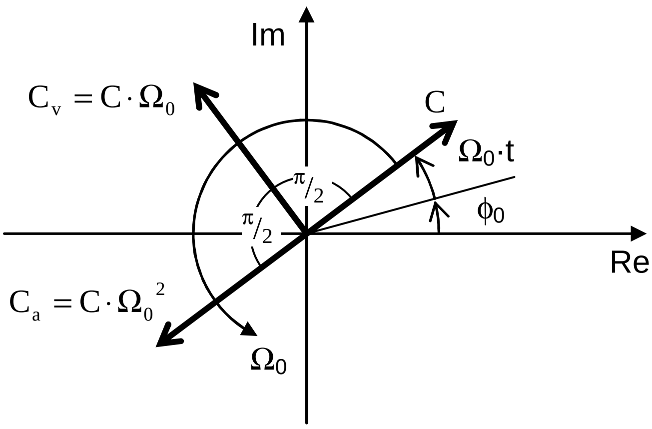
Vyloučením času z rovnic (1.7) a (1.8) získáme eliptickou závislost mezi výchylkou a rychlostí kmitání, tzv. zobrazení ve fázové rovině :

$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{v^2}{C^2\cdot\Omega_0^{\ 2}}=1 \tag{1.12}$$



Obr. 1.3 - Závislost výchylky a rychlosti - fázová rovina.

Znázornění rotujícími vektory v komplexní rovině (obr. 1.4).



Obr. 1.4 - Zobrazení rotujícími vektory v komplexní rovině.

Vyneseme komplexní vektor délky C, rotující úhlovou rychlostí Ω_0, svírající s reálnou osou úhel ($\Omega_0\cdot t+\phi_0$). Komplexní číslo lze vyjádřit vztahem :

$$\tilde{C}=C\cdot\left[cos(\Omega_0\cdot t+\phi_0)+i\cdot sin(\Omega_0\cdot t+\phi_0)\right]=C\cdot e^{i\cdot(\Omega 0\cdot t+\phi 0)}$$

kde i je imaginární jednotka.

Harmonický průběh (1.7) lze vyjádřit jako imaginární složku komplexního čísla :

$$x_{(t)}=Im\{\tilde{C}\}=Im\{C\cdot\left[cos(\Omega_0\cdot t+\phi_0)+i\cdot sin(\Omega_0\cdot t+\phi_0)\right]\}=Im\{C\cdot e^{i\cdot(\Omega 0\cdot t+\phi 0)}\}$$

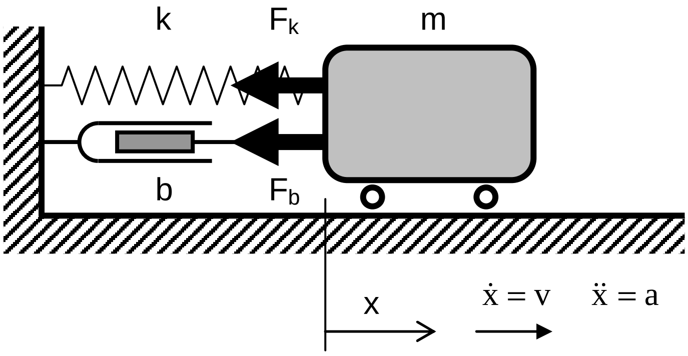
a tedy :

$$x_{(t)}=C\cdot sin(\Omega_0\cdot t+\phi_0)$$

První a druhá derivace komplexního vektoru podle času jsou vektory, pootočené v komplexní rovině o 90°.

1.1.2. Volné tlumené kmitání

Z řešení netlumeného kmitání vyplynulo, že tento pohyb se periodicky opakuje nekonečně dlouho s konstantní amplitudou. Ve skutečnosti se amplituda kmitání zmenšuje, až pohyb zanikne. Abychom se této skutečnosti přiblížili, zavádíme do mechanického modelu tlumení odporem úměrným rychlosti, tzv. viskózní tlumení. Tento druh tlumení modelujeme hydraulickým tlumičem paralelně připojeným k pružině, obr. 1.5.



Obr. 1.5 - Model mechanické kmitající soustavy tlumené.

Zde m - <u>hmotnost</u> [kg],

k - <u>tuhost pružiny</u> [N/m],

b - <u>součinitel tlumení</u> $[N \cdot s \cdot m^{-1}]$,

x - <u>souřadnice</u>, určující polohu tělesa, rovněž pak <u>prodloužení pružiny</u> [m].

Při posunutí tělesa vzniká, kromě již výše zmíněné <u>direkční síly v pružině</u> $F_k = k \cdot x$ (viz 1.1), ještě tzv. <u>tlumící síla</u>, lineárně závislá na rychlosti pohybu :

$$F_b = b \cdot v = b \cdot \dot{x} \tag{1.13}$$

Pohybová rovnice pak je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \tag{1.14}$$

neboli :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^2 \cdot x = 0 \tag{1.15}$$

kde

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

je <u>vlastní kruhová frekvence</u> $[s^{-1}]$ (nebo též úhlová) netlumeného kmitání, viz (1.4),

$$\delta = \frac{b}{2 \cdot m} \tag{1.16}$$

je <u>konstanta doznívání</u> $[s^{-1}]$ a konečně

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0{}^2 - \delta^2} \tag{1.17}$$

je <u>vlastní kruhová frekvence</u> [s^{-1}] tlumeného kmitání,

$$f = \frac{\Omega}{2 \cdot \pi} \tag{1.18}$$

je <u>vlastní frekvence</u> [$Hz \equiv s^{-1}$] (počet kmitů za sekundu) a

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \tag{1.19}$$

je <u>perioda</u> [s] tlumeného kmitání (doba jednoho kmitu).

Je-li předpokládaný tvar řešení pohybové rovnice (1.14 nebo 1.15) :

$$x = C \cdot e^{\lambda \cdot t} \tag{1.20}$$

pak charakteristická rovnice je :

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \Omega_0{}^2 = 0 \tag{1.21}$$

a její kořeny jsou :

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \Omega_0{}^2} = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\Omega_0{}^2 - \delta^2} \tag{1.22}$$

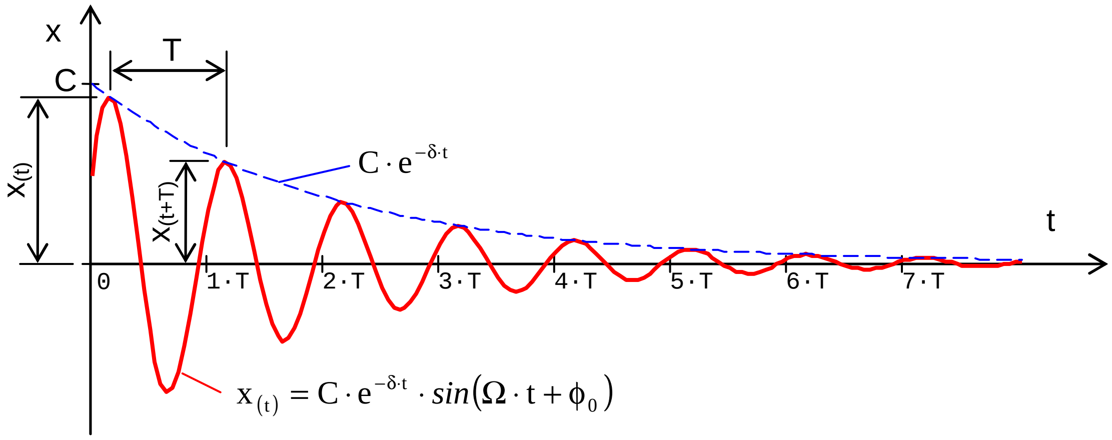
Zde reálná složka kořenů představuje tlumení, imaginární pak frekvenci kmitání.

Pro <u>podkritické tlumení</u>, kdy $\delta < \Omega_0$, je řešení pohybové rovnice (1.14 nebo 1.15) :

$$x_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0) \tag{1.23}$$

Pokud $\delta > \Omega_0$ mluvíme o <u>nadkritickém tlumení</u>. Průběh pak je čistě exponenciální, vůbec nedojde k rozvinutí kmitavého pohybu.

Časový průběh výchylky při podkritickém tlumení je na obr. 1.6.



Obr. 1.6 - Časový průběh výchylky.

Integrační konstanty C a ϕ_0 určíme z počátečních podmínek : t = 0 ... x = x_0, v = v_0.

$$C = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{(v_0 + x_0 \cdot \delta)^2}{\Omega^2}} \tag{1.24}$$

$$\phi_0 = arctan\frac{x_0 \cdot \Omega}{v_0 + x_0 \cdot \delta} \tag{1.25}$$

Poznámka : I zde můžeme použít alternativní tvar řešení (1.23) :

$$x = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0) = e^{-\delta \cdot t} \cdot [A \cdot cos(\Omega \cdot t) + B \cdot sin(\Omega \cdot t)]$$

$$v = \dot{x} = e^{-\delta \cdot t} \cdot [(\Omega \cdot B - \delta \cdot A) \cdot cos(\Omega \cdot t) - (\Omega \cdot A + \delta \cdot B) \cdot sin(\Omega \cdot t)]$$

pak z počátečních podmínek : t = 0 ... x = x_0, v = v_0 určíme integrační konstanty :

$$x_0 = e^0 \cdot (A \cdot cos\,0 + B \cdot sin\,0) = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) = A$$

$$v_0 = e^0 \cdot [(\Omega \cdot B - \delta \cdot A) \cdot cos\,0 - (\Omega \cdot A + \delta \cdot B) \cdot sin\,0] = \Omega \cdot B - \delta \cdot A$$

tedy :

$$A = x_0 \qquad \text{a} \qquad B = \frac{v_0 + \delta \cdot A}{\Omega} = \frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\Omega}$$

a konečně :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{(v_0 + \delta \cdot x_0)^2}{\Omega^2}} \qquad \text{a} \qquad \phi_0 = arctan\frac{A}{B} = arctan\frac{x_0 \cdot \Omega}{v_0 + \delta \cdot x_0}$$

Poměr výchylek v jistém časovém okamžiku (t) a o 1 periodu později (t+T) je konstantní :

$$\frac{x_{(t)}}{x_{(t+T)}} = \frac{C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin[\Omega \cdot t + \phi_0]}{C \cdot e^{-\delta \cdot (t+T)} \cdot sin[\Omega \cdot (t + T) + \phi_0]} = \frac{e^{-\delta \cdot t}}{e^{-\delta \cdot (t+T)}} = e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{\delta \cdot (t+T)} = e^{\delta \cdot T} \tag{1.26}$$

Přirozený logaritmus tohoto poměru je tzv. <u>logaritmický dekrement</u> [-] :

$$\vartheta = ln\frac{x_{(t)}}{x_{(t+T)}} = \delta \cdot T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta}{\sqrt{{\Omega_0}^2 - \delta^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \tag{1.27}$$

kde

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0} \tag{1.28}$$

je tzv. <u>poměrný útlum</u> [-].

Inverzní vyjádření k (1.27) je :

$$\xi = \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + 4 \cdot \pi^2}} \tag{1.29}$$

Poznámka : Pro $\delta << \Omega_0$ (malé tlumení) a $\vartheta^2 << 4 \cdot \pi^2$ platí přibližně $\vartheta \cong 2 \cdot \pi \cdot \xi$.

Rychlost je :

$$v = \dot{x} = C_v \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi_0 + \phi_v) \quad (1.30)$$

kde :

$$C_v = C \cdot \Omega_0 \qquad a \qquad \phi_v = arctan\frac{\delta}{\Omega}$$

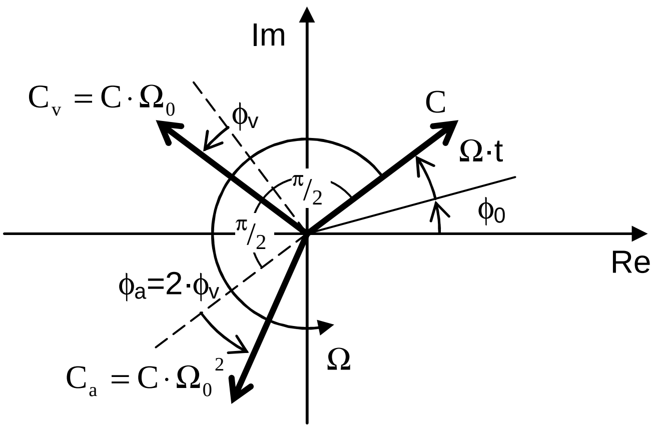
zrychlení je :

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -C_a \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0 + \phi_a) \quad (1.31)$$

kde :

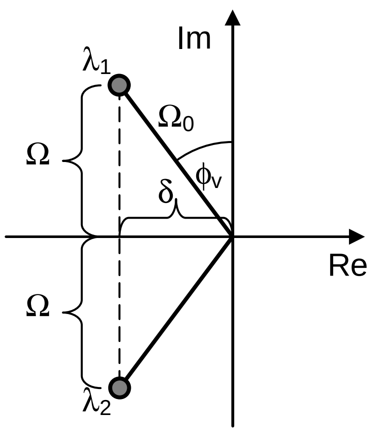
$$C_a = C \cdot \Omega_0{}^2 \qquad a \qquad \phi_a = 2 \cdot \phi_v$$

Znázornění rotujícími vektory je na obr. 1.7. První a druhá derivace komplexního vektoru jsou v komplexní rovině pootočeny o (90°+ϕ_v).



Obr. 1.7 - Zobrazení rotujícími vektory v komplexní rovině.

Znázornění vlastních hodnot kořenů (1.22) charakteristické rovnice (1.21) je na obr. 1.8 :



Obr. 1.8 - Kořeny charakteristické rovnice.

<u>Důsledky tlumení na kmitavý pohyb lze shrnout do následujících bodů :</u>

a) Amplituda kmitání se s časem exponenciálně snižuje (viz obr.1.6).

b) Relativní pokles výchylky za jednu periodu je v celém časovém průběhu konstantní (viz rovnice 1.26), kmitání zcela zanikne teoreticky až v čase $t \to \infty$.

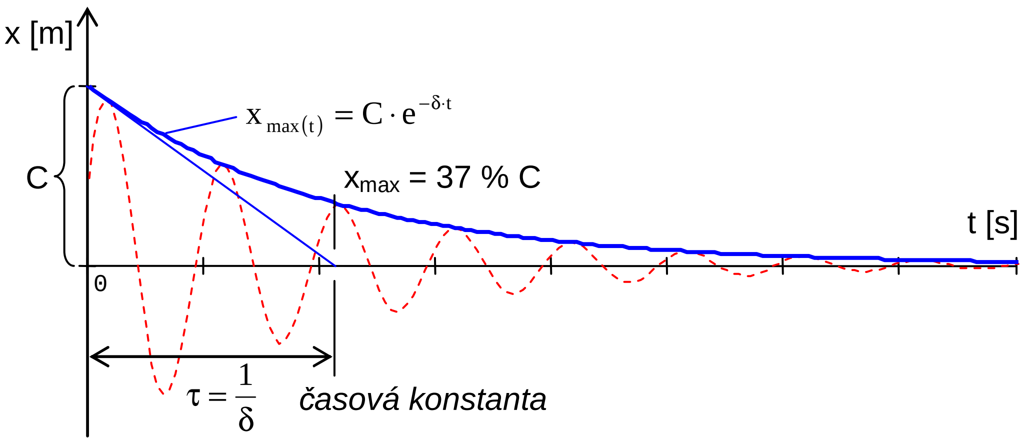
c) Frekvence kmitání se vzhledem k netlumené soustavě snižuje, viz rovnice (1.17), perioda se prodlužuje.

d) Komplexní vektory rychlosti a zrychlení kmitání se pootáčejí o úhly ϕ_v a $\phi_a = 2 \cdot \phi_v$ vzhledem k netlumené soustavě, viz rovnice (1.30) a (1.31).

S ohledem na bod b) vzniká praktická otázka. Za jak dlouho lze kmitání považovat za utlumené ?

Maximální výchylky (lokální maxima) průběhu dle (1.23) klesají exponenciálně (obr. 1.9) :

$$x_{max\_(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \tag{1.32}$$



Obr. 1.9 - Exponenciální pokles maximálních výchylek.

První časová derivace funkce (1.32) je :

$$\left(x_{max\_(t)}\right)^{\bullet} = \left(C \cdot e^{-\delta \cdot t}\right)^{\bullet} = -C \cdot \delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \tag{1.33}$$

což v čase t = 0 je :

$$\left(x_{max\_(t=0)}\right)^{\bullet} = -C \cdot \delta \cdot e^{0} = -C \cdot \delta = -\frac{C}{\tau} \tag{1.34}$$

kde :

$$\tau = \frac{1}{\delta} \tag{1.35}$$

je tzv. <u>časová konstanta</u> [s]. Jestliže v počátku (t = 0) sestrojíme tečnu funkce (1.32), pak tato tečna vytíná na časové ose úsek délky τ.

Hodnota x_{max} v čase $t = \tau$ je :

$$x_{max\_(t=\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot \tau} = C \cdot e^{-\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-1} = 0{,}37 \cdot C$$

V čase $t = \tau$ hodnota maximální výchylky x_{max} klesá na 37% původní hodnoty. Podobně :

$t = \tau$	$x_{max\_(t=\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot \tau} = C \cdot e^{-\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-1} = 0{,}37 \cdot C$	x_{max} = 37% C
$t = 2 \cdot \tau$	$x_{max\_(t=2\cdot\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot 2 \cdot \tau} = C \cdot e^{-2\cdot\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-2} = 0{,}14 \cdot C$	x_{max} = 14% C
$t = 3 \cdot \tau$	$x_{max\_(t=3\cdot\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot 3 \cdot \tau} = C \cdot e^{-3\cdot\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-3} = 0{,}05 \cdot C$	x_{max} = 5% C
$t = 4 \cdot \tau$	$x_{max\_(t=4\cdot\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot 4 \cdot \tau} = C \cdot e^{-4\cdot\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-4} = 0{,}02 \cdot C$	x_{max} = 2% C
$t = 5 \cdot \tau$	$x_{max\_(t=5\cdot\tau)} = C \cdot e^{-\delta \cdot 5 \cdot \tau} = C \cdot e^{-5\cdot\frac{\delta}{\delta}} = C \cdot e^{-5} = 0{,}007 \cdot C$	x_{max} = 0,7% C

Chceme-li tedy dostat prakticky použitelnou odpověď na otázku „kdy se kmitání utlumí“, musíme nejprve odpovědět na otázku „jak velká zbytková hodnota výchylky je již zanedbatelná“. Např. při menších požadavcích na přesnost je 5% zbytková hodnota zanedbatelná, pak můžeme říci, že kmitání se prakticky utlumí v čase $t = 3 \cdot \tau$. Při vyšších nárocích na přesnost můžeme požadovat pokles maximální výchylky pod 1% původní hodnoty, pak můžeme říci, že kmitání se prakticky utlumí v čase $t = 5 \cdot \tau$, apod.

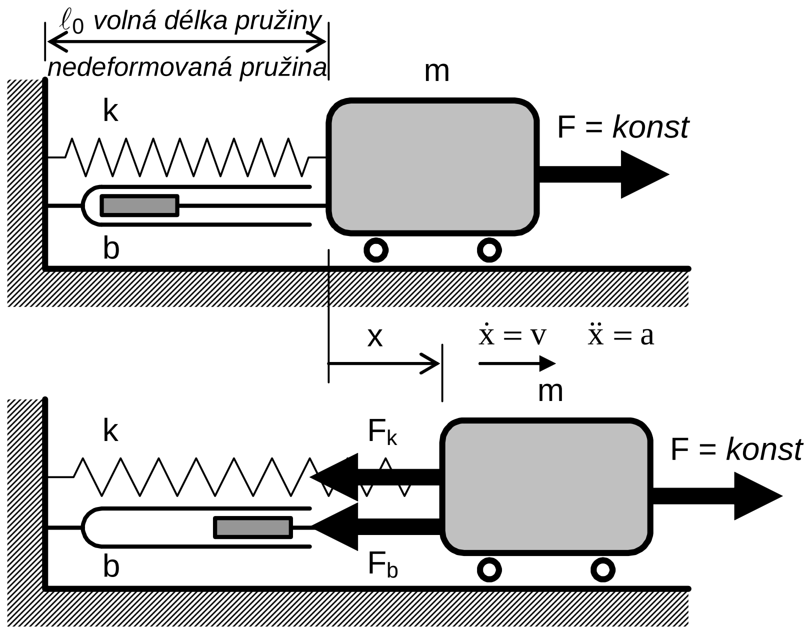
1.1.3. Kmitání při současném působení konstantní síly

Uvažujme těleso o hmotnosti m, vázané k rámu pružnou vazbou o tuhosti k a tlumící vazbou o součiniteli tlumení b, na něž působí konstantní vnější síla F (nejčastěji se jedná o tíhovou sílu, to však není podmínkou).

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F \qquad (1.36)$$

(Dodejme že poloha x = 0 odpovídá volné délce pružiny, tedy stavu nedeformované pružiny.)



Obr. 1.10 - Model mechanické kmitající soustavy s konstantní vnější silou.

Řešení pohybové rovnice (1.36) bude superpozicí tzv. homogenního a partikulárního řešení :

$$x_{(t)} = x_{hom} + x_{part}$$

Homogenní řešení, viz (1.23), časový průběh na obr. 1.6 :

$$x_{hom} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

je řešení homogenní pohybové rovnice (1.14) s nulovou pravou stranou.

Partikulární řešení odráží skutečnost že pravá strana pohybové rovnice (1.36) není nulová. Lze tedy předpokládat že partikulární řešení bude mít stejný charakter jako pravá strana pohybové rovnice. Bude-li na pravé straně pohybové rovnice konstanta, bude i partikulární řešení konstanta :

$$x_{part} = konst$$

První a druhá derivace partikulárního řešení jsou nulové :

$$\dot{x}_{part} = 0$$
$$\ddot{x}_{part} = 0$$

Po dosazení do pohybové rovnice (1.36) dostáváme :

$$m \cdot 0 + b \cdot 0 + k \cdot x_{part} = F$$

a partikulární řešení tedy je :

$$x_{part} = \frac{F}{k}$$

Tuto hodnotu obvykle nazýváme statickou deformací, neboť představuje konstantní prodloužení pružiny způsobené konstantní silou.

Úplné řešení pohybové rovnice (1.36) tedy je :

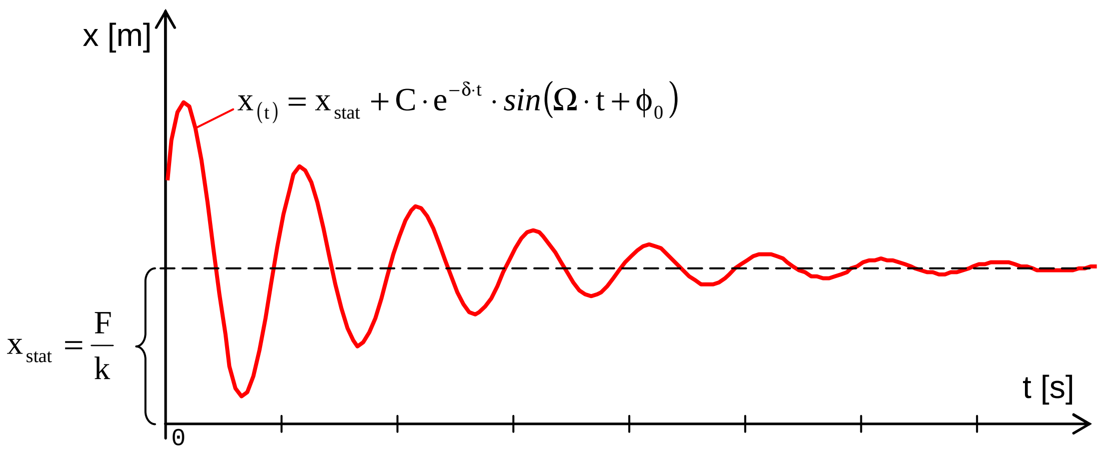
$$x_{(t)} = x_{stat} + C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0) \tag{1.37}$$

kde

$$x_{stat} = \frac{F}{k} \tag{1.38}$$

je tzv. statická deformace. (Připomeňme ještě jednou že poloha x = 0 odpovídá volné délce pružiny, tedy stavu nedeformované pružiny.)

Časový průběh řešení je na obr. 1.11. Soustava se na počátku rozkmitá (integrační konstanty homogenního řešení C a ϕ_0 vypočteme z počátečních podmínek viz kap. 1.1.2.), kmitání se však postupně utlumí a výchylka se limitně blíží k hodnotě statické deformace.

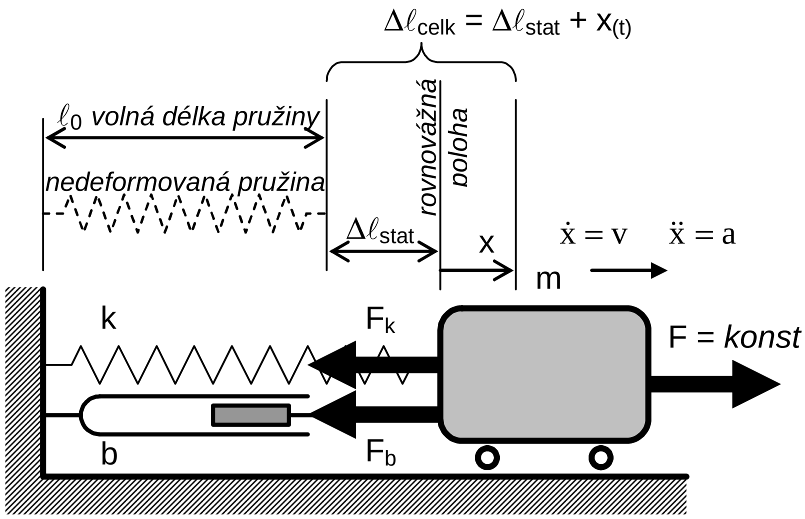


Obr. 1.11 - Časový průběh výchylky.

Tento postup (superpozice homogenního a partikulárního řešení) má výrazně matematický charakter. Ke stejnému závěru však dospějeme i na základě fyzikální úvahy.

Posuňme počátek souřadného systému (poloha x = 0, tzv. rovnovážná poloha) do polohy dané statickou deformací :

$$\Delta\ell_{stat} = \frac{F}{k} \tag{1.39}$$



Obr. 1.12 - Model mechanické kmitající soustavy s konstantní vnější silou, posunutý počátek souřadného systému.

Pohybová rovnice bude :

$$m \cdot a = \sum_i F_i = F - F_k - F_b$$

kde $F_b = b \cdot v$ je tlumící síla, viz též (1.13) a $F_k = k \cdot \Delta\ell_{celk}$ je direkční síla pružiny, viz též (1.1). Celkové prodloužení pružiny pak můžeme vyjádřit jako součet statické deformace a posunutí při kmitání :

$$\Delta\ell_{celk} = \Delta\ell_{stat} + x_{(t)} \tag{1.40}$$

Pohybová rovnice pak bude :

$$m \cdot \ddot{x} = F - b \cdot \dot{x} - k \cdot \Delta\ell_{celk} = F - b \cdot \dot{x} - k \cdot \left(\Delta\ell_{stat} + x_{(t)}\right)$$

Po roznásobení závorky a převedení členů s x na levou stranu bude pohybová rovnice :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F - k \cdot \Delta\ell_{stat}$$

Uvážíme-li dále (1.39), je zřejmé, že pravá strana je nulová a pohybová rovnice bude shodná s (1.14) :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

I její řešení tedy bude shodné, viz (1.23), graf viz obr. 1.6 :

$$x_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

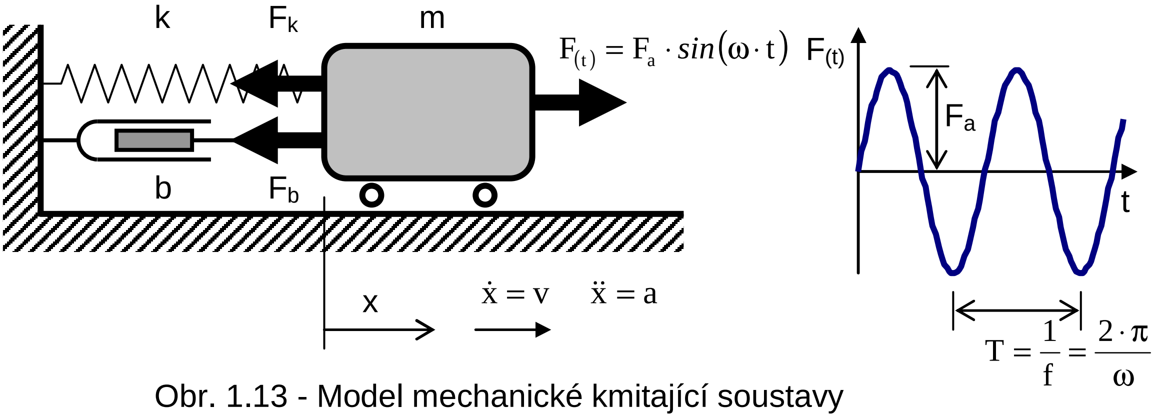
(Zdůrazněme zde ještě jednou, že v tomto případě poloha x = 0, tzv. rovnovážná poloha, odpovídá statické deformaci pružiny vlivem síly F.)

Výše uvedené lze shrnout do tří poznámek :

1. Kmitání při působení konstantní síly (jeho frekvenci, amplitudu a fázový posuv) řešíme „*jako by tato síla nepůsobila*“ (v pohybové rovnici již síla F nefiguruje).
2. Rovnovážná poloha, poloha x = 0, okolo níž nastává symetrické kmitání, není dána volnou délkou pružiny, ale statickou deformací (1.39).
3. Celkové zatížení pružiny je dáno součtem statické (konstantní) složky ($F_{stat} = k \cdot \Delta\ell_{stat}$ - tzv. statické předpětí) a dynamické (proměnné) složky ($F_{dyn\,(t)} = k \cdot x_{(t)} = k \cdot C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$).

1.1.4. Kmitání vynucené budící silou harmonického průběhu

Mechanický model kmitání vynuceného harmonicky proměnnou budící silou je na obr. 1.13.



Obr. 1.13 - Model mechanické kmitající soustavy buzené harmonicky proměnnou budící silou.

Harmonický časový průběh budící síly je :

$$F_{(t)} = F_a \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad (1.41)$$

kde F_a - amplituda budící síly [N],

ω - kruhová frekvence budící síly [s^{-1}].

Poznámka : Obecnější tvar harmonické funkce je s fázovým posuvem : $F_{(t)} = F_a \cdot sin(\omega t + \phi_F)$.
V tomto textu však fázový posuv nebude uvažován protože to není nezbytné.

Samozřejmě dále pak :

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

je <u>frekvence budící síly</u> [Hz ≡ s^{-1}] (počet změn budící síly z kladné na zápornou a zpět za sekundu) a

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

je <u>perioda budící síly</u> [s] (doba jedné změny).

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_{(t)} = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{1.42}$$

nebo :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0{}^2 \cdot x = \frac{F_a}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{1.43}$$

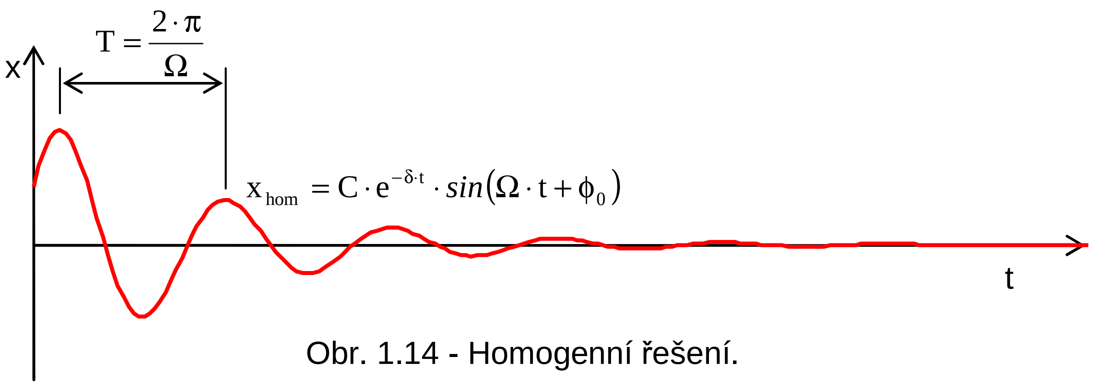
Pohybová rovnice je obyčejná diferenciální rovnice II. řádu s konstantními koeficienty, nehomogenní. Její řešení hledáme ve tvaru superpozice homogenního a partikulárního řešení :

$$x_{(t)} = x_{hom} + x_{part} \tag{1.44}$$

<u>Homogenní řešení</u>, viz (1.23), časový průběh viz obr. 1.6 a 1.14,

$$x_{hom} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

je řešení pohybové rovnice s nulovou pravou stranou (1.14) - <u>vlastní kmitání</u>. (Určení parametrů - jak vlastní kruhové frekvence Ω a konstanty doznívání δ, tak integračních konstant C a ϕ_0 viz kapitola 1.1.2.)



Obr. 1.14 - Homogenní řešení.

Partikulární řešení, které představuje ustálené vynucené kmitání (odezva soustavy na budící sílu), má tvar shodný s pravou stranou pohybové rovnice (1.42), tedy harmonický průběh s kruhovou frekvencí budící síly :

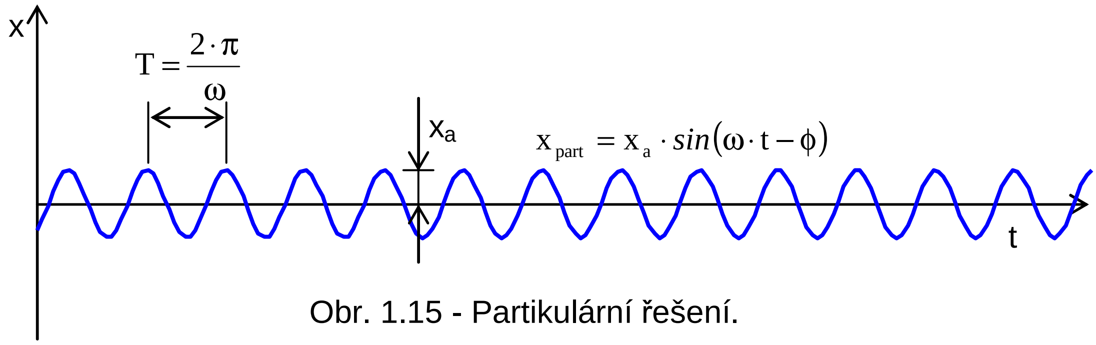
$$x_{part} = x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi) \tag{1.45}$$

kde x_a - amplituda odezvy [m],

ω - kruhová frekvence odezvy (shodná s kruhovou frekvencí budící síly) [s^{-1}],

ϕ - fázový posuv (fázové zpoždění) [rad].

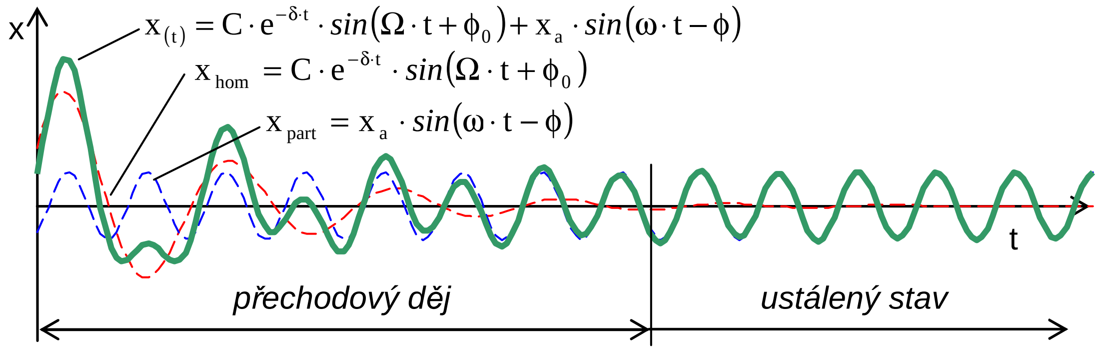
Časový průběh partikulárního řešení je na obr. 1.15.



Obr. 1.15 - Partikulární řešení.

Celkové řešení (časový průběh na obr. 1.16) v souladu s (1.44) tedy je :

$$x_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0) + x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi) \tag{1.46}$$



Obr. 1.16 - Celkové řešení.

Z grafu na obr. 1.16 je zřejmé, že časový průběh lze rozdělit do dvou úseků :

Přechodový děj je superpozicí obou složek - homogenního i partikulárního řešení. Jde o komplikovanou křivku, superpozici dvou harmonických průběhů o různých frekvencích. Přechodový děj končí utlumením homogenní složky (vlastní tlumené kmitání, viz řešení v závěru kapitoly 1.1.2).

Ustálený stav (ustálené vynucené kmitání) následuje po utlumení vlastního kmitání. Je charakterizován již jen partikulárním řešením. Jde o harmonické kmitání s frekvencí budící síly, nazýváme je ustáleným vynuceným kmitáním. Trvá do nekonečna, resp. pokud působí budící síla.

V dalším výkladu se zaměříme na ustálené kmitání, tedy na partikulární řešení. Partikulární řešení (1.45) včetně jeho derivací :

$$\dot{x}_{part} = x_a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$
$$\ddot{x}_{part} = -x_a \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)$$

musí přirozeně splňovat pohybovou rovnici (1.42), tedy :

$$m \cdot \left[- x_a \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)\right] + b \cdot \left[x_a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)\right] + k \cdot \left[x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)\right] = F_a \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Použijeme-li součtové vzorce :

$$sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$$
$$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

pak po roznásobení závorek a vytknutí členů $sin(\omega \cdot t)$ a $cos(\omega \cdot t)$ dostáváme :

$$\left(- m \cdot x_a \cdot \omega^2 \cdot cos\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot sin\,\phi + k \cdot x_a \cdot cos\,\phi\right) \cdot sin(\omega \cdot t) +$$
$$+ \left(m \cdot x_a \cdot \omega^2 \cdot sin\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot cos\,\phi - k \cdot x_a \cdot sin\,\phi\right) \cdot cos(\omega \cdot t) = F_a \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Z porovnání sinových a kosinových členů na obou stranách rovnice vyplývá :

$$- m \cdot x_a \cdot \omega^2 \cdot cos\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot sin\,\phi + k \cdot x_a \cdot cos\,\phi = F_a$$
$$m \cdot x_a \cdot \omega^2 \cdot sin\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot cos\,\phi - k \cdot x_a \cdot sin\,\phi = 0$$

neboli :

$$\left(k - m \cdot \omega^2\right) \cdot x_a \cdot cos\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot sin\,\phi = F_a$$
$$- \left(k - m \cdot \omega^2\right) \cdot x_a \cdot sin\,\phi + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot cos\,\phi = 0$$

Z druhé rovnice přímo vyplývá <u>fázový posuv</u> ϕ :

$$tan\,\phi = \frac{b \cdot \omega}{k - m \cdot \omega^2}$$

neboli, po vydělení čitatele i jmenovatele m a po použití (1.4) a (1.16), :

$$tan\,\phi = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{{\Omega_0}^2 - \omega^2} \tag{1.47}$$

Z první rovnice, použijeme-li :

$$sin\,\phi = \frac{tan\,\phi}{\sqrt{1 + tan^2\,\phi}} \qquad \text{a} \qquad cos\,\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + tan^2\,\phi}}$$

vyjádříme amplitudu vynuceného kmitání x_a :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + \left(2 \cdot \delta \cdot \omega\right)^2}} \tag{1.48}$$

Zavedeme-li dále bezrozměrné koeficienty činitel naladění :

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0} \tag{1.49}$$

a již výše definovaný poměrný útlum (1.28) :

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

můžeme výrazy pro amplitudu a fázový posuv upravit :

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} \tag{1.50}$$

$$tan\,\phi = \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2} \tag{1.51}$$

V (1.50) je tzv. statická deformace :

$$x_{stat} = \frac{F_a}{k} \tag{1.52}$$

tedy deformace pružiny o tuhosti k vlivem konstantní síly velikosti F_a.

Poznámka : Amplituda odezvy x_a nevyžaduje žádný další komentář jak z hlediska numerického výpočtu dle vztahů (1.48) nebo (1.50), tak z hlediska fyzikálního významu (maximální výchylka).

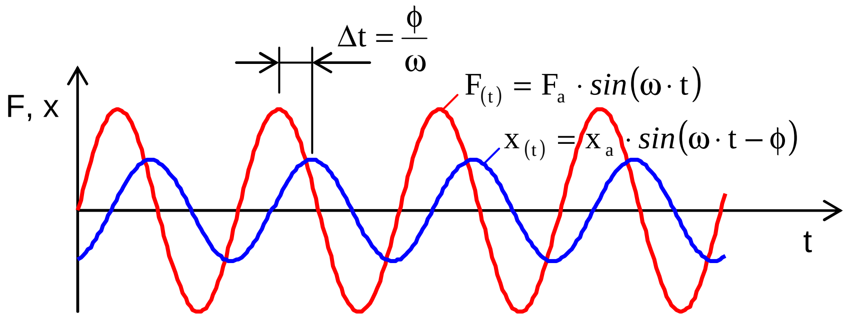
Fázový posuv vypočteme ze vztahů (1.47) nebo (1.51). V uvedených výrazech je čitatel ($2\cdot\delta\cdot\omega$ nebo $2\cdot\xi\cdot\eta$) vždy kladný, jmenovatel ($\Omega_0^2-\omega^2$ nebo $1-\eta^2$) může být kladný nebo záporný. To znamená že fázový posuv bude v intervalu $\langle 0,\pi\rangle$, viz též komentář k funkci arctan v kapitole 1.1.1.

Je-li $\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$, je fázový posuv $\phi \in \langle 0, \pi/2\rangle$, shodně s kalkulačkou.

Je-li $\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$, je fázový posuv $\phi \in \langle \pi/2, \pi\rangle$, kalkulačka však vrátí hodnotu v intervalu $\phi \in \langle -\pi/2, 0\rangle$. Řešitel sám musí k výsledku přičíst π.

Fyzikální význam fázového posuvu je časové zpoždění. Maximum výchylky nastává vždy o něco později než maximum budící síly. Toto časové zpoždění je :

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} \tag{1.53}$$



Obr. 1.17 - Zpoždění odezvy vůči budící síle.

Poznámka : Pro netlumené kmitání platí $\delta = 0$ resp. $\xi = 0$, přesněji $\delta \to 0$ resp. $\xi \to 0$. Pak amplituda odezvy je :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\left|\Omega_0^{\,2} - \omega^2\right|} \qquad \textit{resp.} \qquad x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\left|1 - \eta^2\right|} \tag{1.54}$$

a fázový posuv je :

$$\phi = arctan\, 0$$

Je-li $\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$, je fázový posuv $\phi = 0$,

je-li $\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$, je fázový posuv $\phi = 180° = \pi$ rad.

Interpretace fázového posuvu $\phi = 0$ je triviální. Výchylka nabývá svého maxima právě v okamžiku kdy i síla je maximální. Interpretace fázového posuvu $\phi = 180° = \pi$ rad je méně triviální. Soustava kmitá v protifázi. Výchylka nabývá svého maxima právě v okamžiku kdy i síla je maximální, ovšem na opačnou stranu. V okamžiku, kdy síla je maximální vlevo, výchylka je maximální vpravo a naopak.

Stejné interpretace dosáhneme budeme-li a priori uvažovat fázový posuv $\phi = 0$ a pro amplitudu použijeme vztah (1.54) bez absolutní hodnoty :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\Omega_0^{\,2} - \omega^2} \qquad \textit{resp.} \qquad x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2}$$

Je-li $\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$, je amplituda kladná, tedy kmitání ve stejné fázi (maximální síla i maximální výchylka na stejnou stranu).

Je-li $\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$, je amplituda záporná, tedy kmitání v protifázi (maximální výchylka na opačnou stranu než maximální síla).

Řešení v oboru komplexních čísel.

Komplexní tvar budící síly je :

$$\tilde{F} = F_a \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \tag{1.55}$$

kde F_a - amplituda budící síly [N],

ω - kruhová frekvence budící síly [s^{-1}],

i - imaginární jednotka.

Nechť je budící síla dána imaginární složkou komplexního vektoru :

$$F_{(t)} = Im\left\{F_a \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right\} = Im\left\{F_a \cdot \left[cos(\omega\cdot t) + i\cdot sin(\omega\cdot t)\right]\right\} = F_a \cdot sin(\omega\cdot t) \tag{1.56}$$

Řešení pohybové rovnice (1.42) nebo (1.43) v komplexním tvaru je :

$$\tilde{x} = \tilde{x}_a \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \tag{1.57}$$

kde :

$$\tilde{x}_a = x_a \cdot e^{i\cdot\phi} \tag{1.58}$$

je komplexní amplituda.

Po dosazení do pohybové rovnice (1.43) bude :

$$\tilde{x}_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\Omega_0{}^2 - \omega^2 + i\cdot 2\cdot\delta\cdot\omega} \tag{1.59}$$

dále po vytknutí Ω_0^2 ve jmenovateli a po dosazení (1.4) bude :

$$\tilde{x}_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + i\cdot 2\cdot\frac{\delta}{\Omega_0}\cdot\frac{\omega}{\Omega_0}} \tag{1.60}$$

nebo :

$$\tilde{x}_a = x_{stat} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2 + i\cdot 2\cdot\xi\cdot\eta} \tag{1.61}$$

kde :

$$x_{stat} = \frac{F_a}{k}$$

je statická výchylka, viz (1.52),

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

je <u>činitel naladění</u>, viz (1.49) a

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

je <u>poměrný útlum</u>, viz (1.28).

Dále :

$$\tilde{x} = \tilde{x}_a \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{1-\eta^2 + i\cdot 2\cdot\xi\cdot\eta} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \tilde{H}_{(\eta)} \cdot \tilde{F} \tag{1.62}$$

kde :

$$\tilde{H}_{(\eta)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-\eta^2 + i\cdot 2\cdot\xi\cdot\eta} \tag{1.63}$$

je <u>komplexní přenosová funkce</u> a :

$$\tilde{F} = F_a \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

je <u>komplexní tvar budící síly</u>, viz (1.55).

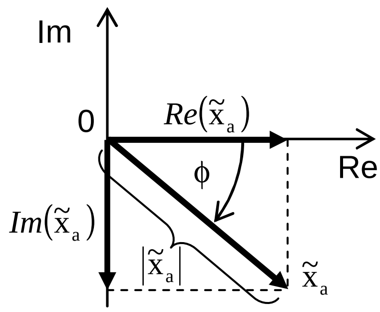
Komplexní amplituda pak dle (1.61) je :

$$\tilde{x}_a = x_{stat} \cdot \frac{1}{1-\eta^2 + i\cdot 2\cdot\xi\cdot\eta} = x_{stat} \cdot \left[\frac{1-\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\cdot\xi\cdot\eta\right)^2} - \frac{i\cdot 2\cdot\xi\cdot\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\cdot\xi\cdot\eta\right)^2} \right] \tag{1.64}$$

její reálná a imaginární složka jsou :

$$Re(\tilde{x}_a) = x_{stat} \cdot \frac{1-\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\cdot\xi\cdot\eta\right)^2} \qquad Im(\tilde{x}_a) = x_{stat} \cdot \frac{-2\cdot\xi\cdot\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2\cdot\xi\cdot\eta\right)^2} \tag{1.65}$$

Znázornění v komplexní rovině je uvedeno na obr. 1.18.



Obr. 1.18 - Komplexní amplituda v komplexní rovině.

Amplituda, viz též (1.48) nebo (1.50), pak je :

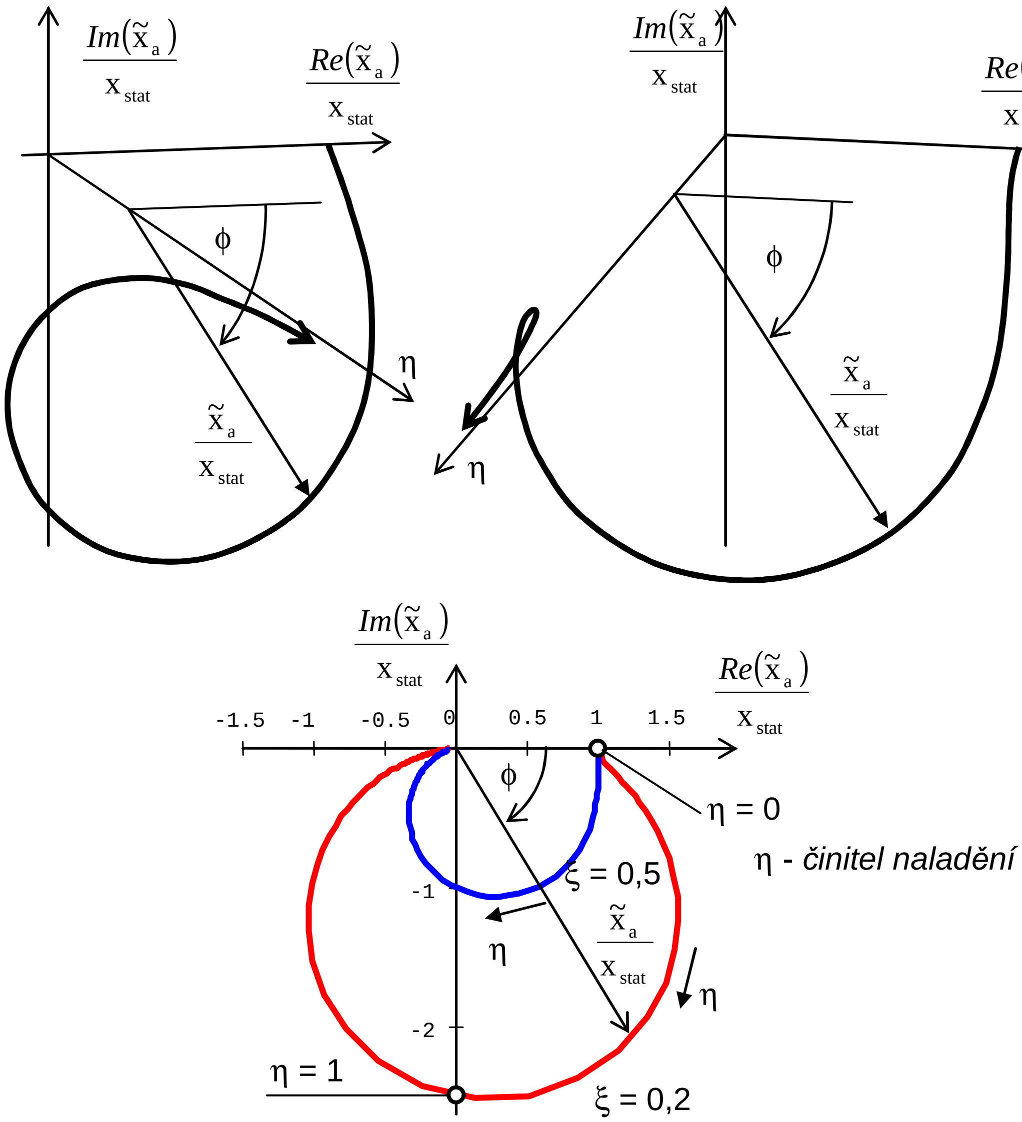
$$x_a = |\tilde{x}_a| = \sqrt{(Re(\tilde{x}_a))^2 + (Im(\tilde{x}_a))^2} = \ldots = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}} \tag{1.66}$$

fázový posuv, viz též (1.47) nebo (1.51), je :

$$\phi = arctan\frac{Re(\tilde{x}_a)}{Im(\tilde{x}_a)} = arctan\frac{2\cdot\xi\cdot\eta}{1-\eta^2} \tag{1.67}$$

Dynamické zesílení (nebo přenosová funkce nebo faktor zesílení) :

$$\zeta = \frac{x_a}{x_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}} = |\tilde{H}_{(\eta)}| \cdot k \tag{1.68}$$



Obr. 1.19 - Frekvenční charakteristika komplexní přenosové funkce.
Amplitudo - fázová charakteristika (Nyquistův diagram).

Je-li řešení v komplexním oboru dle (1.57) :

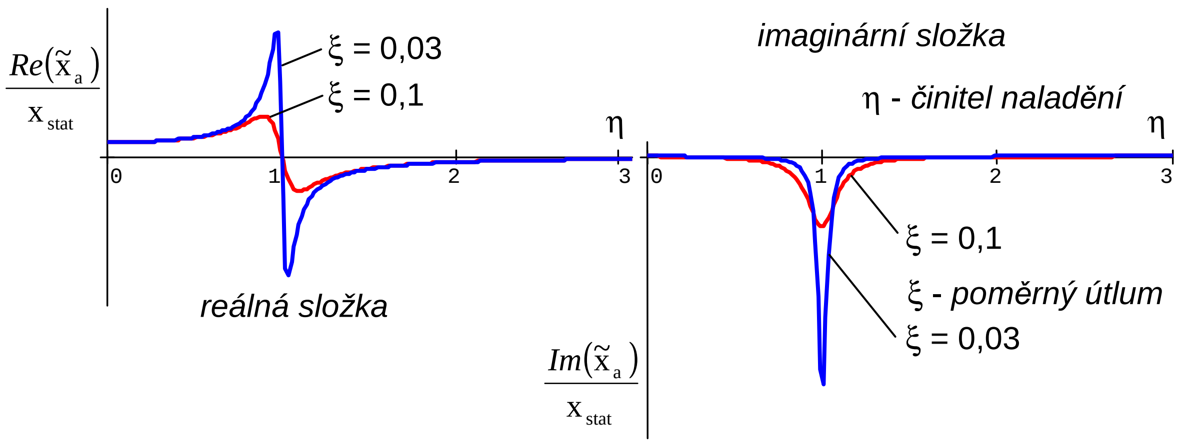
$$\tilde{x} = x_a \cdot e^{-i\cdot\phi} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = x_a \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t-\phi)} \tag{1.69}$$

pak časový průběh výchylky je reprezentován imaginární složkou komplexního vektoru :

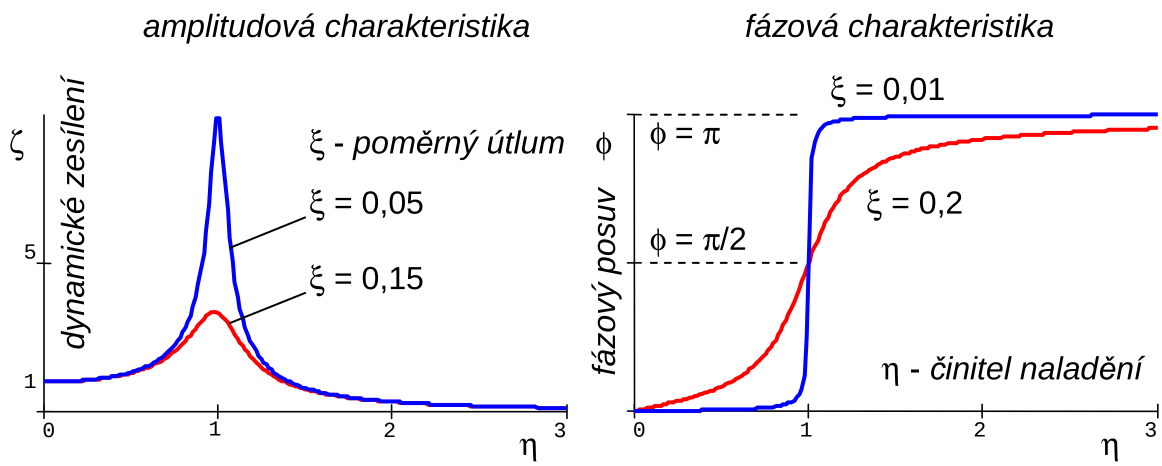
$$x_{(t)} = Im(\tilde{x}) = x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi) \tag{1.70}$$

shodně s 1.45.

Grafická znázornění odvozených závislostí se nazývají frekvenční charakteristiky. Nejčastěji používané frekvenční charakteristiky jsou zakresleny na obr. 1.19 až 1.21.



Obr. 1.20 - Frekvenční charakteristika - reálná a imaginární složka.



Obr. 1.21 - Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika.

Pro netlumenou soustavu (ξ = 0) bude z rovnice (1.68) dynamické zesílení :

$$\zeta = \frac{x_a}{x_{stat}} = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} \tag{1.71}$$

a z rovnice (1.67) fázový posuv :

$$\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \pi = 180° \end{matrix} \quad \text{pro} \quad \begin{matrix} \eta < 1 \\ \eta > 1 \end{matrix} \tag{1.72}$$

Pak pro $\eta = 1$ ($\omega = \Omega_0$) bude amplituda narůstat nade všechny meze ($x_a \rightarrow \infty$) a fázový posuv bude $\phi = \pi/2 = 90°$. Tento jev nazýváme rezonance. Pro většinu strojních zařízení je to jev nežádoucí, ve výjimečných případech (resonanční třídič) se ho využívá pro dosažení maximální efektivity činnosti zařízení. U tlumené soustavy dosahuje amplituda v resonanci konečné, avšak extrémně vysoké hodnoty.

Řešení ustáleného vynuceného kmitání můžeme analyzovat jako vztah mezi příčinami a jejich následky :

příčina	následek
budící síla	odezva soustavy
$F_{(t)} = F_a \cdot sin(\omega \cdot t)$	$x_{(t)} = x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)$
parametry budící síly :	parametry odezvy :
F_a, ω	x_a, ϕ
	(frekvenci nepovažujeme za parametr odezvy, neboť je shodná s frekvencí budící síly)

Analyzujeme tedy závislost amplitudy odezvy x_a, (1.48) nebo (1.50), a její fázového posuvu ϕ, (1.47) nebo (1.51), na amplitudě budící síly F_a a její frekvenci, resp. kruhové frekvenci ω, resp. činiteli naladění η.

Závislost na amplitudě budící síly F_a je jednoduchá až triviální. Amplituda odezvy x_a je lineárně (přímo úměrně) závislá, fázový posuv ϕ není vůbec závislý.

Závislosti amplitudy a fázového posuvu na frekvenci budící síly, tzv. amplitudová a fázová charakteristika, jsou podstatně zajímavější.

Amplitudová charakteristika

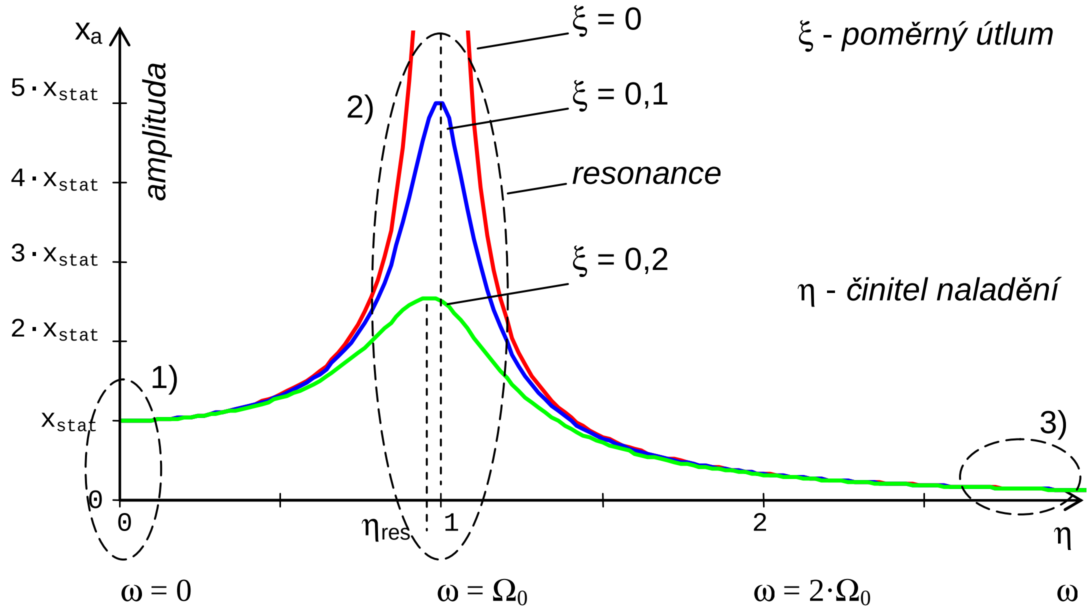
Viz obr. 1.22, daná rovnicí (1.50) nebo (1.66) :

$$x_a = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}}$$

Významné poznatky :

1) Pro $\eta = 0$ ($\omega = 0$) je $x_a = x_{stat}$. Nulová hodnota frekvence budící síly odpovídá konstantní budící síle. Pak je přirozené, že výchylka je rovna statické výchylce.

2) Pro $\eta = 1$ ($\omega = \Omega_0$) nastává resonance. Pro netlumené kmitání ($\xi = 0$) amplituda narůstá nade všechny meze. Pro tlumené kmitání ($\xi > 0$) amplituda dosahuje konečných, avšak velmi vysokých hodnot.



Obr. 1.22 - Amplitudová charakteristika.

3) Pro $\eta \gg 1$ ($\omega \gg \Omega_0$) je amplituda velmi malá ($x_a \ll x_{stat}$), asymptoticky se blíží k nule.

$$\lim_{\eta\to\infty} x_a = \lim_{\eta\to\infty}\left(x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}} \right) = 0$$

Poznámka : Při rozboru průběhu amplitudové charakteristiky si uvědomíme, že při proměnné budící frekvenci ω, resp. proměnném činiteli naladění η, zůstává amplituda budící síly F_a neměnná F_a = konst. Připomeneme si to v následující kapitole o buzení rotující hmotou, kde bude situace odlišná.

Resonance je velmi důležitý jev. Proto se jím budeme zabývat podrobněji.

Tlumení se projeví především snížením amplitudy. Druhým, méně zřetelným efektem tlumení je posunutí tzv. resonančního naladění k hodnotám menším než 1. Pro maximum amplitudové charakteristiky platí :

$$\frac{dx_a}{d\eta} = \frac{d\left(x_{stat} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}\right)}{d\eta} = 0$$

Vzhledem k tomu, že proměnná η se nachází pouze pod odmocninou, stačí hledat minimum výrazu pod odmocninou :

$$\frac{d\left[\left(1-\eta^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2\right]}{d\eta} = 0$$

neboli :

$$2 \cdot \left(1-\eta^2\right) \cdot (-2 \cdot \eta) + 4 \cdot \xi^2 \cdot 2 \cdot \eta = 0$$

$$4 \cdot \eta^3 - 4 \cdot \left(1 - 2 \cdot \xi^2\right) \cdot \eta = 0$$

$$\eta^2 = 1 - 2 \cdot \xi^2$$

Resonanční činitel naladění (maximální amplituda) tedy je :

$$\eta_{res} = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \tag{1.73}$$

Resonanční naladění je tedy poněkud menší než 1.

Hodnota amplitudy v resonanci (maximální amplitudy) je :

$$x_{a\_max} = x_{a\_(\eta=\eta res)} = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta_{res}{}^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta_{res})^2}}$$

$$= x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(1-2 \cdot \xi^2\right)\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1-2 \cdot \xi^2}\right)^2}}$$

$$= x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \xi^2\right)}}$$

$$= x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \xi^4 + 4 \cdot \xi^2 - 8 \cdot \xi^4}}$$

Resonanční amplituda tedy je :

$$x_{a\_max} = x_{stat} \cdot \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \tag{1.74}$$

Poznámka : Resonance nás zajímá spíš jako jistý (byť úzký) interval naladění, než pouze skutečné maximum amplitudové charakteristiky. Z tohoto pohledu výrazy (1.73) a (1.74) nejsou zvláště důležité.

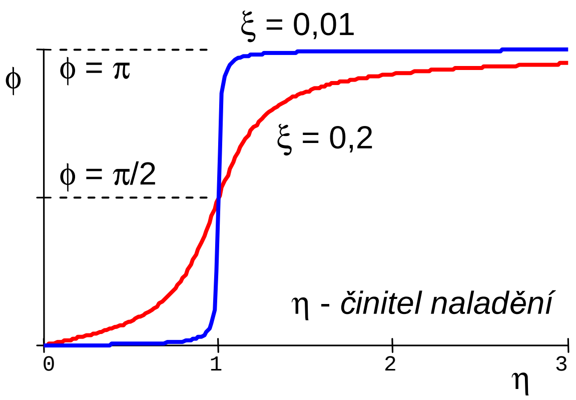
Resonanci pak specifikujeme takto :

Resonance nastává když budící frekvence <u>je blízká</u> vlastní frekvenci ($\omega \cong \Omega_0$), činitel naladění <u>je blízký</u> jedné ($\eta \cong 1$).

Resonance se projevuje vysokou amplitudou a to i při poměrně nízké hodnotě amplitudy budící síly.

<u>Fázová charakteristika</u>

Viz obr. 1.21, daná (1.47), resp. (1.51).



Fázová charakteristika.

Pro netlumené kmitání ($\delta \rightarrow 0$, resp. $\xi \rightarrow 0$) se průběh z hodnoty $\phi = 0$ mění v resonanci ($\omega = \Omega_0$, resp. $\eta = 1$) skokem na hodnotu $\phi = \pi$. Pro tlumené kmitání je průběh hladký z hodnoty $\phi = 0$ (pro $\omega = 0$, resp. $\eta = 0$) po hodnotu $\phi \rightarrow \pi$ (pro $\omega >> \Omega_0$, resp. $\eta >> 1$). Při průchodu resonancí je hodnota fázového posuvu $\phi = {}^{\pi}/_{2}$. (Tohoto faktu se využívá pro identifikaci resonance měřením fázového posuvu.)

Průběh výchylky v resonanci

Provedeme nyní úplné řešení (1.46) včetně integračních konstant. Tvar :

$$x_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0) + x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)$$

nahradíme tvarem :

$$x_{(t)} = e^{-\delta \cdot t} \cdot [A \cdot cos(\Omega \cdot t) + B \cdot sin(\Omega \cdot t)] + x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi) \qquad (1.75)$$

první derivace pak je :

$$\dot{x}_{(t)} = v_{(t)} = e^{-\delta \cdot t} \cdot [(B \cdot \Omega - A \cdot \delta) \cdot cos(\Omega \cdot t) - (B \cdot \delta + A \cdot \Omega) \cdot sin(\Omega \cdot t)] + x_a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t - \phi)$$

Při počátečních podmínkách : t = 0 ... $x = x_0$, $v = v_0$ platí :

$$x_0 = A + x_a \cdot sin(-\phi)$$
$$v_0 = B \cdot \Omega - A \cdot \delta + x_a \cdot \omega \cdot cos(-\phi)$$

Vzhledem k tomu, že *sin*(-ϕ) = -*sin*(ϕ) a *cos*(-ϕ) = *cos*(ϕ), odvodíme integrační konstanty :

$$A = x_0 + x_a \cdot sin(\phi)$$
$$B = \frac{v_0 + x_0 \cdot \delta + x_a \cdot (\delta \cdot sin\phi - \omega \cdot cos\phi)}{\Omega} \qquad (1.76)$$

Dále pro netlumenou soustavu (δ = 0), pro nulové počáteční podmínky ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$) a v resonanci (ϕ = π/2 = 90º) :

$$A = x_a \qquad\qquad B = 0$$

Časový průběh souřadnice x pak dle (1.75) je :

$$x_{(t)} = x_a \cdot cos(\Omega_0 \cdot t) + x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot \pi)$$

a je-li dále *sin*(ω· t-π/2) = -*cos*(ω· t), pak :

$$x_{(t)} = x_a \cdot (cos(\Omega_0 \cdot t) - cos(\omega \cdot t))$$

Uvážíme-li dále (1.54), pak :

$$x_{(t)} = x_{stat} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^{\ 2}}} \cdot (cos(\Omega_0 \cdot t) - cos(\omega \cdot t))$$

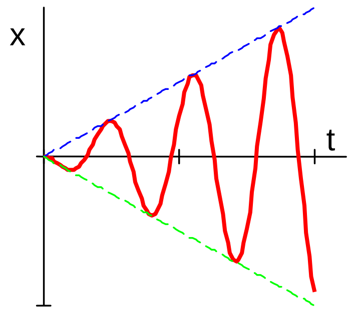
Je-li v resonanci $\omega = \Omega_0$, pak řešení je dáno limitou :

$$x_{(t)} = \lim_{\omega \to \Omega 0} \left(x_{stat} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0{}^2}} \cdot \left(cos(\Omega_0 \cdot t) - cos(\omega \cdot t) \right) \right) = \ldots$$

a konečně :

$$x_{(t)} = -\tfrac{1}{2} \cdot x_{stat} \cdot \Omega_0 \cdot t \cdot sin(\Omega_0 \cdot t) \qquad (1.77)$$

Výchylka při resonanci roste s časem lineárně do nekonečna (viz graf na obr. 1.23).



Obr. 1.23 - Přechodový děj, netlumená resonance.

Pro málo tlumenou soustavu uvažujeme $\xi << 1$:

Resonanční naladění :

$$\omega \cong \Omega \cong \Omega_0$$

Hodnota resonanční amplitudy, viz (1.74), pro $\xi << 1$ je přibližně :

$$x_a = x_{stat} \cdot \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \cong \frac{x_{stat}}{2 \cdot \xi}$$

Integrační konstanty, viz (1.76) jsou :

$$A = x_a = \frac{x_{stat}}{2 \cdot \xi}$$

$$B = \frac{x_a \cdot \delta}{\Omega} = \frac{x_{stat}}{2}$$

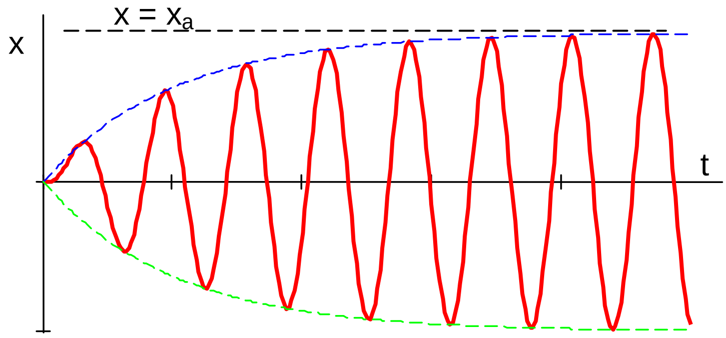
a konečně časový průběh souřadnice x dle (1.75) je :

$$x_{(t)} = x_{stat} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \xi} \cdot cos(\Omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot sin(\Omega \cdot t) \right] - \frac{x_{stat}}{2 \cdot \xi} \cdot cos(\omega \cdot t)$$

neboli :

$$x_{(t)} = \frac{x_{stat}}{2\cdot\xi}\cdot\left[\xi\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot sin(\Omega\cdot t) - \left(1-e^{-\delta\cdot t}\right)\cdot cos(\Omega\cdot t)\right] \tag{1.78}$$

viz graf na obr. 1.24.



Obr. 1.24 - Přechodový děj, tlumená resonance.

Výchylka při rezonanci roste exponenciálně a blíží se asymptoticky ustálené hodnotě amplitudy :

$$x_a \cong \frac{x_{stat}}{2\cdot\xi}$$

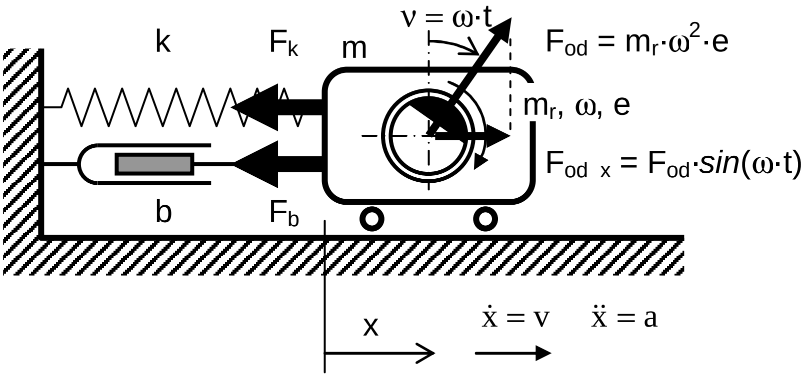
Poznámka : Pro malé tlumení (ξ << 1) lze obálku průběhu vyjádřit přibližně jako :

$$x_{obalka\_(t)} \cong \frac{x_{stat}}{2\cdot\xi}\cdot\left(1-e^{-\delta\cdot t}\right)$$

O tom, za jak dlouho dojde k ustálení, vypovídá analýza funkce $e^{-\delta t}$ a zejména pak časová konstanta $\tau = {}^{1}/_{\delta}$, viz závěr kapitoly 1.1.2.

1.1.5. Kmitání buzené rotující hmotou

Mechanický model soustavy buzené rotující hmotou je na obr. 1.25. Kromě břemene o celkové hmotnosti m, pružiny o tuhosti k a tlumícího členu o součiniteli tlumení b je charakterizován rotující nevyváženou hmotou m_r, rotující otáčkami n, s úhlovou rychlostí ω. Nevývažek je pak ještě charakterizován excentricitou e, tedy vzdáleností těžiště nevývažku od osy rotace.



Obr. 1.25 - Model mechanické kmitající soustavy, buzené rotující hmotou.

Zde m - hmotnost [kg] (hmotnost celého kmitajícího tělesa, včetně rotující části),

k - tuhost pružiny [N/m],

b - součinitel tlumení [$N \cdot s \cdot m^{-1}$],

x - souřadnice, určující polohu tělesa, rovněž pak prodloužení pružiny [m],

m_r - hmotnost rotujícího nevývažku [kg] (hmotnost pouze rotující nevyvážené hmoty),

n - otáčky nevývažku [ot/min],

$\omega = \pi \cdot n/30$ - úhlová rychlost nevývažku [rad/s],

e - excentricita nevývažku [m] (vzdálenost těžiště nevývažku od osy rotace).

Rotací nevyvážené hmoty m_r vzniká odstředivá síla F_{od} :

$$F_{od} = m_r \cdot \omega^2 \cdot e \tag{1.79}$$

Tu lze rozložit na složky ve směru kmitavého pohybu ($F_{od\ x}$) a kolmo ke směru kmitavého pohybu ($F_{od\ y}$). Složka kolmo ke směru kmitavého pohybu se promítne do reakcí v uložení tělesa a na kmitavý pohyb nebude mít vliv. Naopak složka ve směru kmitavého pohybu bude na pravé straně pohybové rovnice. Je-li úhel natočení nevývažku ν (pro rovnoměrnou rotaci konstantními otáčkami) :

$$\nu = \omega \cdot t$$

pak složka odstředivé síly ve směru kmitavého pohybu je :

$$F_{od\_x} = F_{od} \cdot \sin\nu = F_{od} \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{1.80}$$

Pohybová rovnice pak je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_{od} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \tag{1.81}$$

nebo

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^{\ 2} \cdot x = \frac{F_{od}}{m} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \tag{1.82}$$

kde Ω_0 je <u>vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání</u> (1.4), a δ je <u>konstanta doznívání</u> (1.16).

Pohybová rovnice (1.81) resp. (1.82) je shodná s pohybovou rovnicí harmonicky buzeného kmitání (1.42) resp. (1.43). Odstředivá síla F_{od} (1.79) je v pozici amplitudy budící síly, úhlová rychlost rotace nevývažku ω je v pozici kruhové frekvence budící síly. Rovněž řešení pohybové rovnice je shodné, viz (1.44) a následné, zejména pak pro ustálený stav partikulární řešení (1.45) :

$$x_{part} = x_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t - \phi)$$

jehož amplituda (1.48) resp. (1.50) a fázový posuv (1.47) resp. (1.51) jsou :

$$x_a = \frac{F_{od}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}} = \frac{F_{od}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}$$

$$\phi = \mathit{arctan}\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0^{\ 2} - \omega^2} = \mathit{arctan}\frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2}$$

Pro jednorázové řešení pro dané otáčky vystačíme s tímto vyjádřením. Zabýváme-li se však závislostí amplitudy x_a na otáčkách n, resp. na úhlové rychlosti nevývažku ω, viz amplitudová charakteristika (obr. 1.22), musíme vzít v úvahu že velikost odstředivé síly (1.79) je na otáčkách závislá (viz též poznámka pod obr. 1.22). Amplitudu ustáleného vynuceného kmitání pak musíme vyjádřit jako :

$$x_a = \frac{F_{od}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}} = \frac{m_r}{m} \cdot e \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}} \tag{1.83}$$

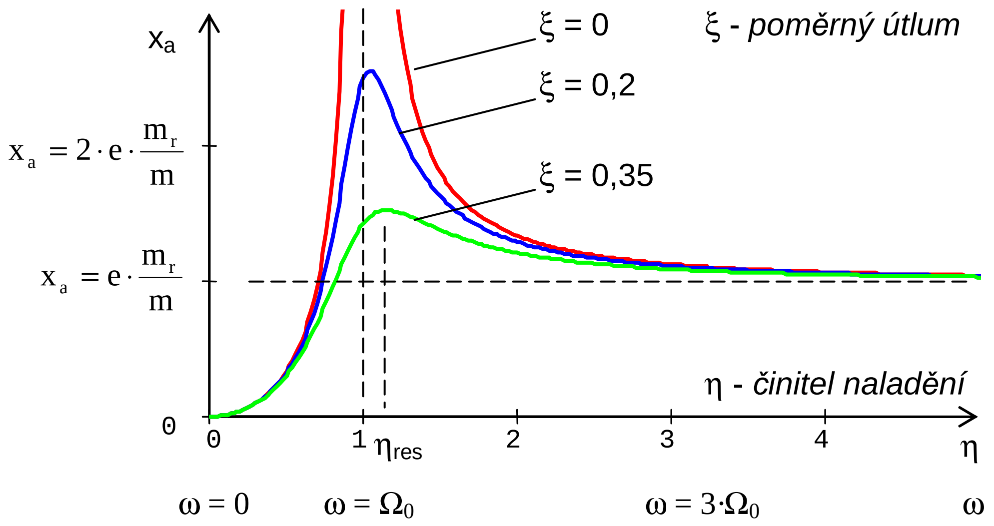
resp.

$$x_a = \frac{m_r}{m} \cdot e \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}} \tag{1.84}$$

Přenosová funkce pak je :

$$\zeta = \frac{x_a}{\frac{m_r}{m}\cdot e} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}} \tag{1.85}$$

Amplitudová charakteristika, závislost amplitudy x_a na úhlové rychlosti ω, resp. na činiteli naladění η, pak má podobu dle následujícího obrázku 1.26 :



Obr. 1.26 - Amplitudová charakteristika.

Ve srovnání s amplitudovou charakteristikou dle obr. 1.22 jsou na první pohled patrné dva rozdíly :

1) Pro nulové otáčky ($\omega = 0$, $\eta = 0$) je amplituda nulová, neboť i odstředivá síla je nulová.

2) Pro velmi vysoké otáčky ($\omega >> \Omega_0$, $\eta >> 1$) se amplituda limitně blíží hodnotě :

$$x_{a\_(\eta\to\infty)} = \lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{m_r}{m}\cdot e\cdot\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\cdot\xi\cdot\eta)^2}}\right) = \frac{m_r}{m}\cdot e \tag{1.86}$$

Opět se objevuje velmi významný jev - resonance tak, jak byla specifikována v předchozí kapitole. Tedy : resonance nastává když budící kruhová frekvence (úhlová rychlost nevývažku) ω je číselně blízká vlastní kruhové frekvenci Ω_0, projevuje se velmi vysokou amplitudou. Obvykle v této souvislosti bývá zvykem definovat tzv. kritické otáčky - otáčky nevývažku v resonanci.

$$\omega_{res} \cong \Omega_0$$

$$n_{kr} = \frac{30\cdot\omega_{res}}{\pi} \qquad \left[\frac{ot}{min}\right] \tag{1.87}$$

Méně významný rozdíl ve srovnání s amplitudovou charakteristikou dle obr. 1.22 spočívá v resonančním naladění, které se při vzrůstajícím tlumení posouvá vpravo ($\eta_{res} > 1$). Pro resonanční naladění lze odvodit :

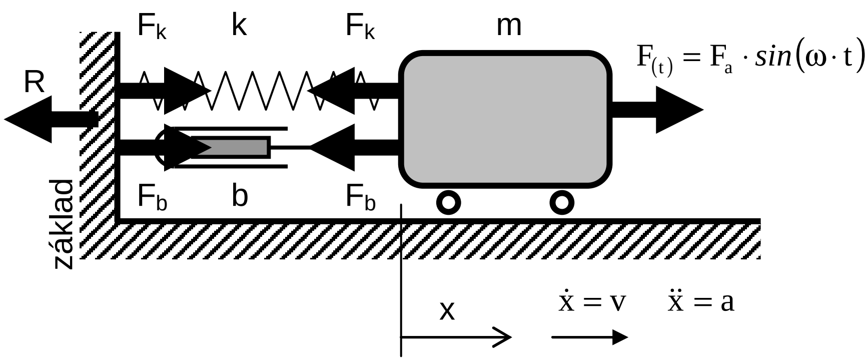
$$\frac{dx_a}{d\eta} = \frac{d\left(\frac{m_r}{m} \cdot e \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}}\right)}{d\eta} = 0$$

a odtud :

$$\eta_{res} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}} \tag{1.88}$$

1.1.6. Síla přenášená do základu

Znalost sil, přenášených z kmitající soustavy do základu, je nutná pro jeho dimenzování. K jejich určení použijeme mechanický model z obr. 1.27. Výsledná tuhost pružného uložení je k a součinitel tlumení b. Síla do základu se přenáší pružinou a tlumičem.



Obr. 1.27 - Model mechanické kmitající soustavy buzené harmonicky proměnnou budící silou.

Poznámka : Je třeba si uvědomit, že vnější síla $F_{(t)} = F_a \cdot sin(\omega t)$ působí přímo na těleso, ale ne na základ. Síla se do základu přenáší prostřednictvím pružiny a tlumiče, na základ tedy přímo působí direkční síla pružiny a tlumící síla tlumiče.

Direkční síla F_k a tlumící síla F_b jsou :

$$F_k = k \cdot x$$
$$F_b = b \cdot v = b \cdot \dot{x}$$

Je-li (1.45) partikulární řešení pohybové rovnice (1.42) resp. (1.43) :

$$x_{(t)} = x_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t - \phi)$$
$$v = \dot{x}_{(t)} = x_a \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t - \phi)$$

Pak reakce v základu je :

$$R_{(t)} = F_k + F_b = k \cdot x + b \cdot v = k \cdot x_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t - \phi) + b \cdot x_a \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t - \phi)$$

Tento tvar lze konečně upravit na :

$$R_{(t)} = R_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t - \phi + \phi_R) \tag{1.89}$$

kde amplituda reakce je :

$$R_a = \sqrt{(k \cdot x_a)^2 + (b \cdot x_a \cdot \omega)^2} = x_a \cdot \sqrt{k^2 + (b \cdot \omega)^2}$$

Uvážíme-li dále (1.16), (1.28), (1.49) a (1.4) :

$$b = 2 \cdot m \cdot \delta \qquad \delta = \xi \cdot \Omega_0 \qquad \omega = \eta \cdot \Omega_0 \qquad \Omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

pak amplitudu reakce vyjádříme jako :

$$R_a = x_a \cdot \sqrt{k^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \Omega_0{}^2 \cdot m\right)^2} = x_a \cdot k \cdot \sqrt{1 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}$$

Je-li konečně amplituda partikulárního řešení (1.50) :

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}$$

pak amplituda reakce je :

$$R_a = F_a \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}} \tag{1.90}$$

Konečně fázový posuv reakce je :

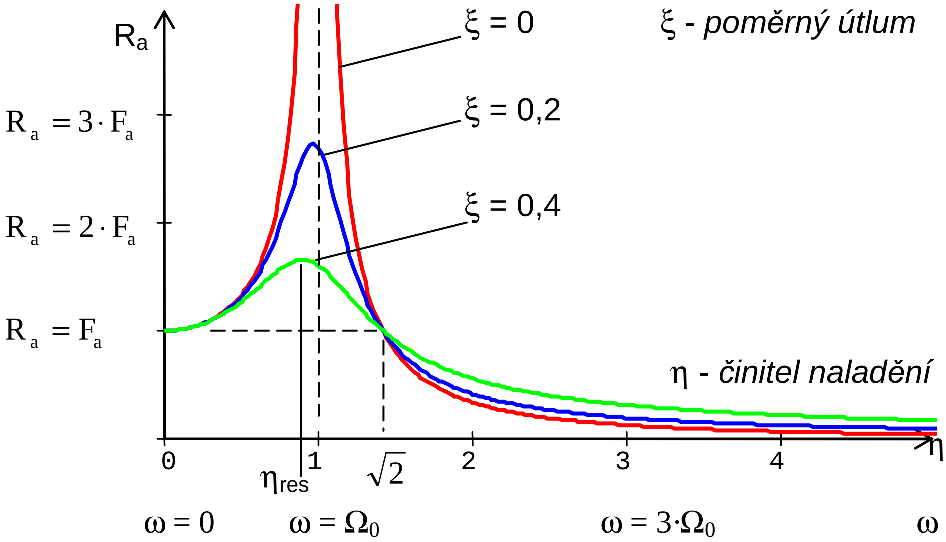
$$\mathit{tan}\, \phi_R = \frac{b \cdot \omega}{k} = \ldots = 2 \cdot \xi \cdot \eta \tag{1.91}$$

Poznámka : Fázový posuv ϕ_R je posunutí vůči partikulárnímu řešení (maximum reakce je o $\Delta t = \phi_R / \omega$ dříve než maximum kmitání). Fázové posunutí vůči budící síle je $\phi - \phi_R$ (maximum reakce je o $\Delta t = (\phi - \phi_R)/\omega$ později než maximum budící síly).

Činitel zesílení reakce je :

$$\zeta = \frac{R_a}{F_a} = \frac{\sqrt{1+(2\cdot\xi\cdot\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\cdot\xi\cdot\eta)^2}} \tag{1.92}$$

Závislost amplitudy reakce na naladění je na obr. 1.28.



Obr. 1.28 - Charakteristika reakce.

Průběh charakteristiky má podobné vlastnosti jako amplitudová charakteristika.

1) Pro $\eta = 0$, resp. $\omega = 0$ (konstantní síla) se do základu přenáší budící síla nezměněná (R=F).

2) Resonance. Je-li budící frekvence blízká vlastní frekvenci pak reakce v základu výrazně převyšuje budící sílu. Resonanční naladění je :

$$\eta_{res} = \frac{\sqrt{\sqrt{1+8\cdot\xi^2}-1}}{2\cdot\xi} \tag{1.93}$$

3) Pro $\eta >> 1$, resp. $\omega >> \Omega_0$, hodnota reakce klesá k velmi malým hodnotám R << F.

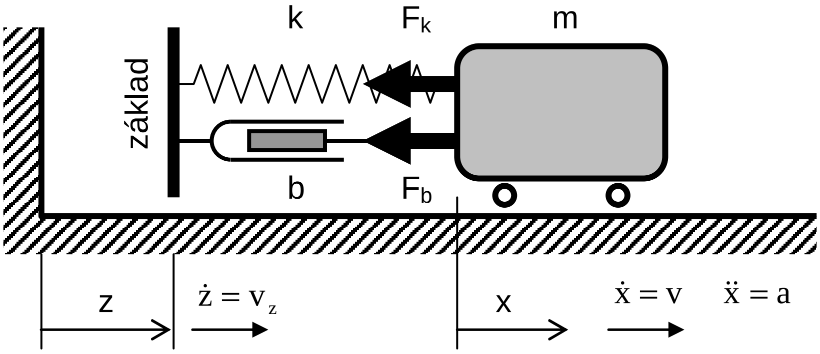
$$R_{a\_(\eta\to\infty)} = \lim_{\eta\to\infty}\left(F_a\cdot\frac{\sqrt{1+(2\cdot\xi\cdot\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\cdot\xi\cdot\eta)^2}}\right) = 0$$

Poznámka : Nevýznamnou zajímavostí je že pro $\eta = \sqrt{2}$ *je* $R_a = F_a$ *nezávisle na tlumení.*

Pro činitel naladění $\eta > \sqrt{2} \cong 1{,}4$ je síla do základu menší než amplituda budící síly. Toho využíváme pro zmenšení síly přenášené do základu tzv. aktivním pružným ukládáním strojů. Stroje a zařízení ukládáme na pružiny tak, aby výsledný činitel naladění $\eta = 3 \div 5$.

1.1.7. Kinematické buzení

V této kapitole bude probráno kmitání, které je způsobeno pohybem rámu mechanické soustavy, tzv. kinematické buzení. Mechanický model je na obr. 1.29. Je tvořen tělesem, které je pružinou a tlumičem vázáno k rámu. Rám se pohybuje definovaným způsobem, jeho pohyb je dán časově proměnnou výchylkou $z_{(t)}$.



Obr. 1.29 - Model kinematicky buzené mechanické kmitající soustavy.

Zde m - <u>hmotnost</u> [kg],

k - <u>tuhost pružiny</u> [N/m],

b - <u>součinitel tlumení</u> $[N\cdot s\cdot m^{-1}]$,

x - <u>souřadnice</u>, určující polohu tělesa [m],

z - <u>souřadnice</u>, určující polohu základu [m].

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot a = \sum F_i = -F_k - F_b$$

Direkční síla F_k a tlumící síla F_b pak jsou :

$$\begin{aligned} F_k &= k \cdot \Delta\ell = k \cdot (x - z) \\ F_b &= b \cdot v_{rel} = b \cdot (v - v_z) = b \cdot (\dot{x} - \dot{z}) \end{aligned} \tag{1.94}$$

Zde je třeba si uvědomit, že direkční síla není primárně dána posunutím tělesa x, ale deformací pružiny $\Delta\ell$ = x-z. Základ „dohání“ těleso, deformace pružiny je dána rozdílem obou pohybů. Podobně ve výrazu pro tlumící sílu $v_{rel} = v - v_z$ je relativní rychlost jednoho konce tlumiče vůči druhému, rozdíl rychlosti tělesa a rámu.

Závorky ve výrazech (1.94) roznásobíme, členy $k \cdot x$ a $b \cdot v$ převedeme na levou stranu pohybové rovnice, zatímco členy $k \cdot z$ a $b \cdot v_z$ necháme na pravé straně pohybové rovnice. Ta pak má tvar :

$$\begin{aligned} m \cdot a + b \cdot v + k \cdot x &= b \cdot v_z + k \cdot z \\ m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x &= b \cdot \dot{z} + k \cdot z = f_{(t)} \end{aligned} \tag{1.95}$$

kde :

$$f_{(t)} = k \cdot z_{(t)} + b \cdot \dot{z}_{(t)}$$

Poznámka : Funkce $f_{(t)}$ na pravé straně vyjadřuje pohyb základu, nemá fyzikální charakter síly (ovšem její jednotka je [N]).

Vyřešíme případ, kdy pohyb rámu je harmonický :

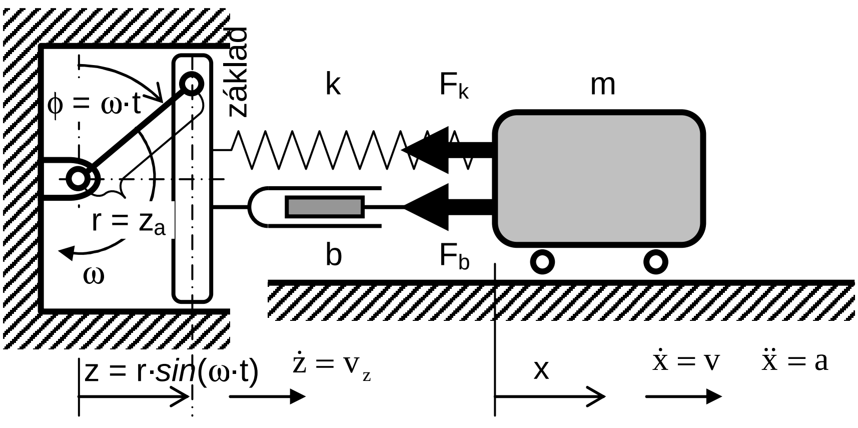
$$\begin{aligned} z &= z_a \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ v_z &= \dot{z} = z_a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{1.96}$$

Zde z_a - <u>amplituda pohybu základu</u> [m],

ω - <u>kruhová frekvence pohybu základu</u> [s^{-1}],

$f = \dfrac{\omega}{2 \cdot \pi}$ - <u>frekvence pohybu základu</u> [Hz].

Toto řešení odpovídá např. situaci, kdy pohyb rámu je dán pohybem kulisového mechanismu (viz obr. 1.30). Zde poloměr kliky $r = z_a$ je amplituda pohybu základu, úhlová rychlost rotace kliky ω je současně kruhovou frekvencí pohybu základu.



Obr. 1.30 - Model kinematicky buzené mechanické kmitající soustavy.

Pohybová rovnice pak bude :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = b \cdot z_a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) + k \cdot z_a \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Použijeme-li substituce :

$$\begin{aligned} F_a &= \sqrt{(b \cdot z_a \cdot \omega)^2 + (k \cdot z_a)^2} = z_a \cdot \sqrt{(b \cdot \omega)^2 + k^2} \\ \phi_z &= arctan \frac{b \cdot z_a \cdot \omega}{k \cdot z_a} = arctan \frac{b \cdot \omega}{k} \end{aligned} \tag{1.97}$$

Uvážíme-li dále (1.16), (1.28), (1.49) a (1.4) :

$$b = 2 \cdot m \cdot \delta \qquad \delta = \xi \cdot \Omega_0 \qquad \omega = \eta \cdot \Omega_0 \qquad \Omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m}$$

pak (1.97) lze upravit na :

$$F_a = k \cdot z_a \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \eta)^2 + 1} \tag{1.98}$$

Pak pohybová rovnice :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_a \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_z) \tag{1.99}$$

resp. :

$$\ddot{x} + \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^{\ 2} \cdot x = \frac{F_a}{m} \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_z) \tag{1.100}$$

bude formálně shodná s pohybovou rovnicí (1.42) resp. (1.43) (s výjimkou fázového posuvu ϕ_z).

Poznámka : Zde je třeba si opět uvědomit, že člen F_a na pravé straně nemá fyzikální charakter síly, ale vyjadřuje pohyb základu.

Samozřejmě i řešení pohybové rovnice (partikulární řešení pro ustálený stav) je shodné s (1.45), (1.48), (1.50), (1.47) a (1.51) :

$$x_{(t)} = x_a \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_z - \phi) \tag{1.101}$$

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}} \tag{1.102}$$

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} = z_a \cdot \frac{\sqrt{1+\left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} \tag{1.103}$$

$$\tan\phi = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0{}^2 - \omega^2} = \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1-\eta^2} \tag{1.104}$$

Konečně dynamický činitel (činitel zesílení) je shodný s (1.92) v kapitole o přenosu síly do základu :

$$\zeta = \frac{x_a}{z_a} = \frac{\sqrt{1+\left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} \tag{1.105}$$

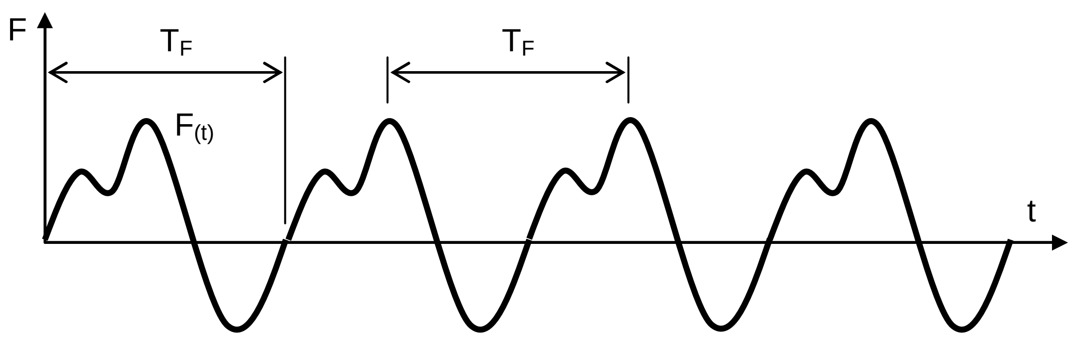
Amplitudová charakteristika má stejný průběh jako je na obr. 1.28.

Možnost snížit amplitudu kmitání tělesa vhodným pružným uložením využíváme u pasivního pružného uložení pro izolaci od kmitání okolí. Optimální naladění je opět $\eta = 3 \div 5$.

1.1.8. Kmitání vybuzené periodickou silou obecného průběhu

Při řešení praktických problémů kmitání je často budící síla periodickou funkcí času. Její průběh se po určité periodě T_F opakuje, viz obr. 1.31. Tuto vlastnost lze matematicky vyjádřit jako :

$$F_{(t)} = F_{(t+TF)} = F_{(t+i \cdot TF)} \qquad \text{pro } i = 1, 2, ...$$



Obr. 1.31 - Obecný periodický průběh budící síly.

Jsou-li splněny Dirichletovy podmínky lze takový průběh vyjádřit Fourierovou řadou jako součet harmonických průběhů o základní frekvenci f a násobných frekvencích $i \cdot f$ (kde i = 1, 2, ... je nekonečná řada celých čísel) :

$$F_{(t)} = F_{1\_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[F_{1\_i} \cdot cos(i \cdot \omega \cdot t) + F_{2\_i} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t) \right] \qquad (1.106)$$

kde

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T_F} \qquad (1.107)$$

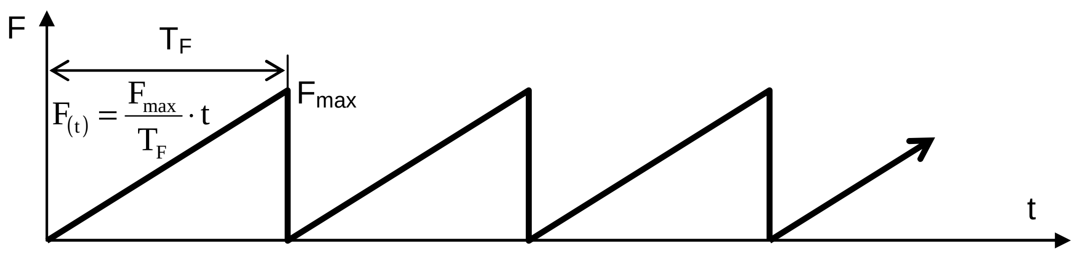
je <u>základní kruhová frekvence budící síly</u>, dále koeficienty Fourierova rozvoje jsou :

$$\begin{aligned} F_{1\_0} &= \frac{1}{T_F} \cdot \int_0^{TF} F_{(t)} \cdot dt \\ F_{1\_i} &= \frac{2}{T_F} \cdot \int_0^{TF} F_{(t)} \cdot cos(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \\ F_{2\_i} &= \frac{2}{T_F} \cdot \int_0^{TF} F_{(t)} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \end{aligned} \qquad (1.108)$$

Příklad 1.1 Fourierův rozvoj pilovitého průběhu

Např. pro pilovitý průběh dle obr. 1.32, pro který platí :

$$F_{(t)} = \frac{F_{max}}{T_F} \cdot t$$



Obr. 1.32 - Pilovitý průběh budící síly.

můžeme odvodit :

$$F_{1\_0} = \frac{1}{T_F} \cdot \int_0^{TF} \frac{F_{max}}{T_F} \cdot t \cdot dt = \frac{F_{max}}{T_F^{\ 2}} \cdot \int_0^{TF} t \cdot dt = \frac{F_{max}}{T_F^{\ 2}} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{TF} = \frac{F_{max}}{2 \cdot T_F^{\ 2}} \cdot T_F^{\ 2} = \frac{1}{2} \cdot F_{max}$$

a dále (metodou per partes) :

$$F_{1\_i}=\frac{2}{T_F}\cdot\int_0^{TF}\frac{F_{max}}{T_F}\cdot t\cdot cos(i\cdot\omega\cdot t)\cdot dt=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\int_0^{TF}t\cdot cos(i\cdot\omega\cdot t)\cdot dt=$$

$$=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{t}{i\cdot\omega}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot t)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot t)\right]_0^{TF}=$$

$$=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{T_F}{i\cdot\omega}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot T_F)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot T_F)-\frac{0}{i\cdot\omega}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot 0)-\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot 0)\right]$$

Uvážíme-li, že *sin*(0) = 0, *cos*(0) = 1, a dále (1.107) :

$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T_F}$$

můžeme vyjádřit :

$$F_{1\_i}=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{T_F}{i\cdot\omega}\cdot sin(2\cdot i\cdot\pi)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot cos(2\cdot i\cdot\pi)-\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\right]$$

Dále *sin*(2·i·π) = *sin*(360º) = *sin*(2·360º) = *sin*(3·360º) = ... = 0,

cos(2·i·π) = *cos*(360º) = *cos*(2·360º) = *cos*(3·360º) = ... = 1, pak :

$$F_{1\_i}=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}-\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\right]=0$$

Dále :

$$F_{2\_i}=\frac{2}{T_F}\cdot\int_0^{TF}\frac{F_{max}}{T_F}\cdot t\cdot sin(i\cdot\omega\cdot t)\cdot dt=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\int_0^{TF}t\cdot sin(i\cdot\omega\cdot t)\cdot dt=\underrightarrow{\text{metodou per partes}}=$$

$$=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{-t}{i\cdot\omega}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot t)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot t)\right]_0^{TF}=$$

$$=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{-T_F}{i\cdot\omega}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot T_F)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot T_F)-\frac{-0}{i\cdot\omega}\cdot cos(i\cdot\omega\cdot 0)-\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot sin(i\cdot\omega\cdot 0)\right]$$

Dále (viz výše) :

$$F_{2\_i}=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\left[\frac{-T_F}{i\cdot\omega}\cdot cos(2\cdot i\cdot\pi)+\frac{1}{(i\cdot\omega)^2}\cdot sin(2\cdot i\cdot\pi)\right]=$$

$$=\frac{2\cdot F_{max}}{T_F^{\ 2}}\cdot\frac{-T_F}{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{T_F}}=-\frac{F_{max}}{i\cdot\pi}$$

Pilovitý průběh dle obr. 1.32 tedy lze vyjádřit Fourierovou řadou :

$$F_{(t)} = F_{max} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin(i \cdot \omega \cdot t)}{i \cdot \pi} \right) = F_{max} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{sin(\omega \cdot t)}{\pi} - \frac{sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} - \frac{sin(3 \cdot \omega \cdot t)}{3 \cdot \pi} - \dots \right)$$

Společnou obecnou vlastností Fourierova rozvoje libovolné funkce je, že ve výrazech pro koeficienty F_{1i} a F_{2i} je parametr i = 1, 2, ... ve jmenovateli. Koeficienty pro vzrůstající i mají menší hodnotu. V praxi se proto vždy uvažuje konečný počet členů rozvoje pro i = 1, 2, ... n.

Na obr. 1.33 je srovnání požadovaného pilovitého průběhu s Fourierovým rozvojem pro různé hodnoty n.

Pro další řešení upravíme rovnici (1.106) na :

$$F_{(t)} = F_{1\_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[F_{a\_i} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\_i}) \right] \qquad (1.109)$$

kde :

$$F_{a\_i} = \sqrt{F_{1\_i}^{\ 2} + F_{2\_i}^{\ 2}}$$
$$\phi_{F\_i} = arctan \frac{F_{1\_i}}{F_{2\_i}} \qquad (1.110)$$

Pohybová rovnice bude mít tvar :

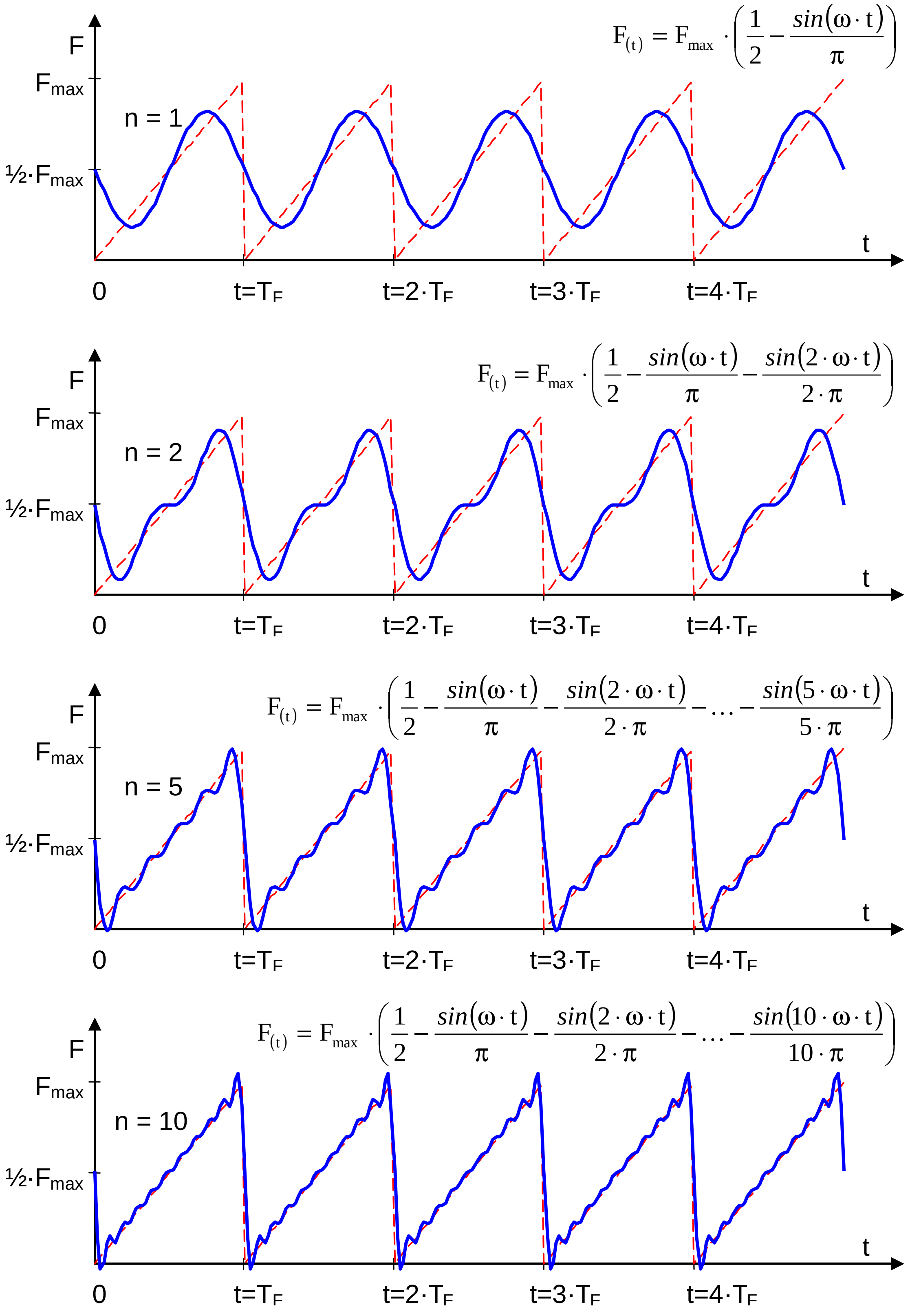
$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_{1\_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[F_{a\_i} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\_i}) \right] \qquad (1.111)$$

resp. :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^{\ 2} \cdot x = \frac{F_{1\_0}}{m} + \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left[F_{a\_i} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\_i}) \right] \qquad (1.112)$$

S využitím zákona superpozice bude řešení :

$$x_{(t)} = x_{hom} + x_{part} = x_{hom} + x_{part\_0} + \sum_{i=1}^{n} x_{part\_i} \qquad (1.113)$$



Obr. 1.33 - Pilovitý průběh budící síly a jeho Fourierův rozvoj - srovnání.

V dalším se zaměříme na partikulární řešení (ustálené vynucené kmitání).

Složka partikulárního řešení $x_{part\ 0}$, odpovídající konstantní složce budící síly F_{10}, je řešením kmitání při působící konstantní síle, viz kapitola 1.1.3 :

$$x_{part\_0} = \frac{F_{1\_0}}{k} \tag{1.114}$$

Složka partikulárního řešení $x_{part\ i}$, odpovídající harmonicky proměnné budící síle $F_i = F_{a\ i} \cdot sin(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\ i})$, je popsána v kapitole 1.1.4 o odezvě na harmonicky proměnnou budící sílu, pouze je doplněn fázový posuv $\phi_{F\ i}$ a zejména místo základní kruhové frekvence ω uvažujeme její násobky $i \cdot \omega$.

$$x_{part\_i} = x_{a\_i} \cdot sin\left(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\_i} - \phi_i\right) \tag{1.115}$$

kde :

$$\begin{aligned} x_{a\_i} &= \frac{F_{a\_i}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega_0^{\ 2} - (i \cdot \omega)^2\right)^2 + (2 \cdot \delta \cdot i \cdot \omega)^2}} = \frac{F_{a\_i}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (i \cdot \eta)^2\right)^2 + (2 \cdot \xi \cdot i \cdot \eta)^2}} \\ \phi_i &= arctan \frac{2 \cdot \delta \cdot i \cdot \omega}{\Omega_0^{\ 2} - (i \cdot \omega)^2} = arctan \frac{2 \cdot \xi \cdot i \cdot \eta}{1 - (i \cdot \eta)^2} \end{aligned} \tag{1.116}$$

kde dále :

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

je činitel naladění pro základní frekvenci,

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

je poměrný útlum.

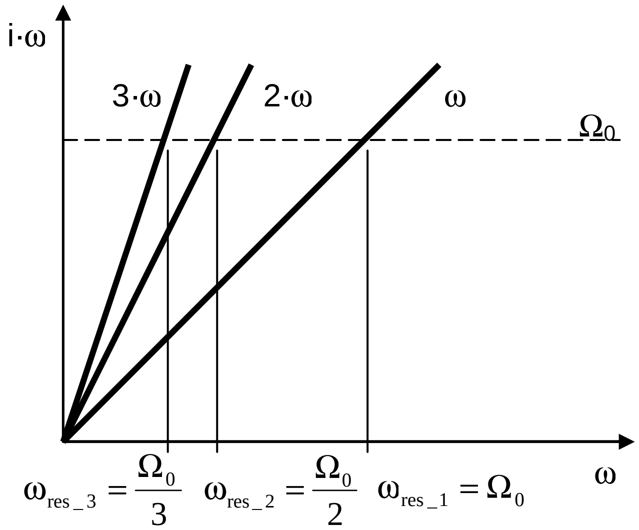
Partikulární řešení pohybové rovnice (1.111) resp. (1.112) tedy je :

$$x_{(t)} = x_{part\_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_{a\_i} \cdot sin\left(i \cdot \omega \cdot t + \phi_{F\_i} - \phi_i\right)\right) \tag{1.117}$$

Z rovnice (1.116) plyne, že jednotlivé harmonické složky budící síly jsou mechanickou soustavou různě zesilovány podle velikosti $F_{a\ i}$ a jejího pořadí i. Dále je patrno, že pro každou harmonickou složku dochází k rezonanci při jiné budící frekvenci. Jednotlivé harmonické složky budou v rezonanci, bude-li splněna podmínka $i \cdot \eta_{res} = 1$, tj. $i \cdot \omega_{res} = \Omega_0$. To se při proměnné kruhové frekvenci ω projeví řadou rezonancí :

$$\omega_{res\_i} = \frac{\Omega_0}{i}$$

jak je naznačeno v tzv. Cambellově diagramu, obr. 1.34.

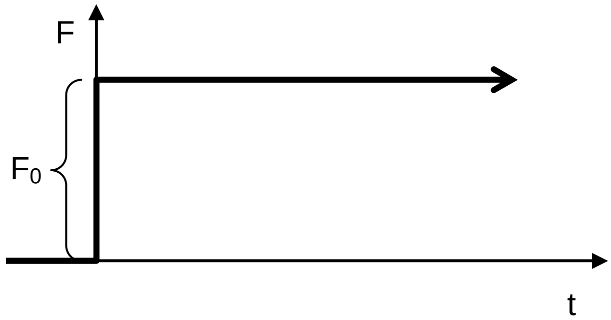


Obr. 1.34 - Cambellův diagram.

Jelikož s rostoucím i amplitudy harmonických složek zpravidla rychle klesají (s výjimkou resonance), je možno se při výpočtu omezit na několik prvních harmonických složek periodického buzení.

1.1.9. Kmitání vybuzené skokovou změnou budící síly

Dynamické vlastnosti kmitající soustavy je možno posuzovat na základě její odezvy na skokovou změnu budící síly, obr.1.35 (vnější síla F z nulové hodnoty skokem nabude nenulovou hodnotu a tu si nadále podrží jako konstantní). Tato odezva se nazývá <u>přechodová charakteristika</u>.



Obr. 1.35 - Skoková změna budící síly.

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \tag{1.118}$$

resp. :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^{\ 2} \cdot x = \frac{F_0}{m} \tag{1.119}$$

Zavedeme substituci :

$$\begin{aligned} z &= x - x_{stat} \\ \dot{z} &= \dot{x} \\ \ddot{z} &= \ddot{x} \end{aligned} \tag{1.120}$$

kde v souladu s (1.38)

$$x_{stat} = \frac{F_0}{k}$$

je tzv. <u>statická deformace</u>. Pohybová rovnice pak bude mít tvar :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot (z + x_{stat}) &= F_0 \\ m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot z + k \cdot \frac{F_0}{k} &= F_0 \\ m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot z + F_0 &= F_0 \end{aligned}$$

a konečně :

$$m \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot z = 0 \tag{1.121}$$

Pohybová rovnice je shodná s (1.14), její řešení je shodné s (1.23) :

$$z_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

a při substituci (1.120) :

$$\begin{aligned} x_{(t)} &= x_{stat} + C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0) \\ x_{(t)} &= x_{stat} + e^{-\delta \cdot t} \cdot [A \cdot cos(\Omega \cdot t) + B \cdot sin(\Omega \cdot t)] \\ \dot{x}_{(t)} &= v = e^{-\delta \cdot t} \cdot [(B \cdot \Omega - A \cdot \delta) \cdot cos(\Omega \cdot t) - (A \cdot \Omega + B \cdot \delta) \cdot sin(\Omega \cdot t)] \end{aligned} \tag{1.122}$$

Integrační konstanty A a B, resp. C a ϕ_0, určíme z počátečních podmínek, odpovídajících klidovému počátečnímu stavu : t = 0 ... $x_{(t=0)} = x_0 = 0$, $v_{(t=0)} = v_0 = 0$.

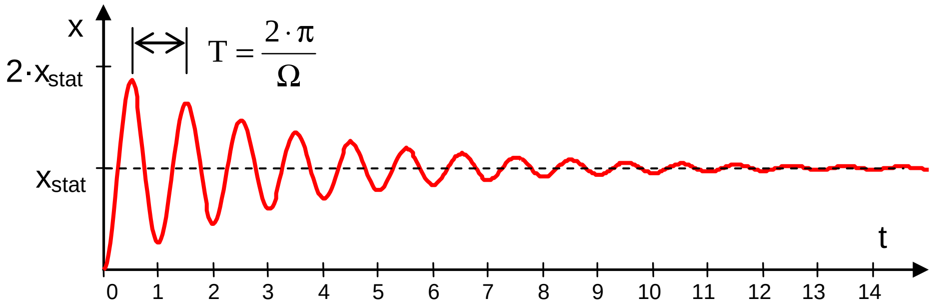
$$\begin{aligned} 0 &= x_{stat} + A \\ 0 &= B \cdot \Omega - A \cdot \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -x_{stat} \\ B &= -x_{stat} \cdot \frac{\delta}{\Omega} \end{aligned}$$

Řešení pohybové rovnice (1.118) resp. (1.119) při nulových počátečních podmínkách (klidový počáteční stav) tedy je :

$$x_{(t)} = x_{stat} \cdot \left\{ 1 - e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[cos(\Omega \cdot t) + \frac{\delta}{\Omega} \cdot sin(\Omega \cdot t) \right] \right\} \tag{1.123}$$

Tato funkce se nazývá <u>přechodová funkce</u> (<u>přechodová charakteristika</u>). Její graf je na obr. 1.36.



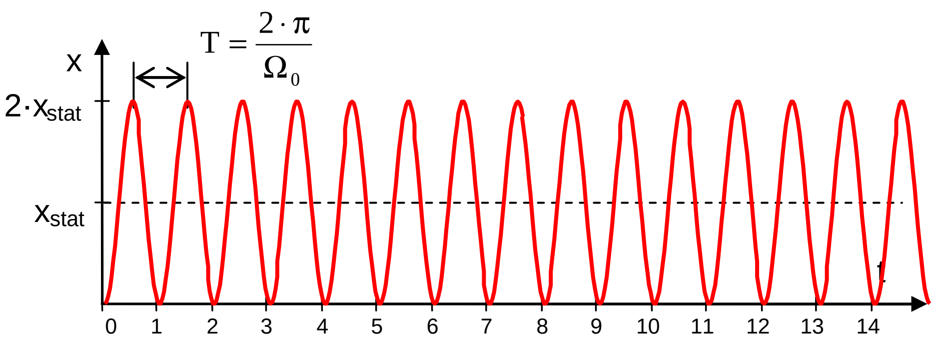
Obr. 1.36 - Přechodová charakteristika - odezva na skokovou změnu budící síly.

Průběh se po počátečním rozkmitání utlumí a ustálí se na hodnotě $x = x_{stat}$. Na počátku, než se kmitání utlumí, může však průběh krátkodobě dosáhnout hodnoty blížící se $x = 2 \cdot x_{stat}$.

Zanedbáme-li v (1.123) tlumení, bude mít funkce tvar :

$$x_{(t)} = x_{stat} \cdot [1 - cos(\Omega_0 \cdot t)] \tag{1.124}$$

grafické znázornění je na obr. 1.37. Průběh periodicky dosahuje hodnoty $x = 2 \cdot x_{stat}$.



Obr. 1.37 - Přechodová charakteristika pro netlumené kmitání.

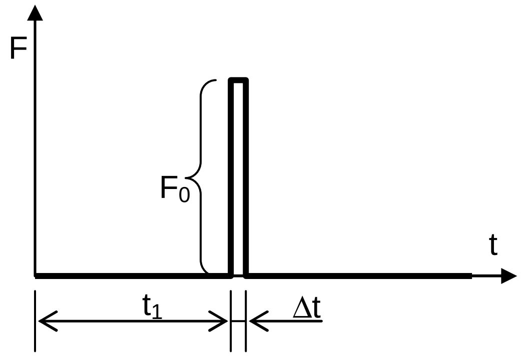
Dynamické vlastnosti posuzujeme podle dynamického součinitele

$$\kappa = \frac{x_{max}}{x_{stat}}$$

Pro netlumenou soustavu ($\delta = 0$) je $\kappa = 2$.

1.1.10. Odezva mechanické soustavy na impulsní sílu

V technické praxi se setkáváme s buzením náhle přiloženou silou značné velikosti, která působí po zanedbatelně krátkou dobu, tzv. impulsním buzením. Pro jeho matematický popis využijeme Diracovu funkci, obr.1.38. Doba působení silového impulsu velikosti F_0 je Δt.



Obr. 1.38 - Impulsní síla.

Pro $t < t_1$ ... $F = 0$,

pro $t_1 \leq t \leq t_1+\Delta t$ ... $F = F_0$,

pro $t > t_1+\Delta t$ ... $F = 0$.

Tato síla vyvolává impuls síly :

$$I = \int_{t1}^{t1+\Delta t} F \cdot dt = F \cdot \Delta t$$

Je-li velikost síly číselně rovna :

$$F = \frac{1}{\Delta t}$$

pak tato síla podává jednotkový impuls :

$$I_1 = F \cdot \Delta t = \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1 \qquad (1.125)$$

Podle věty o změně hybnosti platí :

$$\Delta p = m \cdot v_{(t1+\Delta t)} - m \cdot v_{(t1)} = I_1$$

Je-li rychlost na počátku impulsu nulová ($v_{(t1)} = 0$), pak rychlost na konci impulsu je :

$$v_{(t1+\Delta t)} = v_{(t1)} + \frac{I_1}{m} = \frac{I_1}{m} \qquad (1.126)$$

Výchylka na konci impulsu (je-li výchylka na počátku impulsu nulová $x_{(t1)} = 0$) je :

$$x_{(t1+\Delta t)} = \int_{t1}^{t1+\Delta t} v \cdot dt$$

Protože však doba trvání impulsu je zanedbatelně malá, $\Delta t \rightarrow 0$, je i dráha zanedbatelně malá $x_{(t1+\Delta t)} \rightarrow 0$.

V čase $t > t_1 + \Delta t$ ($F = 0$) a pro podkritické tlumení je kmitání popsáno pohybovou rovnicí (1.14) resp. (1.15) a jejím řešením (1.23) :

$$x_{(t>t1)} = C \cdot e^{-\delta\cdot(t-t1)} \cdot sin\left[\Omega \cdot \left(t - t_1\right) + \phi_0\right]$$

Stav na konci impulsu ($x_{(t1+\Delta t)} = 0$, $v_{(t1+\Delta t)} = {}^{I1}/_{m}$) představuje počáteční podmínky následného volného kmitání. Integrační konstanty dle (1.24) a (1.25) jsou :

$$C = \sqrt{{x_{(t1+\Delta t)}}^2 + \frac{\left(v_{(t1+\Delta t)} + x_{(t1+\Delta t)} \cdot \delta\right)^2}{\Omega^2}} = \sqrt{0 + \frac{\left(\frac{I1}{m} + 0 \cdot \delta\right)^2}{\Omega^2}} = \frac{I_1}{m \cdot \Omega}$$

$$\phi_0 = arctan \frac{x_{(t1+\Delta t)} \cdot \Omega}{v_{(t1+\Delta t)} + x_{(t1+\Delta t)} \cdot \delta} = arctan \frac{0 \cdot \Omega}{\frac{I1}{m} + 0 \cdot \delta} = arctan\, 0 = 0$$

Řešení dle (1.23) tedy je :

$$x_{(t>t1)} = \frac{I_1}{m \cdot \Omega} \cdot e^{-\delta\cdot(t-t1)} \cdot sin\left[\Omega \cdot \left(t - t_1\right)\right] \tag{1.127}$$

kde připomeňme jednotkový impuls $I_1 = 1\ N \cdot s$.

Výraz :

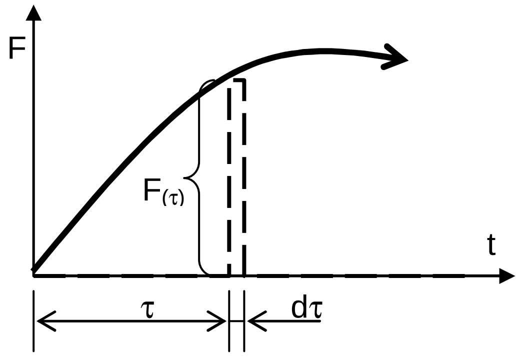
$$h_{(t-t1)} = \frac{1}{m \cdot \Omega} \cdot e^{-\delta\cdot(t-t1)} \cdot sin\left[\Omega \cdot \left(t - t_1\right)\right] \tag{1.128}$$

se nazývá impulsní (Diracova) funkce. Tato funkce má využití i v experimentální mechanice pro stanovení komplexních přenosových funkcí, které jsou Fourierovým obrazem impulsní funkce.

$$\tilde{H}_{(i\cdot\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{(t)} \cdot e^{-\omega\cdot t} \cdot dt \tag{1.129}$$

1.1.11. Odezva mechanické soustavy na obecný průběh budící síly

K odvození odezvy soustavy na obecný průběh budící síly můžeme rovněž použít impulsní funkci. Obecný průběh síly, obr. 1.39, si představíme složený z elementárních impulzů $F_{(\tau)} \cdot d\tau$, obr. 1.38.



Obr. 1.39 - Obecný průběh budící síly.

Protože platí zákon superpozice, můžeme odezvy na tyto impulzy sčítat a podle rovnice (1.127) (při $I_1=1$), resp. (1.128) obdržíme :

$$x_{(t)} = \frac{1}{m \cdot \Omega} \cdot \int_0^t F_{(\tau)} \cdot e^{-\delta \cdot (t-\tau)} \cdot sin[\Omega \cdot (t-\tau)] \cdot d\tau \qquad (1.130)$$

nebo též, s ohledem na (1.128) :

$$x_{(t)} = \int_0^t F_{(\tau)} \cdot h_{(t-\tau)} \cdot d\tau$$

Odvozený integrál (1.130) se nazývá Duhamelův integrál nebo též konvoluční integrál.

Poznámka : V Duhamelově integrálu (1.130) t i τ znamená čas. Při řešení samotného integrálu je τ proměnná, podle které integrujeme, t je konstantní parametr. Po vyřešení integrálu a dosazení mezí pak na t pohlížíme jako na proměnnou.

Použití rovnice (1.130) pro řešení odezvy má tu výhodu, že umožňuje výpočet i v případě, kdy je síla zadaná graficky, nebo tabelárně, případně primitivní funkci integrálu nelze vyjádřit. Pro řešení takových případů můžeme použít numerickou integraci a výpočet provést na počítači.

1.2. Kmitání rotační

Čas ke studiu : 1,5 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

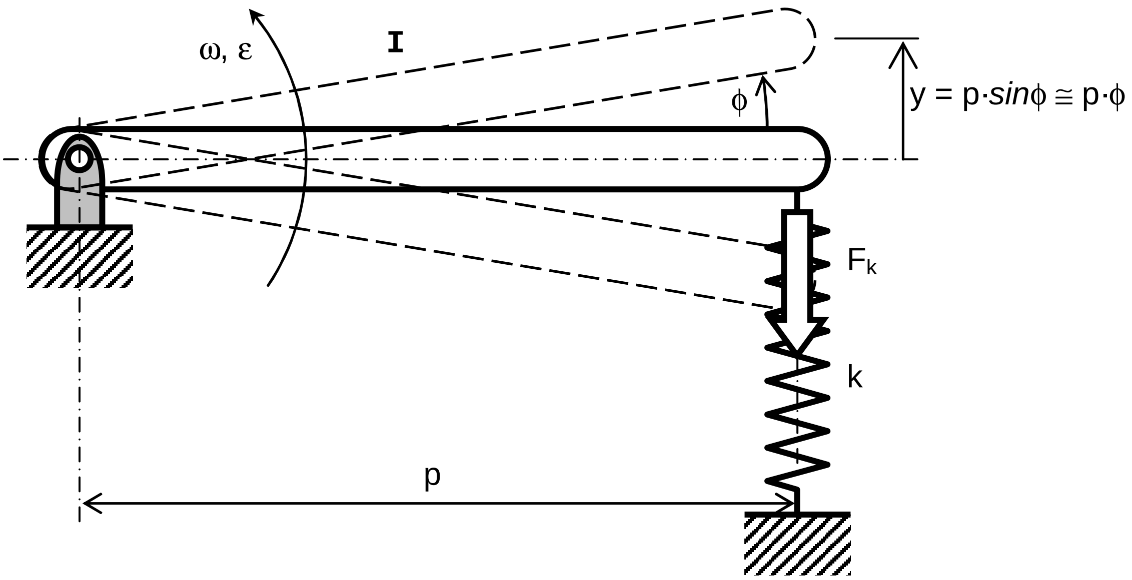
Popsat zákonitosti rotačního pohybu, zejména kmitavého rotačního pohybu.

Definovat základní veličiny kmitavého rotačního pohybu a vztahy mezi nimi.

Vyřešit středně složité úlohy rotačního kmitání.

Výklad

S kmitavým pohybem se můžeme setkat i v souvislosti s rotačním pohybem. Mechanický model na obr. 1.40 je tvořen tělesem o momentu setrvačnosti I, podepřeném pružinou o tuhosti k na rameni p.



Obr. 1.40 - Mechanický model rotačního netlumeného kmitání.

Zde I - hmotový moment setrvačnosti (osový) $[kg\cdot m^2]$,

k - tuhost pružiny [N/m],

p - rameno uchycení pružiny [m],

ϕ - úhlová souřadnice, určující polohu tělesa (úhel natočení) [rad].

Dále $\omega = \dot{\phi}$ je úhlová rychlost [rad/s]

a $\varepsilon = \ddot{\phi}$ je úhlové zrychlení $[rad/s^2]$.

Dojde-li k natočení tyče o úhel ϕ, konec tyče se posune o souřadnici y, jež rovněž představuje deformaci pružiny (její prodloužení nebo zkrácení) :

$$y = p \cdot \sin\phi$$

Pro malý úhel ϕ můžeme použít linearizaci :

$$\sin\phi \cong \widehat{\phi}$$

kde přirozeně úhel ϕ je v obloukové míře [rad]. Pak přibližně platí :

$$y = p \cdot \sin\phi \cong p \cdot \widehat{\phi}$$

Poznámka : Linearizace $\sin\phi \cong \phi$ *se používá poměrně často. Pro ilustraci uvedeme tabulku chyby této linearizace :*

ϕ [°]	ϕ [rad]	$\sin\phi$ [-]	chyba $\frac{\phi - \sin\phi}{\sin\phi}$ [%]
1°	0,017453	0,017452	0,005 %
5°	0,08727	0,08716	0,13 %
10°	0,17453	0,17365	0,51 %
15°	0,262	0,259	1,2 %
20°	0,349	0,342	2 %
30°	0,524	0,5	5 %
60°	1,047	0,866	21 %
90°	1,571	1	57 %

Obvykle se uvádí mez přijatelnosti této linearizace právě $\phi < 15^o$.

V pružině vzniká <u>direkční síla</u> F_k :

$$F_k = k \cdot y = k \cdot p \cdot \phi \tag{1.131}$$

Pohybová rovnice rotačního pohybu tyče je :

$$I \cdot \varepsilon = \sum M_i = -F_k \cdot p = -k \cdot p \cdot \phi \cdot p$$

po úpravě pak :

$$I \cdot \ddot{\phi} + k \cdot p^2 \cdot \phi = 0$$

a po substituci :

$$k_r = k \cdot p^2$$

pak konečně :

$$I \cdot \ddot{\phi} + k_r \cdot \phi = 0 \tag{1.132}$$

Poznámka : Je-li jednotka tuhosti pružiny k [N/m], pak jednotka rotační tuhosti k_r je [N·m/rad].

Srovnáme-li pohybovou rovnici rotačního kmitání (1.132) s pohybovou rovnicí podélného kmitání (1.2) :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

zjistíme, že jsou formálně shodné. Řešení pohybové rovnice je analogické k řešení (1.7) :

$$\phi_{(t)} = C \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \gamma_0) \tag{1.133}$$

kde C - amplituda (maximální výchylka) [rad, °],

γ_0 - fázový posuv [rad],

jsou integrační konstanty řešení.

Poznámka : Protože řecké písmeno ϕ je zde použito pro souřadnici, je pro fázový posuv použito jiné řecké písmeno γ.

Parametry vlastního netlumeného kmitání jsou analogické k (1.4), (1.5) a (1.6) :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{I}} = \sqrt{\frac{k \cdot p^2}{I}} \tag{1.134}$$

je vlastní kruhová frekvence [s^{-1}] (nebo též úhlová) netlumeného kmitání, dále pak :

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi}$$

je vlastní frekvence [Hz ≡ s^{-1}] (počet kmitů za sekundu) a

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega_0}$$

je perioda [s] netlumeného kmitání (doba jednoho kmitu).

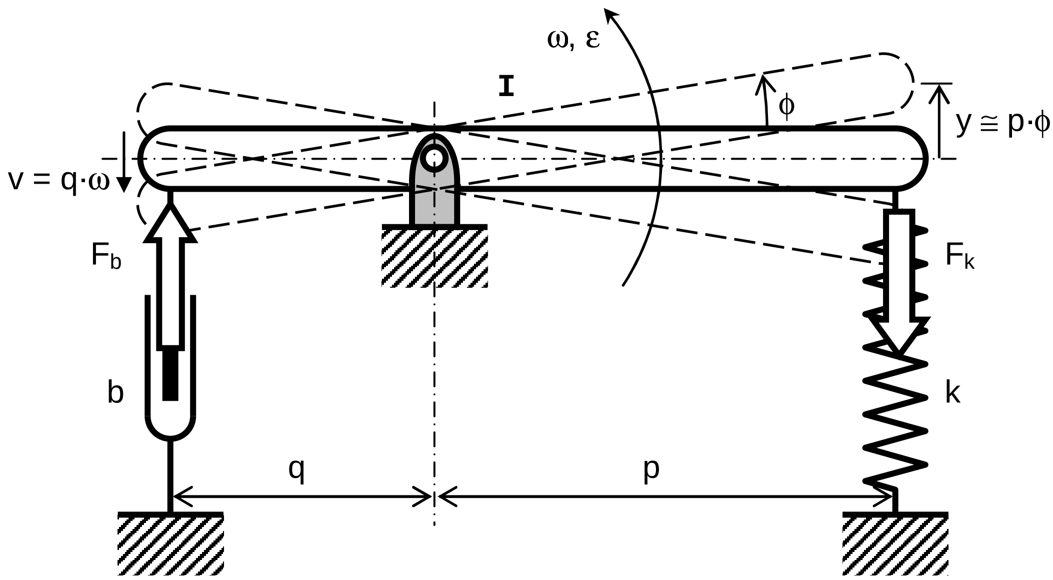
Rovněž řešení integračních konstant C a γ_0 je analogické k (1.10) a (1.11). Pro počáteční podmínky : t = 0 ... $\phi = \phi_0$ (počáteční úhel natočení), $\omega = \omega_0$ (počáteční úhlová rychlost) jsou :

$$C = \sqrt{\phi_0^{\ 2} + \frac{\omega_0^{\ 2}}{\Omega_0^{\ 2}}} \tag{1.135}$$

$$\gamma_0 = arctan \frac{\phi_0 \cdot \Omega_0}{\omega_0} \tag{1.136}$$

Mechanický model rotačního tlumeného kmitání, obr. 1.41, je doplněn o tlumící člen o koeficientu tlumení b, uložený na rameni q. Kromě direkční síly F_k (1.131) vzniká dále tlumící síla F_b :

$$F_b = b \cdot v = b \cdot q \cdot \omega \tag{1.137}$$



Obr. 1.41 - Mechanický model rotačního tlumeného kmitání.

Zde kromě výše již uvedených parametrů a souřadnic :

b - koeficient tlumení $[N \cdot m^{-1} \cdot s]$,

q - rameno uchycení tlumiče [m].

Pohybová rovnice rotačního pohybu tyče je :

$$I \cdot \varepsilon = \sum M_i = -F_k \cdot p - F_b \cdot q = -k \cdot p \cdot \phi \cdot p - b \cdot q \cdot \omega \cdot q$$

po úpravě pak :

$$I \cdot \ddot{\phi} + b \cdot q^2 \cdot \dot{\phi} + k \cdot p^2 \cdot \phi = 0$$

a po substituci :

$$k_r = k \cdot p^2$$

$$b_r = b \cdot q^2$$

pak konečně :

$$I \cdot \ddot{\phi} + b_r \cdot \dot{\phi} + k_r \cdot \phi = 0 \qquad (1.138)$$

Poznámka : Je-li jednotka koeficientu tlumení b [N·m^{-1}·s], pak jednotka rotačního koeficientu tlumení b_r je [N·m·s/rad].

Pohybová rovnice je analogická k (1.14) :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

její řešení je analogické k (1.23) :

$$\phi_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \gamma_0) \qquad (1.139)$$

kde C - <u>amplituda</u> (maximální výchylka) [rad, °],

γ_0 - <u>fázový posuv</u> [rad],

jsou integrační konstanty řešení.

Parametry vlastního tlumeného kmitání jsou analogické k (1.4) a (1.16) :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{I}} = \sqrt{\frac{k \cdot p^2}{I}}$$

je <u>vlastní kruhová frekvence</u> [s^{-1}] netlumeného kmitání, viz (1.134), dále pak :

$$\delta = \frac{b_r}{2 \cdot I} = \frac{b \cdot q^2}{2 \cdot I} \qquad (1.140)$$

je <u>konstanta doznívání</u> [s^{-1}] a konečně shodně s (1.17) :

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0{}^2 - \delta^2}$$

je <u>vlastní kruhová frekvence</u> [s^{-1}] tlumeného kmitání.

Integrační konstanty C a γ_0 určíme analogicky k (1.24) a (1.25) z počátečních podmínek :

t = 0 ... $\phi = \phi_0$ (počáteční úhel natočení), $\omega = \omega_0$ (počáteční úhlová rychlost) :

$$C = \sqrt{\phi_0{}^2 + \frac{(\omega_0 + \phi_0 \cdot \delta)^2}{\Omega^2}} \qquad (1.141)$$

$$\gamma_0 = arctan\frac{\phi_0 \cdot \Omega}{\omega_0 + \phi_0 \cdot \delta} \qquad (1.142)$$

Mechanický model rotačního vynuceného kmitání je na obr. 1.42. Model je doplněn o harmonicky proměnnou budící sílu F = $F_a \cdot sin(\omega \cdot t)$, působící vůči středu rotace na rameni r. Pohybová rovnice je :

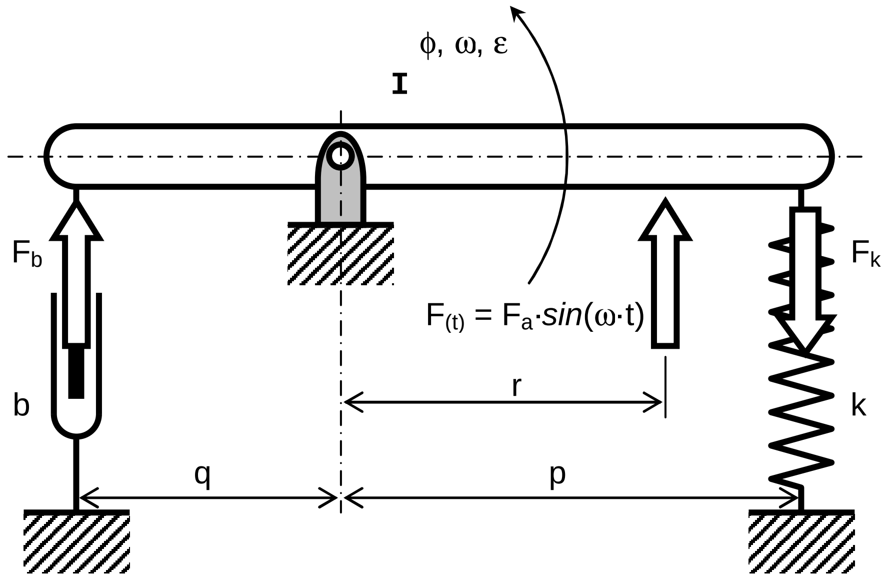
$$I \cdot \ddot{\phi} + b_r \cdot \dot{\phi} + k_r \cdot \phi = F_{(t)} \cdot r = F_a \cdot r \cdot sin(\omega \cdot t)$$

nebo při substituci :

$$M_a = F_a \cdot r \tag{1.143}$$

je pohybová rovnice :

$$I \cdot \ddot{\phi} + b_r \cdot \dot{\phi} + k_r \cdot \phi = M_a \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{1.144}$$



Obr. 1.42 - Mechanický model rotačního vynuceného kmitání.

Zde F_a - <u>amplituda budící síly</u> [N],

ω - <u>kruhová frekvence budící síly</u> [s^{-1}].

Poznámka : U rotačního kmitání musíme velmi přesně a velmi přísně rozlišovat mezi ω - úhlovou rychlostí rotačního pohybu a ω - kruhovou frekvencí budící síly. Tyto dvě veličiny jsou naprosto odlišné.

Pohybová rovnice (1.144) je analogická pohybové rovnici (1.42) a její řešení je analogické k řešení (1.44), (1.23) a (1.45). Partikulární složka řešení - ustálené vynucené kmitání, je :

$$\phi_{part} = \phi_a \cdot sin(\omega \cdot t - \gamma) \tag{1.145}$$

Výrazy pro amplitudu a fázový posuv ustáleného kmitání jsou dále analogické k (1.48), (1.50), (1.47) a (1.51) :

$$\phi_a = \frac{M_a}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2 \cdot \delta \cdot \omega\right)^2}} = \frac{M_a}{k_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \eta\right)^2}} \tag{1.146}$$

$$\tan \gamma = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0{}^2 - \omega^2} = \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2} \tag{1.147}$$

kde :

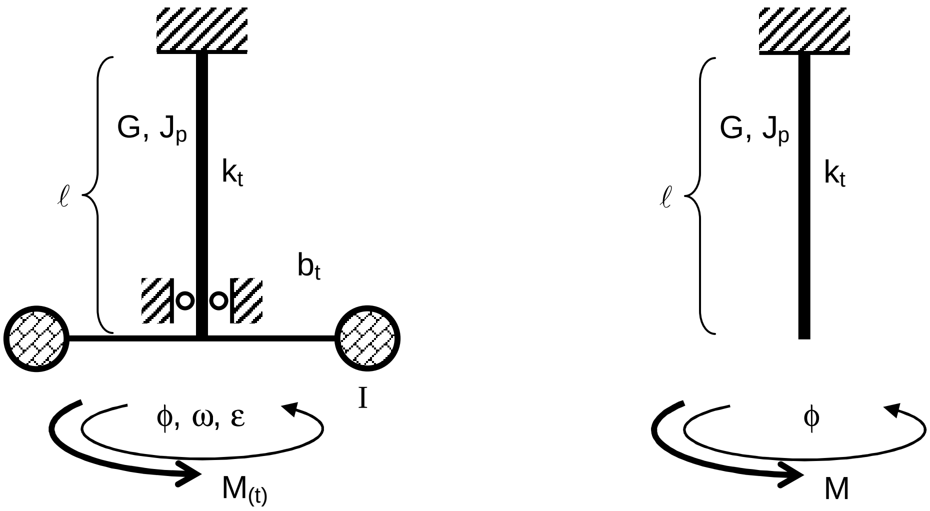
$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

je činitel naladění, viz (1.49) a

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$$

je poměrný útlum, viz (1.28).

S rotačním kmitáním se často setkáváme v podobě tzv. kroutivého kmitání (torzního kmitání). U kmitání kroutivého koná těleso ve tvaru kotouče rotační pohyb. Mechanický model je tvořen kotoučem připojeným nehmotnou torzní tyčí k rámu, obr.1.43.



Obr. 1.43 - Model torzní soustavy.

Zde I - hmotový moment setrvačnosti (osový) [$kg \cdot m^2$],

G - modul pružnosti ve smyku [Pa],

J_p - plošný polární moment setrvačnosti průřezu torzní tyče [m^4]

(např. pro kruhový průřez je $J = \pi \cdot d^4/32$),

ℓ - délka torzní tyče [m].

k_t - torzní tuhost [N·m/rad],

b_t - torzní součinitel tlumení [N·m·rad^{-1}·s],

ϕ - úhlová souřadnice, určující polohu tělesa (úhel natočení), rovněž pak zkroucení torzní tyče [rad],

$M_{(t)}$ - budící torzní moment [N·m].

Vystavíme-li torzní tyč délky ℓ, z materiálu o modulu pružnosti ve smyku G a o průřezu s polárním momentem setrvačnosti J_p kroutícímu (torznímu) momentu M_t, tyč se zkroutí o úhel ϕ :

$$\phi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot J_p}$$

Proti směru zkroucení naopak působí tyč momentem M_t :

$$M_t = \frac{G \cdot J_p}{\ell} \cdot \phi = k_t \cdot \phi \tag{1.148}$$

Zde

$$k_t = \frac{G \cdot J_p}{\ell} \tag{1.149}$$

je tzv. torzní tuhost [N·m/rad].

Pohybová rovnice vlastního resp. vynuceného kmitání pak je shodná s (1.138) resp. (1.144) :

$$I \cdot \ddot{\phi} + b_t \cdot \dot{\phi} + k_t \cdot \phi = 0$$

$$I \cdot \ddot{\phi} + b_t \cdot \dot{\phi} + k_t \cdot \phi = M_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)$$

kde b_t je koeficient torzního tlumení a M_a je amplituda budícího momentu. Řešení pohybové rovnice jak vlastního, tak vynuceného kmitání bylo uvedeno výše v této kapitole.

Platí zde analogie :

Tabulka 1.1

podélné kmitání			rotační kmitání		
x	[m]	souřadnice délková	ϕ	[rad]	souřadnice úhlová
$v = \dot{x}$	[m/s]	rychlost podélná	$\omega = \dot{\phi}$	[rad/s]	rychlost úhlová
$a = \ddot{x}$	[m/s^2]	zrychlení podélné	$\varepsilon = \ddot{\phi}$	[rad/s^2]	zrychlení úhlové
m	[kg]	hmotnost	I	[kg·m^2]	hmotový moment setrvačnosti
k	[N/m]	tuhost podélná	k_r	[N·m/rad]	tuhost rotační
b	[N·m^{-1}·s]	koeficient tlumení podélný	b_r	[N·m·rad^{-1}·s]	koeficient tlumení rotační
$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$	[N]	pohybová rovnice vlastního kmitání	$I \cdot \ddot{\phi} + b_r \cdot \dot{\phi} + k_r \cdot \phi = 0$	[N·m]	pohybová rovnice vlastního kmitání
$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	[s^{-1}]	kruhová frekvence vlastního netlumeného kmitání	$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{I}}$	[s^{-1}]	kruhová frekvence vlastního netlumeného kmitání
$\delta = \frac{b}{2 \cdot m}$	[s^{-1}]	konstanta doznívání	$\delta = \frac{b_r}{2 \cdot I}$	[s^{-1}]	konstanta doznívání
$\Omega = \sqrt{{\Omega_0}^2 - \delta^2}$	[s^{-1}]	kruhová frekvence vlastního tlumeného kmitání	$\Omega = \sqrt{{\Omega_0}^2 - \delta^2}$	[s^{-1}]	kruhová frekvence vlastního tlumeného kmitání
$x_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$	[m]	řešení pohybové rovnice	$\phi_{(t)} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot sin(\Omega \cdot t + \gamma_0)$	[rad]	řešení pohybové rovnice
x_0	[m]	počáteční výchylka	ϕ_0	[rad]	počáteční úhel natočení
v_0	[m/s]	počáteční rychlost	ω_0	[rad/s]	počáteční úhlová rychlost
$C = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{(v_0 + x_0 \cdot \delta)^2}{\Omega^2}}$	[m]	amplituda vlastního kmitání	$C = \sqrt{{\phi_0}^2 + \frac{(\omega_0 + \phi_0 \cdot \delta)^2}{\Omega^2}}$	[rad]	amplituda vlastního kmitání
$\phi_0 = arctan \frac{x_0 \cdot \Omega}{v_0 + x_0 \cdot \delta}$	[rad]	fázový posuv vlastního kmitání	$\gamma_0 = arctan \frac{\phi_0 \cdot \Omega}{\omega_0 + \phi_0 \cdot \delta}$	[rad]	fázový posuv vlastního kmitání

podélné kmitání			rotační kmitání		
$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_a \cdot sin(\omega \cdot t)$	[N]	pohybová rovnice vynuceného kmitání	$I \cdot \ddot{\phi} + b_r \cdot \dot{\phi} + k_r \cdot \phi = M_a \cdot sin(\omega \cdot t)$	[N·m]	pohybová rovnice vynuceného kmitání
$F_{(t)}$	[N]	budící síla	$M_{(t)}$	[N·m]	budící moment
F_a	[N]	amplituda budící síly	M_a	[N·m]	amplituda budícího momentu
ω	[s^{-1}]	kruhová frekvence budící síly	ω	[s^{-1}]	kruhová frekvence budícího momentu
$x_{(t)} = x_a \cdot sin(\omega \cdot t - \phi)$	[m]	partikulární řešení pohybové rovnice - ustálené vynucené kmitání	$\phi_{(t)} = \phi_a \cdot sin(\omega \cdot t - \gamma)$	[rad]	partikulární řešení pohybové rovnice - ustálené vynucené kmitání
$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$ $x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}$	[m]	amplituda ustáleného vynuceného kmitání	$\phi_a = \frac{M_a}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$ $\phi_a = \frac{M_a}{k_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}}$	[rad]	amplituda ustáleného vynuceného kmitání
$\phi = arctan\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0^{\ 2} - \omega^2} = arctan\frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2}$	[rad]	fázový posuv ustáleného vynuceného kmitání	$\gamma = arctan\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0^{\ 2} - \omega^2} = arctan\frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2}$	[rad]	fázový posuv ustáleného vynuceného kmitání
$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$	[-]	činitel naladění	$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$	[-]	činitel naladění
$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$	[-]	poměrný útlum	$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0}$	[-]	poměrný útlum

1.3. Kmitání ohybové

Čas ke studiu : 1/2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

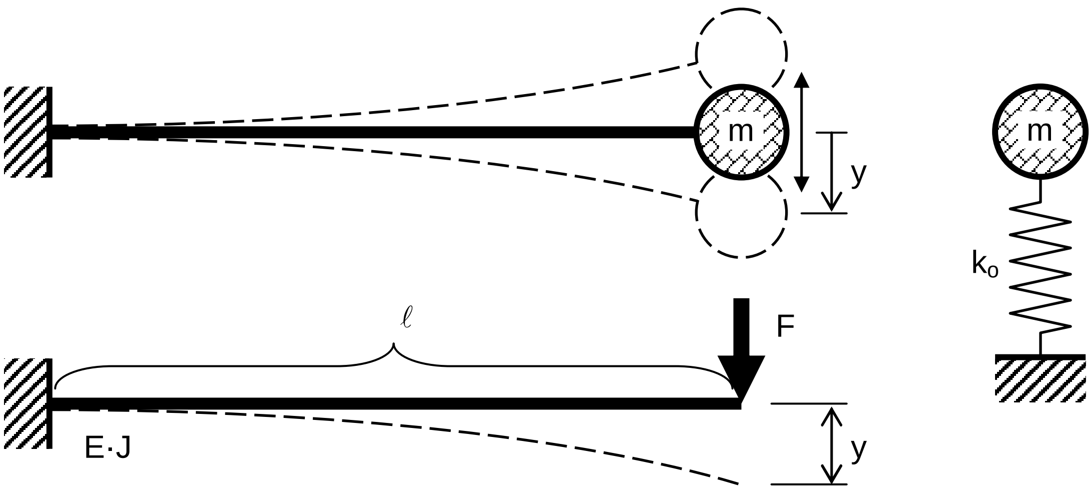
Popsat základní vztahy a zákonitosti ohybového kmitání.

Definovat základní a odvozené veličiny, vztahující se k ohybovému kmitání.

Vyřešit středně těžké úlohy ohybového kmitání.

Výklad

Nejjednodušší mechanický model ohybového kmitání je na obr. 1.44. Je tvořen pružným nosníkem zanedbatelné hmotnosti, na jedné straně dokonale vetknutým, a hmotným bodem o hmotnosti m na volném konci nosníku.



Obr. 1.44 - Model ohybového kmitání.

Zde m - <u>hmotnost</u> [kg],

k_o - <u>ohybová tuhost</u> nosníku [N/m],

E - <u>modul pružnosti</u> materiálu nosníku [Pa] (např. pro ocel je E = 210 GPa),

J - <u>plošný osový moment setrvačnosti</u> průřezu nosníku [m^4]

(např. pro kruhový průřez je $J = \pi \cdot d^4/64$),

ℓ - <u>délka</u> nosníku [m],

y - <u>souřadnice</u>, určující polohu tělesa, rovněž pak <u>deformace</u> nosníku [m].

Pružný nosník, dokonale vetknutý na jednom konci, zatížený silou F na druhém konci, se prohne o průhyb y, přímo úměrný působící síle :

$$y = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

Poměr síly F a ohybové deformace y určuje tzv. ohybovou tuhost nosníku :

$$k_o = \frac{F}{y} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{\ell^3}$$

Pružný nosník se pak chová stejně, jako pružina ve všech předchozích modelech - proti směru deformace působí direkční síla, viz též (1.1) :

$$F_k = k_o \cdot y$$

Pohybová rovnice pak je shodná s (1.2) pro vlastní netlumené kmitání :

$$m \cdot \ddot{y} + k_o \cdot y = 0$$

resp. je shodná s (1.14) pro vlastní tlumené kmitání :

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k_o \cdot y = 0$$

resp. je shodná s (1.42) pro vynucené kmitání :

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k_o \cdot y = F_{(t)} = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Celé následné řešení jak vlastního, tak vynuceného ohybového kmitání pak je shodné s řešením v předchozích kapitolách.

V souvislosti s ohybovým kmitáním bývá někdy definován tzv. příčinkový součinitel λ, pro nějž platí :

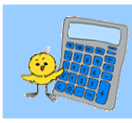
$$y = \lambda \cdot F$$

Snadno nahlédneme, že tento příčinkový součinitel je prostě převrácenou hodnotou tuhosti :

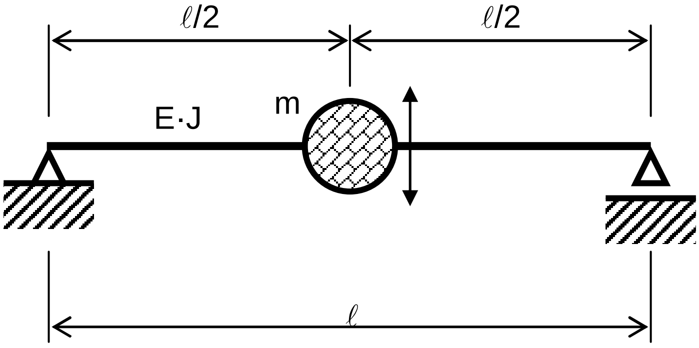
$$y = F \cdot \frac{\ell^3}{3 \cdot E \cdot J} = F \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{\ell^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{1}{k_o}$$

Na základě řešení průhybu dle lineární teorie nosníků lze definovat ohybovou tuhost pro různě uložené nosníky.

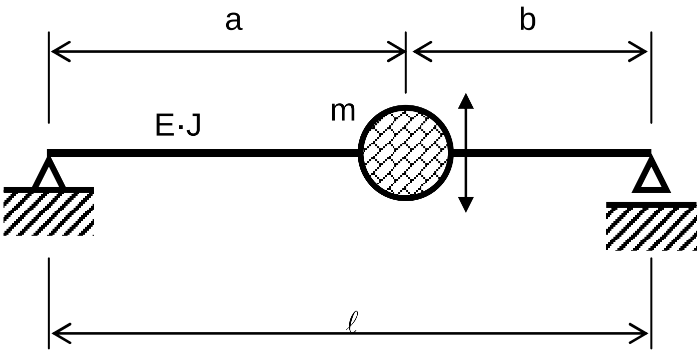


Příklad 1.2 Ohybová tuhost, nosník na dvou podporách.



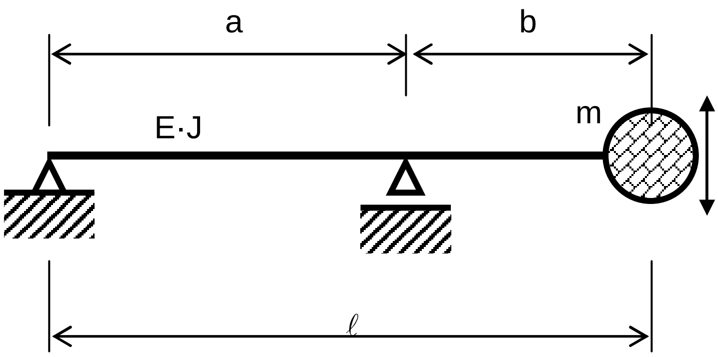
Obr. 1.45 - Nosník na dvou podporách.

$$k_o = \frac{48 \cdot E \cdot J}{\ell^3}$$



Obr. 1.46 - Nosník na dvou podporách s excentrickým uložením tělesa.

$$k_o = \frac{3 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{a^2 \cdot b^2}$$



Obr. 1.47 - Nosník na dvou podporách s převislým koncem.

$$k_o = \frac{3 \cdot E \cdot J}{\ell \cdot b^2}$$

1.4. Tuhost hydraulického systému

Čas ke studiu : 1/2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

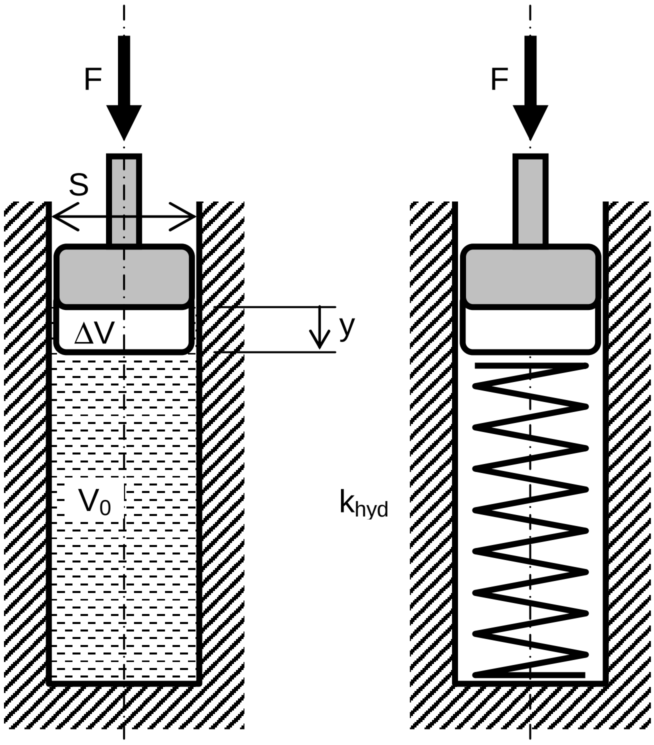
Popsat vlastnosti hydraulické kapaliny, zejména ve vztahu k mechanickému kmitání.

Definovat základní veličiny, vztahující se k tuhosti hydraulického systému.

Vyřešit středně těžké úlohy kmitání hydraulického systému.

Výklad

Pružným členem v kmitající soustavě může být též hydraulický systém, naplněný hydraulickou kapalinou. Uvažujme nejprve hydraulický válec a jeho píst, zatížený silou F, viz obr. 1.48.



Obr. 1.48 - Tuhost sloupce kapaliny.

Zde S - průřezová plocha válce [m^2],

F - zatěžující síla [N],

V_0 - původní objem hydraulické kapaliny [m^3],

ΔV - změna objemu hydraulické kapaliny stlačením [m^3],

K - modul objemové stlačitelnosti kapaliny [Pa] (přibližně K = 1÷2 GPa),

p - hydrostatický tlak [Pa],

y - souřadnice, určující posunutí pístu [m].

Vlivem zatížení silou F dojde ke stlačení kapaliny a k posunutí pístu. Pro stlačení platí :

$$p = K \cdot \frac{\Delta V}{V_0}$$

je-li tlak :

$$p = \frac{F}{S}$$

a stlačený objem :

$$\Delta V = S \cdot y$$

pak :

$$\frac{F}{S} = K \cdot \frac{S \cdot y}{V_0}$$

a nebo :

$$F = K \cdot \frac{S^2}{V_0} \cdot y$$

Zavedeme-li substituci :

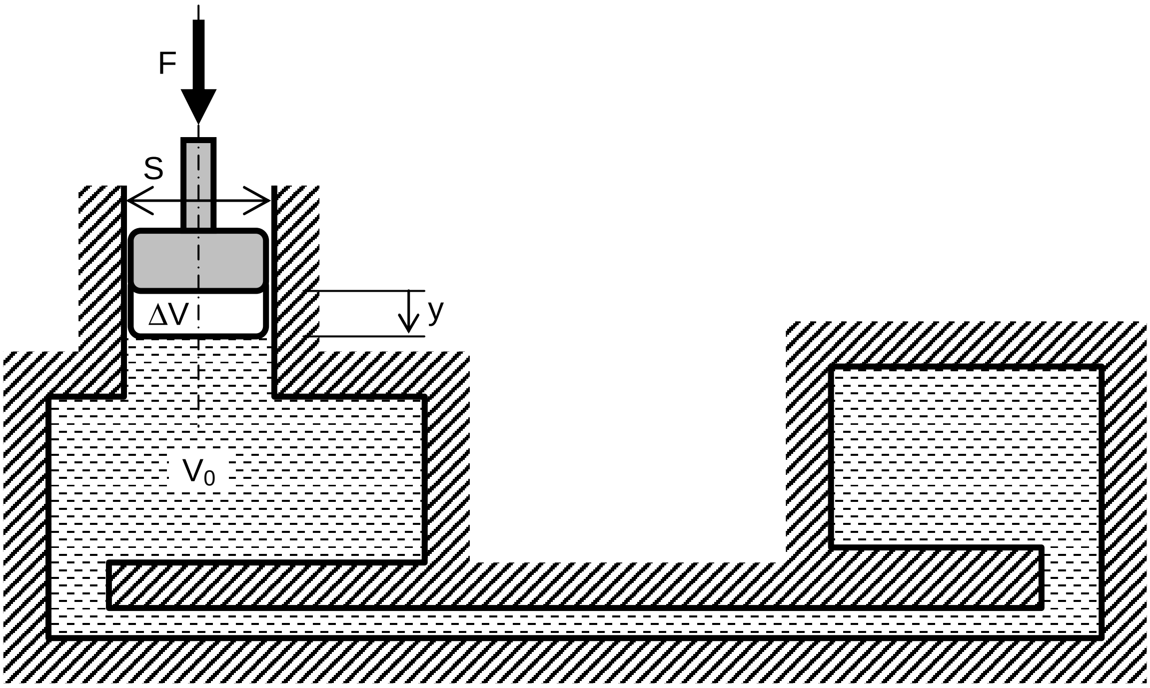
$$k_{hyd} = K \cdot \frac{S^2}{V_0}$$

pak prostě platí :

$$F = k_{hyd} \cdot y$$

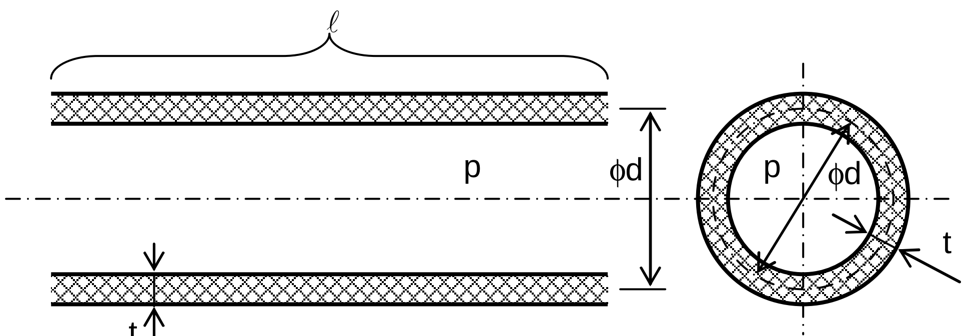
Zavedením parametru hydraulické tuhosti k_{hyd} jako bychom sloupec kapaliny nahradili virtuální pružinou o tuhosti k_{hyd}. Veškeré další řešení vlastního nebo vynuceného kmitání probíhá stejně jako je výše uvedeno.

Povšimneme si, že nezáleží na tom, jaký tvar má objem kapaliny V_0. Může se jednat o složitý hydraulický systém, viz obr. 1.49. Podstatný je celkový objem V_0 a plocha pístu S, na níž dochází ke stlačení kapaliny.



Obr. 1.49 - Tuhost hydraulického systému.

Poddajnost hydraulického systému je dále zvýšena poddajností potrubí resp. hadic. Napěťové poměry v hadici, vystavené vnitřnímu přetlaku, můžeme nejjednodušeji vyšetřovat podle teorie tenkostěnných nádob. Uvažujme hadici délky ℓ, o středním průměru d (tedy nikoliv jmenovitá světlost) a tloušťky t, vystavené vnitřnímu přetlaku p, viz obr. 1.50.



Obr. 1.50 - Poddajnost hadice.

Zde d - <u>střední průměr</u> hadice [m],

t - <u>tloušťka</u> hadice [m],

p - <u>hydrostatický tlak</u> v hadici [Pa],

ℓ - <u>délka</u> hadice [m],

V_0 - <u>objem</u> kapaliny uvnitř hadice [m],

σ_t - <u>obvodové (tangenciální, tečné) napětí</u> [Pa],

E - <u>modul pružnosti v tahu</u> materiálu hadice [Pa],

Δr - změna poloměru hadice [m],

ΔV - změna objemu kapaliny uvnitř hadice [m].

Dle teorie tenkostěnných nádob je obvodové (tečné) napětí ve stěně hadice :

$$\sigma_t = p \cdot \frac{d}{2 \cdot t}$$

a změna poloměru hadice je :

$$\Delta r = \frac{d}{2 \cdot E} \cdot \sigma_t = \frac{d^2 \cdot p}{4 \cdot E \cdot t}$$

Vyjádříme-li počáteční objem kapaliny v hadici jako :

$$V_0 = \tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \ell$$

a změnu objemu :

$$\Delta V \cong \pi \cdot d \cdot \Delta r \cdot \ell$$

kde $\pi \cdot d$ je střední obvod a $\pi \cdot d \cdot \Delta r$ je přibližně plocha mezikruží, pak bude platit :

$$\Delta V \cong \pi \cdot d \cdot \Delta r \cdot \ell = \pi \cdot d \cdot \frac{d^2 \cdot p}{4 \cdot E \cdot t} \cdot \ell = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \ell}{4 \cdot E \cdot t} \cdot \frac{F}{S} = S \cdot y$$

a odtud konečně :

$$F = \frac{4 \cdot E \cdot t \cdot S^2}{\pi \cdot d^3 \cdot \ell} \cdot y$$

Nyní můžeme definovat poddajnost, resp. tuhost hadice :

$$k_{had} = \frac{4 \cdot E \cdot t \cdot S^2}{\pi \cdot d^3 \cdot \ell}$$

pro niž platí :

$$F = k_{had} \cdot y$$

Hydraulická tuhost kapaliny a tuhost hadice nebo více hadic představují sériově zapojené „pružiny“. Celková tuhost tedy je :

$$\frac{1}{k_{celk}} = \frac{1}{k_{hyd}} + \frac{1}{k_{had\_1}} + \frac{1}{k_{had\_2}} + \dots$$

1.5. Kmitání krouživé

Čas ke studiu : 1/2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat zákonitosti krouživého kmitání.

Definovat základní veličiny, vztahující se ke krouživému kmitání, a vztahy mezi nimi.

Vyřešit středně těžké úlohy krouživého kmitání.

Výklad

S krouživým kmitáním se setkáváme ve strojírenství velmi často, neboť rotory a hřídele jsou součástí většiny strojních zařízení. Základní představu o krouživém kmitání získáme řešením jednoduchého mechanického modelu, zakresleného na obr.1.51, který se skládá z hmotného kotouče a nehmotného pružného hřídele. Předpokládáme, že těžiště kotouče je vyoseno o počáteční excentricitu e. Po roztočení kotouče vzniká odstředivá síla a v jejím důsledku dojde k prohnutí hřídele o průhyb y.

Rotací excentricky uložené hmoty vzniká odstředivá síla, jež prohne hřídel :

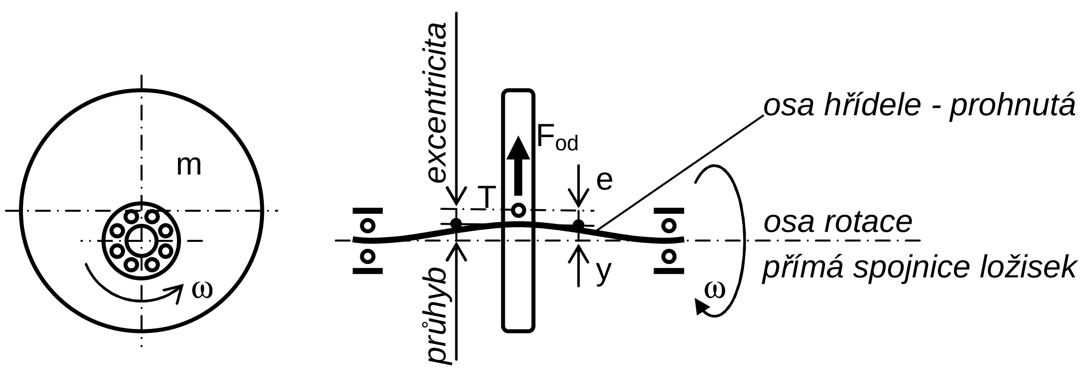
$$F_{od} = m \cdot \omega^2 \cdot (e + y)$$

kde m - hmotnost [kg],

ω - úhlová rychlost rotace [rad/s],

e - excentricita uložení [m] - vzdálenost těžiště od osy hřídele,

y - průhyb hřídele [m].



Obr. 1.51 - Model krouživého kmitání.

Zanedbáme tlumení a vypočteme průhyb od odstředivé síly :

$$y = \frac{F_{od}}{k_o}$$

kde k_o je ohybová tuhost (viz předchozí kapitola). Po dosazení za F_{od} dostaneme :

$$y = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot (e + y)}{k_o}$$

neboli :

$$y = e \cdot \frac{m \cdot \omega^2}{k_o - m \cdot \omega^2}$$

Je-li dále :

$$\Omega_0^2 = \frac{k_o}{m}$$

kvadrát <u>vlastní kruhové frekvence</u> ohybového kmitání, pak průhyb hřídele je :

$$y = e \cdot \frac{\omega^2}{\Omega_0^2 - \omega^2}$$

a nebo :

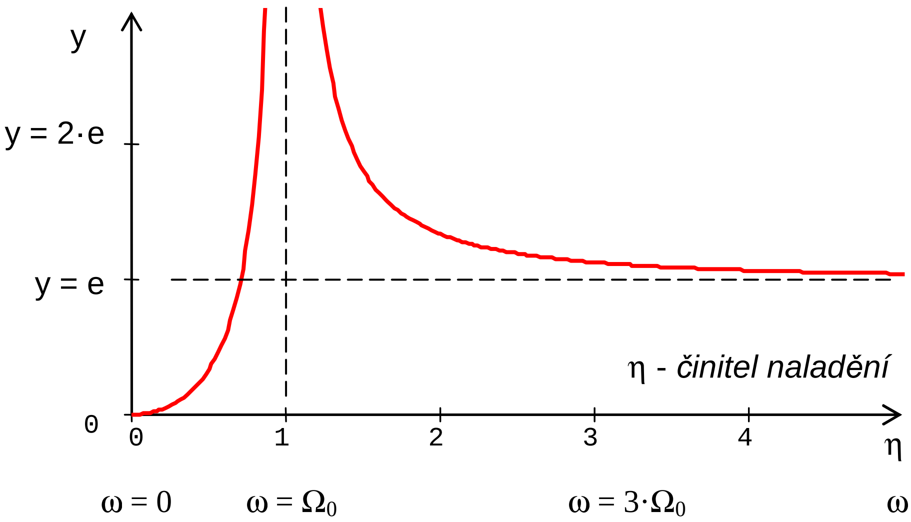
$$y = e \cdot \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$$

kde

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

je <u>činitel naladění</u>, viz výše.

Průhybová charakteristika - závislost průhybu y na úhlové rychlosti rotace ω, resp. na činiteli naladění η, je shodná s řešením kmitání, buzeného odstředivou silou, viz obr. 1.26.



Obr. 1.52 - Průhybová charakteristika.

Průběh lze charakterizovat ve třech bodech :

1) Pro malé otáčky ($\omega \to 0$, $\eta \to 0$) je odstředivá síla minimální a tedy i průhyb je minimální $y \to 0$.

2) Při tzv. kritické úhlové rychlosti $\omega_{kr} \cong \Omega_0$, číselně blízké kruhové frekvenci vlastního ohybového kmitání ($\eta_{kr} \cong 1$) se velmi vysokým průhybem projevuje resonance. Kritické otáčky jsou $n_{kr} = 30 \cdot \omega_{kr}/\pi$ [ot/min].

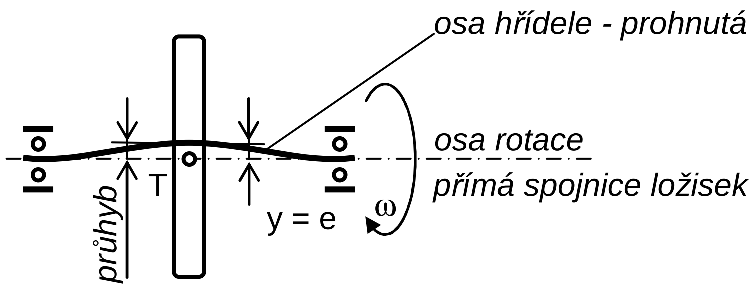
3) Při vysokých otáčkách, $\omega >> \Omega_0$, $\eta >> 1$, se průhyb limitně blíží hodnotě excentricity $y = e$.

Fázový posuv je :

$\phi = 0$ pro $\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$,

$\phi = 180°$ pro $\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$.

To znamená, že při podresonančním naladění ($\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$) je těžiště na vnější straně osy hřídele (tak, jak je to zobrazeno na obr. 1.51).



Obr. 1.53 - Kroužívé kmitání při vysokých otáčkách.

Avšak při nadresonančním naladění ($\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$) se těžiště přemístí na vnitřní stranu osy hřídele, blíže k ose rotace. Při vysokých otáčkách ($\omega >> \Omega_0$, $\eta >> 1$) pak těžiště leží v blízkosti osy rotace, viz obr. 1.53.

Poznámka : Čtenář by měl správně chápat rozdíl mezi ohybovým a kroužívým kmitáním.
Při ohybovém kmitání (viz např. obr. 1.44) dochází ke střídavému ohybu. Bod na horní resp. dolní straně nosníku je vystaven střídavě tahovému a tlakovému namáhání, při průchodu střední polohou je napětí nulové. Nosník sám se neotáčí.
Při kroužívém kmitání (obr. 1.51) je průhybová křivka a tedy i napětí konstantní. Rovina, v níž je hřídel prohnuta, se však otáčí okolo osy rotace. Vlastní kruhová frekvence Ω_0 zde nemá fyzikální význam počtu kmitů za sekundu, násobeného $2\cdot\pi$, neboť nedochází k ohybovému kmitání. Má význam pouze číselného parametru - charakteristiky.
Přestože běžně používáme pojem „kroužívé kmitání“, ve skutečnosti vůbec nejde o kmitavý pohyb (pokud za kmitavý pohyb považujeme periodickou změnu souřadnice z kladné na zápornou hodnotu),

2. Kmitání lineárních soustav s více stupni volnosti

Čas ke studiu : 7 hodin

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat základní vlastnosti a zákonitosti kmitání s více stupni volnosti.

Definovat základní a odvozené veličiny, vztahující se ke kmitání s více stupni volnosti.

Vyřešit středně těžké úlohy kmitání s více stupni volnosti.

Výklad

2.1. Úvod

Pro zohlednění podstatných vlastností reálných mechanických soustav zpravidla nevystačíme s mechanickými modely s jedním stupněm volnosti. Používáme pak mechanické modely s více stupni volnosti. Příklady takových modelů jsou na obr. 2.1.

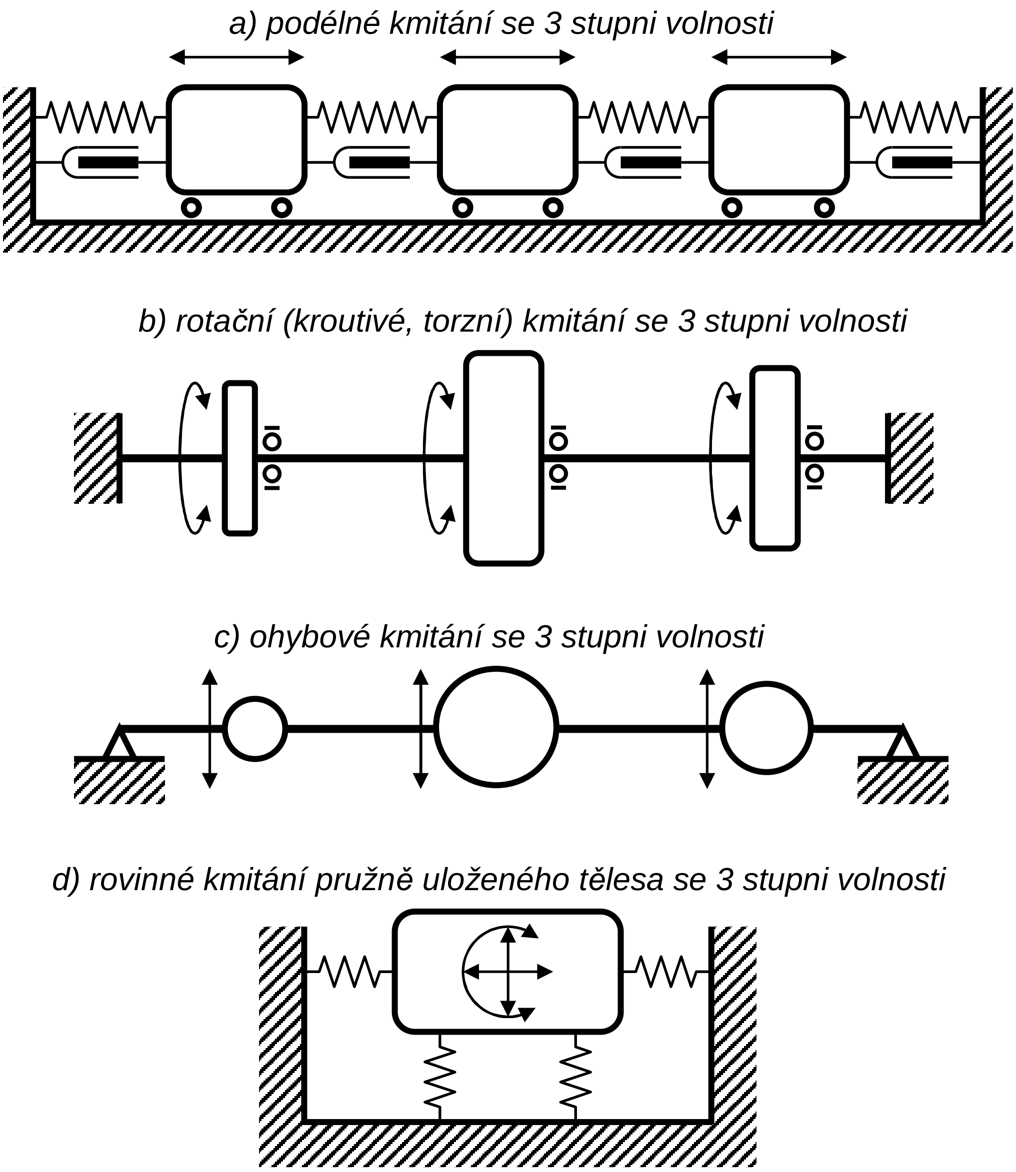
Model a) je model podélného kmitání. Poloha těles m_1, m_2 a m_3 je určena třemi nezávislými souřadnicemi x_1, x_2 a x_3.

Model b) je model rotačního (kroutivého, torzního) kmitání, kde natočení kotoučů o momentech setrvačnosti I_1, I_2 a I_3 je určeno třemi nezávislými souřadnicemi ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3.

Model c) je model ohybového kmitání, kde poloha hmotných bodů m_1, m_2 a m_3 je určena třemi nezávislými souřadnicemi, průhyby y_1, y_2 a y_3.

Model d) je model rovinného kmitání pružně uloženého tělesa. Poloha tělesa je určena souřadnicemi x a y (posunutí) a ϕ (natočení).

Počet nezávislých souřadnic je roven počtu stupňů volnosti. Kmitání soustav s více stupni volnosti je matematicky popsáno tolika pohybovými rovnicemi, kolik má soustava stupňů volnosti. U lineárních soustav se soustředěnými parametry tvoří pohybové rovnice soustavu obyčejných lineárních simultánních diferenciálních rovnic II. řádu s konstantními koeficienty.



Obr. 2.1 - Kmitání s více stupni volnosti - příklady.

2.2. Podélné kmitání soustavy se dvěma stupni volnosti

Čas ke studiu : 4 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

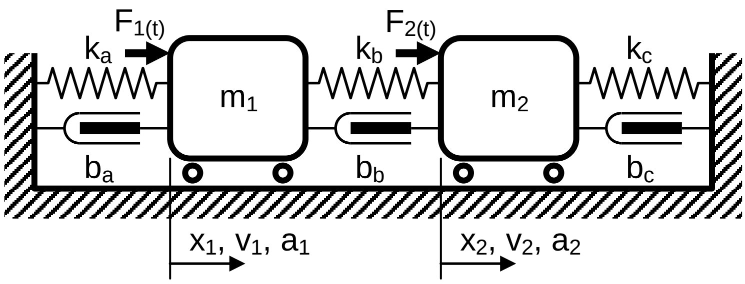
Popsat základní vlastnosti kmitání se dvěma stupni volnosti.

Definovat základní veličiny a vztahy, týkající se kmitáním se dvěma stupni volnosti.

Vyřešit středně těžké úlohy kmitání se dvěma stupni volnosti.

Výklad

Základní pojmy a metodiku řešení kmitání soustav s více stupni volnosti si nejdříve ukážeme na reprezentativním modelu o dvou stupních volnosti, viz obr. 2.2. Výklad poté zobecníme.



Obr. 2.2 - Kmitající soustava se dvěma stupni volnosti.

kde m_1, m_2 - hmotnosti [kg],

k_a, k_b, k_c - tuhosti [N/m],

b_a, b_b, b_c - koeficienty tlumení $[N \cdot m^{-1} \cdot s]$,

x_1, x_2 - souřadnice [m],

v_1, v_2 - rychlosti [m/s],

a_1, a_2 - zrychlení $[m/s^2]$,

$F_{1(t)}$, $F_{2(t)}$ - budící síly [N].

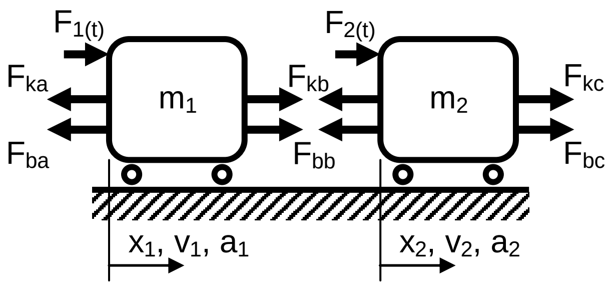
2.2.1. Pohybové rovnice

Odvození pohybových rovnic lze provést metodou uvolňování. Soustavu uvolníme, viz obr. 2.3, a sestavíme pohybové rovnice jednotlivých těles.

V obr. 2.3 jsou : F_{ka}, F_{kb}, F_{kc} - direkční síly [N],

F_{ba}, F_{bb}, F_{bc} - tlumící síly [N].

Poznámka : Při uvolnění uvažujeme všechny direkční i tlumící síly jako tahové.



Obr. 2.3 - Uvolněná soustava.

Pohybové rovnice jsou :

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot a_1 &= \sum_i F_i = F_{1(t)} - F_{ka} - F_{ba} + F_{kb} + F_{bb} \\
m_2 \cdot a_2 &= \sum_i F_i = F_{2(t)} - F_{kb} - F_{bb} + F_{kc} + F_{bc}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Direkční síly jsou :

$$
\begin{aligned}
F_{ka} &= k_a \cdot \Delta\ell_a \\
F_{kb} &= k_b \cdot \Delta\ell_b \\
F_{kc} &= k_c \cdot \Delta\ell_c
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

kde $\Delta\ell_a$, $\Delta\ell_b$ a $\Delta\ell_c$ jsou <u>prodloužení</u> (viz poznámka výše) pružin. Ta vyjádříme ze souřadnic :

$$
\begin{aligned}
\Delta\ell_a &= x_1 \\
\Delta\ell_b &= x_2 - x_1 \\
\Delta\ell_c &= -x_2
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Podobně tlumící síly jsou :

$$
\begin{aligned}
F_{ba} &= b_a \cdot v_{rel\_a} \\
F_{bb} &= b_b \cdot v_{rel\_b} \\
F_{bc} &= b_c \cdot v_{rel\_c}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

kde $v_{rel\ a}$, $v_{rel\ b}$ a $v_{rel\ c}$ jsou relativní rychlosti pístů tlumičů vůči jejich válcům. Vyjádříme je z absolutních rychlostí :

$$
\begin{aligned}
v_{rel\_a} &= v_1 \\
v_{rel\_b} &= v_2 - v_1 \\
v_{rel\_c} &= -v_2
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Po dosazení do pohybových rovnic dostáváme :

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot a_1 &= F_{1(t)} - k_a \cdot x_1 - b_a \cdot v_1 + k_b \cdot (x_2 - x_1) + b_b \cdot (v_2 - v_1) \\
m_2 \cdot a_2 &= F_{2(t)} - k_b \cdot (x_2 - x_1) - b_b \cdot (v_2 - v_1) + k_c \cdot (-x_2) + b_c \cdot (-v_2)
\end{aligned}
$$

Konečně po roznásobení závorek, převedení všech členů, s výjimkou budících sil, na levou stranu rovnice a po vytknutí souřadnic a rychlostí dostáváme :

$$
\begin{aligned}
&m_1 \cdot a_1 + (b_a + b_b) \cdot v_1 - b_b \cdot v_2 + (k_a + k_b) \cdot x_1 - k_b \cdot x_2 = F_{1(t)} \\
&m_2 \cdot a_2 - b_b \cdot v_1 + (b_b + b_c) \cdot v_2 - k_b \cdot x_1 + (k_b + k_c) \cdot x_2 = F_{2(t)} \\
&\text{resp.:} \\
&m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (b_a + b_b) \cdot \dot{x}_1 - b_b \cdot \dot{x}_2 + (k_a + k_b) \cdot x_1 - k_b \cdot x_2 = F_{1(t)} \\
&m_2 \cdot \ddot{x}_2 - b_b \cdot \dot{x}_1 + (b_b + b_c) \cdot \dot{x}_2 - k_b \cdot x_1 + (k_b + k_c) \cdot x_2 = F_{2(t)}
\end{aligned}
$$

Použijeme-li dále substituce :

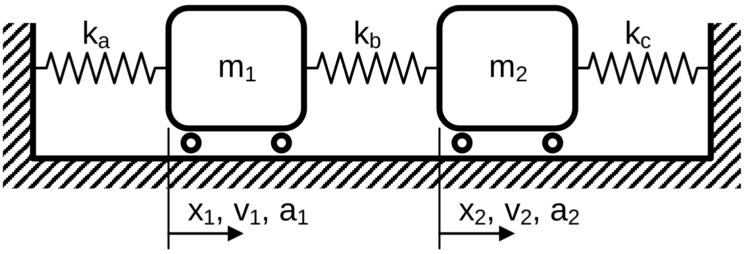
$$\begin{aligned} b_{11} &= b_a + b_b \\ b_{12} &= b_{21} = -b_b \\ b_{22} &= b_b + b_c \\ k_{11} &= k_a + k_b \\ k_{12} &= k_{21} = -k_b \\ k_{22} &= k_b + k_c \end{aligned} \tag{2.6}$$

budou pohybové rovnice mít tvar :

$$\begin{aligned} & m_1 \cdot a_1 + b_{11} \cdot v_1 + b_{12} \cdot v_2 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 = F_{1(t)} \\ & m_2 \cdot a_2 + b_{21} \cdot v_1 + b_{22} \cdot v_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 = F_{2(t)} \\ & \text{resp.:} \\ & m_1 \cdot \ddot{x}_1 + b_{11} \cdot \dot{x}_1 + b_{12} \cdot \dot{x}_2 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 = F_{1(t)} \\ & m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b_{21} \cdot \dot{x}_1 + b_{22} \cdot \dot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 = F_{2(t)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.2. Volné netlumené kmitání

Pro volné netlumené kmitání (obr. 2.4) zanedbáváme tlumení, tedy $b_a = b_b = b_c = b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ a rovněž budící síly jsou nulové, tedy $F_1 = F_2 = 0$.



Obr. 2.4 - Kmitající netlumená soustava se dvěma stupni volnosti.

Pohybové rovnice (2.7) pak mají tvar :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 &= 0 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Předpokládejme řešení :

$$\begin{aligned} & x_{1(t)} = C_1 \cdot \mathit{sin}(\Omega_0 \cdot t + \phi) \\ & x_{2(t)} = C_2 \cdot \mathit{sin}(\Omega_0 \cdot t + \phi) \\ & \text{a dále:} \\ & \ddot{x}_{1(t)} = -C_1 \cdot \Omega_0^{\ 2} \cdot \mathit{sin}(\Omega_0 \cdot t + \phi) \\ & \ddot{x}_{2(t)} = -C_2 \cdot \Omega_0^{\ 2} \cdot \mathit{sin}(\Omega_0 \cdot t + \phi) \end{aligned} \tag{2.9}$$

kde Ω_0 je vlastní kruhová frekvence.

Po dosazení do pohybových rovnic (2.8) a vykrácení členů $sin(\Omega_0 \cdot t+\phi)$ dostáváme :

$$\begin{aligned} \left(k_{11} - m_1 \cdot \Omega_0^{\ 2}\right) \cdot C_1 + k_{12} \cdot C_2 &= 0 \\ k_{21} \cdot C_1 + \left(k_{22} - m_2 \cdot \Omega_0^{\ 2}\right) \cdot C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tím se soustava homogenních diferenciálních rovnic II. řádu změnila v soustavu homogenních algebraických rovnic pro neznámé C_1 = ? a C_2 = ?.

Soustava rovnic (2.10) má přirozeně triviální řešení $C_1 = C_2 = 0$. Hledáme však netriviální řešení $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Podmínka existence netriviálního řešení je, že determinant soustavy musí být roven nule. V teorii kmitání se tento determinant nazývá <u>frekvenční determinant</u>.

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \cdot \Omega_0^{\ 2} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \cdot \Omega_0^{\ 2} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.11}$$

Rozvedením frekvenčního determinantu dostáváme bikvadratickou rovnici :

$$\left(k_{11} - m_1 \cdot \Omega_0^{\ 2}\right) \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \Omega_0^{\ 2}\right) - k_{12} \cdot k_{21} = 0$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \Omega_0^{\ 4} - \left(k_{11} \cdot m_2 + k_{22} \cdot m_1\right) \cdot \Omega_0^{\ 2} + k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21} = 0 \tag{2.12}$$

nebo při substituci :

$$\lambda = \Omega_0^{\ 2} \tag{2.13}$$

kde λ je tzv. <u>vlastní číslo</u>, dostáváme kvadratickou rovnici :

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \lambda^2 - \left(k_{11} \cdot m_2 + k_{22} \cdot m_1\right) \cdot \lambda + k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21} = 0 \tag{2.14}$$

Její řešení je :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(k_{11} \cdot m_2 + k_{22} \cdot m_1\right) \pm \sqrt{\left(k_{11} \cdot m_2 + k_{22} \cdot m_1\right)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}\right)}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2}$$

nebo :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)^2 - \frac{k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}}{m_1 \cdot m_2}}$$

nebo :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2}\right)^2 + \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{m_1 \cdot m_2}}$$

Dva kořeny vlastní kruhové frekvence pak jsou :

$$\Omega_{0\_1,2}=\sqrt{\lambda_{1,2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{k_{11}}{m_1}-\frac{k_{22}}{m_2}\right)^2+\frac{k_{12}\cdot k_{21}}{m_1\cdot m_2}}} \tag{2.15}$$

Obě vlastní kruhové frekvence Ω_{0_1} a Ω_{0_2} jsou reálná, kladná čísla. Obecně tedy má systém se 2 stupni volnosti 2 různé vlastní frekvence. Tyto vlastní frekvence <u>zásadně vždy</u> řadíme podle velikosti : $\Omega_{0\_1} < \Omega_{0\_2}$. Ve zvláštních případech může být $\Omega_{0\_1} = \Omega_{0\_2}$ nebo $\Omega_{0\_1} = 0$.

Dosazením Ω_{0_1} resp. Ω_{0_2} do (2.10) dostáváme, vzhledem k faktu, že determinant soustavy je roven nule, lineárně závislé rovnice. Z nich lze určit jen poměr amplitud :

$$\begin{gathered}\frac{C_1}{C_2}=\frac{-k_{12}}{k_{11}-m_1\cdot\Omega_{0\_1}^{\;2}}=\frac{k_{22}-m_2\cdot\Omega_{0\_1}^{\;2}}{-k_{21}}\\ \text{resp.:}\\ \frac{C_1}{C_2}=\frac{-k_{12}}{k_{11}-m_1\cdot\Omega_{0\_2}^{\;2}}=\frac{k_{22}-m_2\cdot\Omega_{0\_2}^{\;2}}{-k_{21}}\end{gathered} \tag{2.16}$$

Vypočteme-li :

$$\begin{aligned}v_{11}&=-k_{12}\\ v_{21}&=k_{11}-m_1\cdot\Omega_{0\_1}^{\;2}\\ v_{12}&=-k_{12}\\ v_{22}&=k_{11}-m_1\cdot\Omega_{0\_2}^{\;2}\end{aligned} \tag{2.17}$$

nebo :

$$\begin{aligned}v_{11}&=k_{22}-m_2\cdot\Omega_{0\_1}^{\;2}\\ v_{21}&=-k_{21}\\ v_{12}&=k_{22}-m_2\cdot\Omega_{0\_2}^{\;2}\\ v_{22}&=-k_{21}\end{aligned} \tag{2.18}$$

je zřejmé, že :

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{v_{11}}{v_{21}} \tag{2.19}$$

při kmitání s první vlastní kruhovou frekvencí Ω_{0_1}, resp. :

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{v_{12}}{v_{22}} \tag{2.20}$$

při kmitání s druhou vlastní kruhovou frekvencí Ω_{0_2}.

Je také zřejmé, že členy v_{ij} můžeme vypočíst jako libovolné násobky výrazů (2.17) nebo (2.18) a poměry (2.19) resp. (2.20) zůstanou zachovány :

$$\begin{aligned} v_{11} &= \mu_1 \cdot (-k_{12}) \\ v_{21} &= \mu_1 \cdot \left(k_{11} - m_1 \cdot \Omega_{0\_1}{}^2\right) \\ v_{12} &= \mu_2 \cdot (-k_{12}) \\ v_{22} &= \mu_2 \cdot \left(k_{11} - m_1 \cdot \Omega_{0\_2}{}^2\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

kde μ_1 a μ_2 jsou libovolná čísla.

Poznámka : Zde v_{ij} jsou čísla, mající fyzikální význam posunutí nebo jeho násobku. Je třeba si tyto hodnoty neplést s rychlostí !

Sloupcové matice (vektory) :

$$\mathbf{V}^{\langle 1 \rangle} = \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{Bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{V}^{\langle 2 \rangle} = \begin{Bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

jsou tzv. <u>vlastní vektory</u> nebo též <u>modální vektory</u> nebo tzv. <u>vlastní tvary kmitání</u>. Určují poměr amplitud jednotlivých souřadnic při kmitání s první, resp. druhou vlastní frekvencí. Kmitání s první resp. druhou vlastní frekvencí se řídí funkcemi :

$$\begin{aligned} & x_{1(t)} = v_{11} \cdot \sin\left(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1\right) \\ & x_{2(t)} = v_{21} \cdot \sin\left(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1\right) \\ & \text{resp.:} \\ & x_{1(t)} = v_{12} \cdot \sin\left(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2\right) \\ & x_{2(t)} = v_{22} \cdot \sin\left(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Protože informační význam má poměr hodnot $\dfrac{v_{2j}}{v_{1j}}$ (kde j=1 nebo j=2), nikoliv hodnoty samé, bývá zvykem vlastní vektory <u>normovat</u>. Normování vlastního vektoru $\mathbf{V}^{\langle j \rangle} = \begin{Bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \end{Bmatrix}$ spočívá v tom, že všechny jeho prvky se vynásobí nebo vydělí stejným číslem. Hodnoty v_{ij} se sice změní, ale poměry $\dfrac{v_{2j}}{v_{1j}}$ zůstanou zachovány. Nejjednodušším způsobem normování je tzv. <u>normování na jedničku</u>. Všechny prvky vektoru $\mathbf{V}^{\langle j \rangle}$ se vydělí největším prvkem vektoru :

$$\mathbf{V1}^{\langle j\rangle} = \frac{\mathbf{V}^{\langle j\rangle}}{max\left(\mathbf{V}^{\langle j\rangle}\right)} \tag{2.24}$$

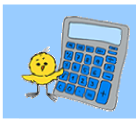
Výsledkem je vlastní vektor $\mathbf{V1}^{\langle j\rangle}$, v němž největší prvek má hodnotu 1, ostatní jsou v příslušném poměru menší.

Jiný častý způsob normování vlastních tvarů je tzv. normování podle matice hmot. Jestliže každý prvek vlastního tvaru **v** vydělíme hodnotou $\sqrt{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}}$, kde $\mathbf{v}^T$ je transponovaný vlastní tvar (zapsaný jako řádek), pak bude platit

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = 1$$

Vlastní tvary obvykle uspořádáváme do tzv. modální matice neboli matice vlastních tvarů **V**. Vlastní tvary, příslušející jednotlivým vlastním frekvencím, jsou zde jednotlivé sloupce modální matice, zatímco její řádky přísluší jednotlivým souřadnicím.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow x_1 \\ \longrightarrow x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad\downarrow & \downarrow \\ \quad\quad\Omega_{0\_1} & \Omega_{0\_2} \end{array} & \end{array} \tag{2.25}$$



Příklad 2.1a Vlastní netlumené kmitání se dvěma stupni volnosti, parametry.

Je-li v příkladu dle obr. 2.4 :

m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, k_a = 3 N/mm, k_b = 2 N/mm, k_c = 1 N/mm,

pak dle (2.15) jsou vlastní kruhové frekvence :

$$\Omega_{0\_1} = 31{,}6\ s^{-1} \qquad\qquad \Omega_{0\_2} = 74{,}2\ s^{-1}$$

dále vlastní tvary dle (2.17) jsou :

$$\mathbf{V}^{\langle 1\rangle} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 4000 \end{Bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{V}^{\langle 2\rangle} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ -500 \end{Bmatrix}$$

a konečně vlastní tvary, normované na jedničku jsou :

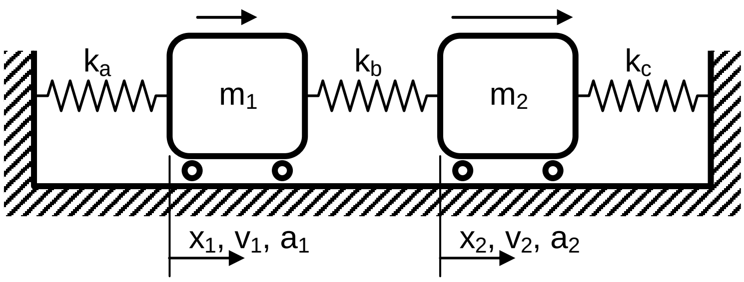
$$\mathbf{V1}^{\langle 1\rangle} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{V1}^{\langle 2\rangle} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}25 \end{Bmatrix}$$

Vlastním tvarům je třeba rozumět takto :

Při kmitání s první vlastní kruhovou frekvencí $\Omega_{0\_1} = 31{,}6\ s^{-1}$ budou amplitudy souřadnic x_1 a x_2 v poměru 0,5 : 1, při kmitání s druhou vlastní kruhovou frekvencí $\Omega_{0\_2} = 74{,}2\ s^{-1}$ budou amplitudy souřadnic x_1 a x_2 v poměru 1 : -0,25 (tělesa budou kmitat v protifázi - proti sobě).

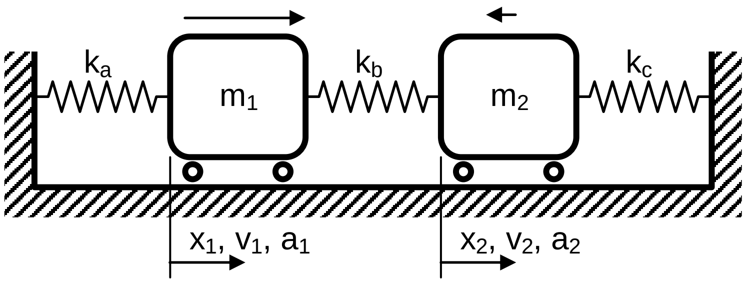
první vlastní tvar

$x_{1(t)} = 0{,}5 \cdot \mu_1 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1)$ $\qquad$ $x_{2(t)} = \mu_1 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1)$



druhý vlastní tvar

$x_{1(t)} = \mu_2 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)$ $\qquad$ $x_{2(t)} = -0{,}25 \cdot \mu_2 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)$



Obr. 2.5 - Vlastní tvary kmitání.

Obecné řešení kmitání je dáno lineární kombinací vlastních kmitů (2.23).

$$\begin{aligned} x_{1(t)} &= \mu_1 \cdot v_{11} \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1) + \mu_2 \cdot v_{12} \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2) \\ x_{2(t)} &= \mu_1 \cdot v_{21} \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1) + \mu_2 \cdot v_{22} \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Poznámka : Povšimneme si, že poměr :

$$\frac{\mu_1 \cdot v_{11} \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1)}{\mu_1 \cdot v_{21} \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1)} = \frac{v_{11}}{v_{21}}$$

a podobně :

$$\frac{\mu_2 \cdot v_{12} \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)}{\mu_2 \cdot v_{22} \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)} = \frac{v_{12}}{v_{22}}$$

Koeficienty lineární kombinace μ_1 a μ_2, jakož i fázové posuvy ϕ_1 a ϕ_2, jsou integrační konstanty a jejich hodnoty určíme z počátečních podmínek :

t = 0 ... $x_{1(t=0)} = x_{10}$, $v_{1(t=0)} = v_{10}$, $x_{2(t=0)} = x_{20}$, $v_{2(t=0)} = v_{20}$.

Za tím účelem použijeme řešení (2.26) ve tvaru :

$$\begin{aligned}
x_{1(t)} &= v_{11} \cdot \left[A_1 \cdot cos\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right) + B_1 \cdot sin\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right)\right] + \\
&\quad + v_{12} \cdot \left[A_2 \cdot cos\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right) + B_2 \cdot sin\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right)\right] \\
x_{2(t)} &= v_{21} \cdot \left[A_1 \cdot cos\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right) + B_1 \cdot sin\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right)\right] + \\
&\quad + v_{22} \cdot \left[A_2 \cdot cos\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right) + B_2 \cdot sin\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right)\right] \\
v_1 &= \dot{x}_1 = v_{11} \cdot \Omega_{0_1} \cdot \left[-A_1 \cdot sin\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right) + B_1 \cdot cos\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right)\right] + \\
&\quad + v_{12} \cdot \Omega_{0_2} \cdot \left[-A_2 \cdot sin\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right) + B_2 \cdot cos\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right)\right] \\
v_2 &= \dot{x}_2 = v_{21} \cdot \Omega_{0_1} \cdot \left[-A_1 \cdot sin\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right) + B_1 \cdot cos\left(\Omega_{0_1} \cdot t\right)\right] + \\
&\quad + v_{22} \cdot \Omega_{0_2} \cdot \left[-A_2 \cdot sin\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right) + B_2 \cdot cos\left(\Omega_{0_2} \cdot t\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Poznámka : Stejně, jako je uvedeno v poznámce k rovnicím (2.21), i zde je třeba si uvědomit, že zatímco v_1 a v_2 ve výrazech (2.27) na levé straně jsou rychlosti, v_{11}, v_{12}, v_{21} a v_{22} na pravé straně jsou prvky ve vlastních vektorech, mající fyzikální význam posunutí.

Po dosazení výše uvedených počátečních podmínek do výrazů (2.27) dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic :

$$\begin{aligned}
v_{11} \cdot A_1 + v_{12} \cdot A_2 &= x_{10} \\
v_{21} \cdot A_1 + v_{22} \cdot A_2 &= x_{20} \\
v_{11} \cdot \Omega_{0_1} \cdot B_1 + v_{12} \cdot \Omega_{0_2} \cdot B_2 &= v_{10} \\
v_{21} \cdot \Omega_{0_1} \cdot B_1 + v_{22} \cdot \Omega_{0_2} \cdot B_2 &= v_{20}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Řešením soustavy jsou integrační konstanty A_1, A_2, B_1 a B_2.

Dále pak :

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sqrt{A_1^{\;2} + B_1^{\;2}} \\
\phi_1 &= arctan\frac{A_1}{B_1} \\
\mu_2 &= \sqrt{A_2^{\;2} + B_2^{\;2}} \\
\phi_2 &= arctan\frac{A_2}{B_2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

jsou integrační konstanty, použité v (2.26). Je-li konečný tvar řešení :

$$\begin{aligned} x_{1(t)} &= C_{11} \cdot sin\left(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1\right) + C_{12} \cdot sin\left(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2\right) \\ x_{2(t)} &= C_{21} \cdot sin\left(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1\right) + C_{22} \cdot sin\left(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

pak :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \mu_1 \cdot v_{11} \\ C_{12} &= \mu_2 \cdot v_{12} \\ C_{21} &= \mu_1 \cdot v_{21} \\ C_{22} &= \mu_2 \cdot v_{22} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Poznámka : Koeficienty C_{ij} bychom asi neměli nazývat amplitudami ve smyslu největší výchylky. Vzhledem k tomu, že Ω_{0_1} a Ω_{0_2} jsou rozdílné vlastní kruhové frekvence, funkce (2.26) jsou neperiodické. Otázkou je, zda lze vůbec nalézt skutečnou maximální výchylku. Naproti tomu lze poměrně snadno stanovit limitní hodnoty x_{1lim} a x_{2lim}, pro něž platí :

$$\begin{aligned} x_{1(t)} &\le x_{1lim} \\ x_{2(t)} &\le x_{2lim} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $sin(\Omega_0 \cdot t+\phi) \le 1$, pak limitní hodnoty budou :

$$\begin{aligned} x_{1lim} &= \left|C_{11}\right| + \left|C_{12}\right| \\ x_{2lim} &= \left|C_{21}\right| + \left|C_{22}\right| \end{aligned}$$

Příklad 2.1b Vlastní netlumené kmitání se dvěma stupni volnosti, integrační konstanty.

Pro výše uvedený příklad s číselným zadáním :

m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, k_a = 3 N/mm, k_b = 2 N/mm, k_c = 1 N/mm,

a pro počáteční podmínky :

t = 0 ... $x_{1(t=0)} = x_{10}$ = 10 mm, $v_{1(t=0)} = v_{10}$ = 1 m/s, $x_{2(t=0)} = x_{20}$ = 8 mm, $v_{2(t=0)} = v_{20}$ = 0,2 m/s,

vychází z (2.28) :

A_1 = 9,33 mm, A_2 = 5,33 mm, B_1 = 12,65 mm, B_2 = 10,79 mm.

Dále dle (2.29) :

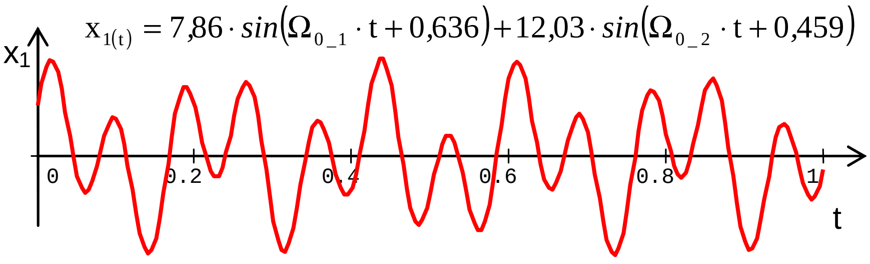
μ_1 = 15,7 mm, μ_2 = 12,0 mm, ϕ_1 = 36,4°, ϕ_2 = 26,3°.

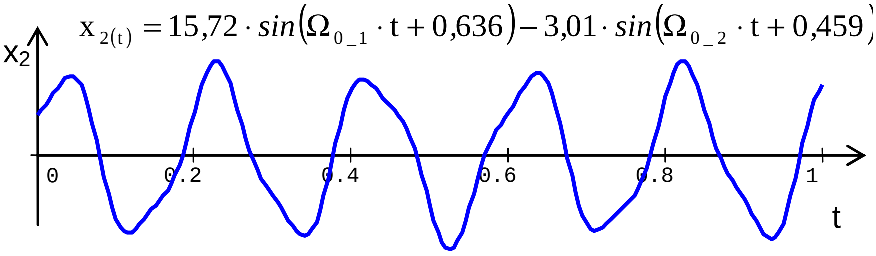
A konečně dle (2.31) :

C_{11} = 7,86 mm, C_{12} = 12,03 mm, C_{21} = 15,72 mm, C_{22} = -3,01 mm.

Neboli :

$$x_{1(t)} = 7{,}86 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + 0{,}636) + 12{,}03 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + 0{,}459)$$
$$x_{2(t)} = 15{,}72 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + 0{,}636) - 3{,}01 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + 0{,}459)$$





Obr. 2.6 - Časový průběh souřadnic x_1 a x_2.

Časový průběh po dobu jedné sekundy je zobrazen na obr. 2.6. Zdůrazněme však že jde o neperiodický průběh.

2.2.3. Ortogonalita vlastních tvarů

Dokážeme že platí :

$$m_1 \cdot v_{11} \cdot v_{12} + m_2 \cdot v_{21} \cdot v_{22} = 0 \tag{2.32}$$

resp. :

$$m_1 + m_2 \cdot \frac{v_{21} \cdot v_{22}}{v_{11} \cdot v_{12}} = 0 \tag{2.33}$$

Poměry $\frac{v_{21}}{v_{11}}$ a $\frac{v_{22}}{v_{12}}$ můžeme vyjádřit jak z (2.17) tak z (2.18). Např. tedy :

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = \frac{k_{11} - m_1 \cdot \Omega_{0\_1}^2}{-k_{12}}$$
$$\frac{v_{22}}{v_{12}} = \frac{-k_{21}}{k_{22} - m_2 \cdot \Omega_{0\_2}^2}$$

Rovnici (2.33) tedy můžeme upravit na :

$$m_1 + m_2 \cdot \frac{k_{11} - m_1 \cdot \Omega_{0\_1}^2}{-k_{12}} \cdot \frac{-k_{21}}{k_{22} - m_2 \cdot \Omega_{0\_2}^2} = 0$$

Dále členy k_{12} a k_{21} se vykrátí protože dle (2.6) je $k_{12} = k_{21} = -k_b$. Po vynásobení jmenovatelem dostáváme :

$$m_1 \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \Omega_{0\_2}^2\right) + m_2 \cdot \left(k_{11} - m_1 \cdot \Omega_{0\_1}^2\right) = 0$$

Po vydělení součinem $m_1 \cdot m_2$ a po vykrácení m_1 resp. m_2 dostáváme :

$$\frac{k_{22}}{m_2} - \Omega_{0\_2}^2 + \frac{k_{11}}{m_1} - \Omega_{0\_1}^2 = 0$$

resp. :

$$\frac{k_{22}}{m_2} + \frac{k_{11}}{m_1} - \left(\Omega_{0\_1}^2 + \Omega_{0\_2}^2\right) = 0$$

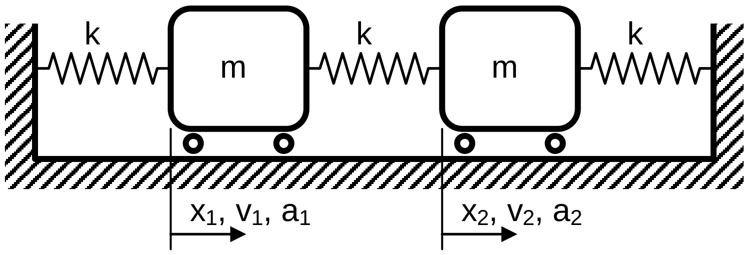
Z výrazu (2.15) však vyplývá :

$$\Omega_{0\_1}^2 + \Omega_{0\_2}^2 = \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}$$

Rovnice (2.32) je tedy splněna. Vlastnost, vyjádřená touto rovnicí, se nazývá <u>ortogonalita vlastních tvarů</u> (s vahami m_1 a m_2). Vztah (2.32) slouží ke kontrole přesnosti vypočtených nebo naměřených vlastních tvarů. Ortogonalitu vlastních tvarů budeme využívat při řešení kmitání tzv. metodou modální transformace.

2.2.4. Hlavní souřadnice

Pohybové rovnice (2.8) jsou soustavou simultánních diferenciálních rovnic (v každé rovnici jsou obě neznámé x_1 a x_2). Ukážeme, že existují tzv. hlavní souřadnice, nebo též modální souřadnice, pro které se soustava (2.8) rozpadne na dvě samostatné, nezávislé rovnice, každá o jedné neznámé. Řešení nejprve provedeme pro zvláštní případ dle obr. 2.4, kdy $m_1 = m_2 = m$, a dále $k_a = k_b = k_c = k$.



Obr. 2.7 - Kmitající netlumená soustava se dvěma stupni volnosti.

Pohybové rovnice (2.8) mají tvar :

$$\begin{aligned} m\cdot\ddot{x}_1 + 2\cdot k\cdot x_1 - k\cdot x_2 &= 0 \\ m\cdot\ddot{x}_2 - k\cdot x_1 + 2\cdot k\cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Sečtením obou rovnic, resp. odečtením první od druhé, dostáváme :

$$\begin{aligned} m\cdot(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k\cdot(x_1 + x_2) &= 0 \\ m\cdot(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + 3\cdot k\cdot(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

To nás přivede k zavedení substituce :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + x_1 \\ y_2 &= x_2 - x_1 \\ \ddot{y}_1 &= \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_2 &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \end{aligned} \qquad (2.35)$$

kde y_1 a y_2 jsou tzv. hlavní souřadnice. Pohybové rovnice (2.34) pak mají tvar :

$$\begin{aligned} m\cdot\ddot{y}_1 + k\cdot y_1 &= 0 \\ m\cdot\ddot{y}_2 + 3\cdot k\cdot y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.36)$$

což je soustava dvou samostatných, nezávislých rovnic (v každé rovnici je jen jedna neznámá). Někdy se v této souvislosti mluví o dvou nezávislých oscilátorech, jejichž poloha je dána právě hlavními souřadnicemi y_1 a y_2.

Řešení soustavy (2.36) odpovídá řešení kmitání s jedním stupněm volnosti (viz kapitola 1.) :

$$y_1 = C_1 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1)$$
$$y_2 = C_2 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2) \tag{2.37}$$

kde :

$$\Omega_{0\_1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\Omega_{0\_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k}{m}} \tag{2.38}$$

a C_1, C_2, ϕ_1 a ϕ_2 jsou integrační konstanty, jejichž hodnotu určíme z počátečních podmínek. Snadno se přesvědčíme, že výrazy (2.15) pro $\Omega_{0\_1,2}$ při $m_1 = m_2 = m$, a dále $k_a = k_b = k_c = k$ zcela odpovídají výrazům (2.38).

Hlavní souřadnice y_1 a y_2 mají fyzikální význam : y_1 je dvojnásobek aritmetického průměru původních souřadnic x_1 a x_2, y_2 je jejich rozdíl, vzdálenost mezi tělesy m_1 a m_2. Funkce $y_{1(t)}$ v (2.37) tedy popisuje pohyb středního bodu mezi oběma tělesy, funkce $y_{2(t)}$ v (2.37) popisuje jak se od sebe obě tělesa vzdalují a zase přibližují.

Tzv. zpětná transformace, přechod od hlavních souřadnic y_1 a y_2 k původním souřadnicím x_1 a x_2, je prostá :

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (y_1 - y_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[C_1 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1) - C_2 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)\right]$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[C_1 \cdot sin(\Omega_{0\_1} \cdot t + \phi_1) + C_2 \cdot sin(\Omega_{0\_2} \cdot t + \phi_2)\right] \tag{2.39}$$

V obecném případě, kdy $m_1 \neq m_2$ a $k_a \neq k_b \neq k_c$, jsou hlavní souřadnice y_1 a y_2 lineární kombinací původních souřadnic x_1 a x_2. Podrobným řešením lze ukázat, že :

$$x_1 = v_{11} \cdot y_1 + v_{12} \cdot y_2$$
$$x_2 = v_{21} \cdot y_1 + v_{22} \cdot y_2 \tag{2.40}$$

neboli :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

neboli :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{V} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

kde **V** je výše definovaná <u>modální matice</u> neboli matice vlastních tvarů.

Hlavní souřadnice pak jsou :

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

kde $\mathbf{V}^{-1}$ je matice inverzní k modální matici.

Poznámka : matice inverzní je matice, jež vynásobena původní maticí, dá jednotkovou matici.

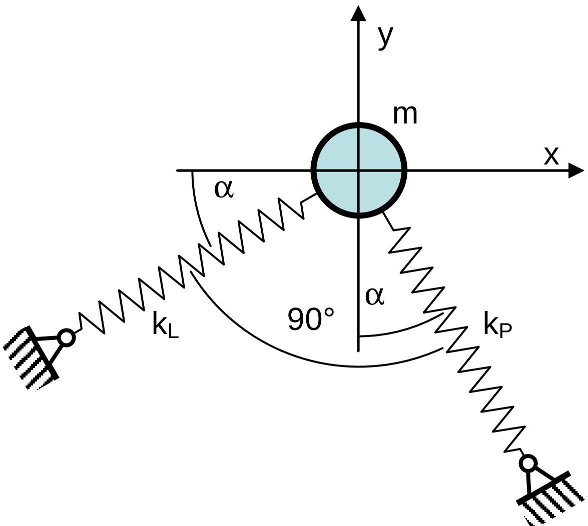
$$\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V tomto případě již hlavní souřadnice y_1 a y_2 nemají přímý fyzikální význam, jsou prostě lineární kombinací původních souřadnic x_1 a x_2.

Pojmy „vlastní tvary“, „ortogonalita vlastních tvarů“ a „hlavní souřadnice“ vysvětlíme nyní na jiném příkladu, kde budou názornější.

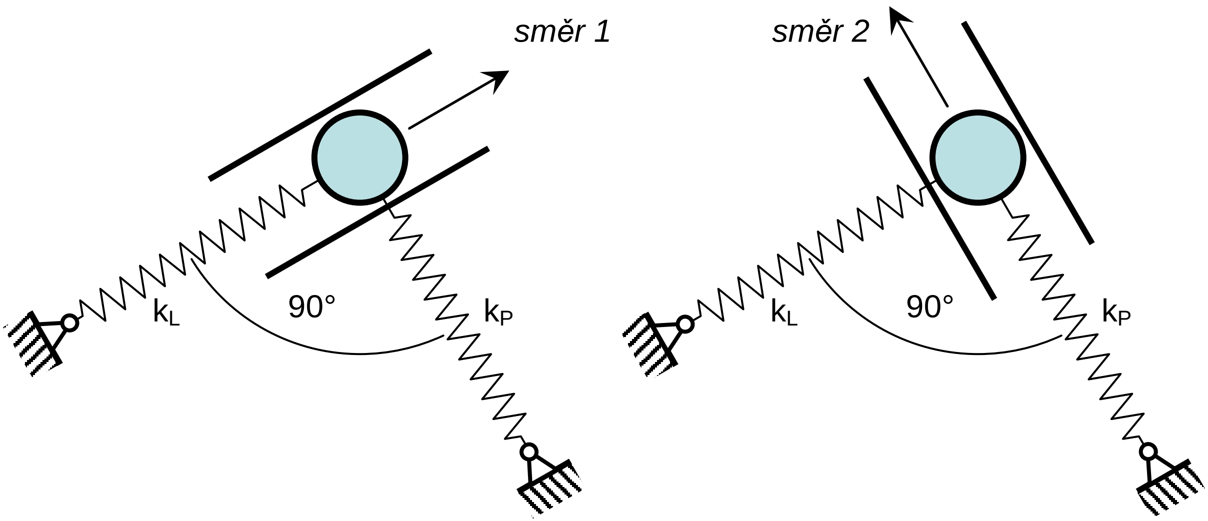
Příklad 2.2 Kmitání se dvěma stupni volnosti.

Hmotný bod o hmotnosti m = 1 kg je uchycen na dvou pružinách, levé a pravé, viz obr. 2.8. Tuhost levé pružiny je k_L = 2 N/mm, tuhost pravé pružiny je k_P = 3 N/mm. Obě pružiny jsou k sobě kolmé a svírají s vodorovnou osou x (levá pružina), resp. se svislou osou y (pravá pružina) úhel α = 33°. Hmotný bod je veden v rovině x-y a koná rovinný kmitavý pohyb se dvěma stupni volnosti. Jeho poloha je určena souřadnicemi x a y.



Obr. 2.8 - Hmotný bod, kmitající v rovině.

Ještě než zahájíme vlastní řešení, provedeme jednoduchou úvahu.

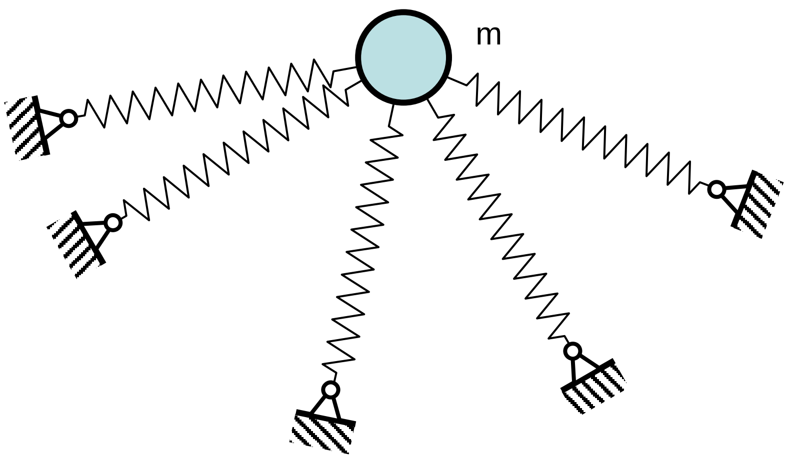


Obr. 2.9 - Hmotný bod, kmitající v rovině.

Obě pružiny, k sobě navzájem kolmé, definují dva směry, viz obr. 2.9. Nazvěme je pracovně „*směr 1*“ a „*směr 2*“. Bude-li hmotný bod kmitat ve „*směru 1*“, nebude docházet k deformaci pravé pružiny (za předpokladu velmi malého rozkmitu ve srovnání s délkou pružiny). Naopak bude-li hmotný bod kmitat ve „*směru 2*“, nebude docházet k deformaci levé pružiny. Lze tedy kmitání v obou směrech řešit samostatně, nezávisle, jako kmitání s jedním stupněm volnosti. Pak pro oba směry můžeme např. vypočíst vlastní kruhové frekvence :

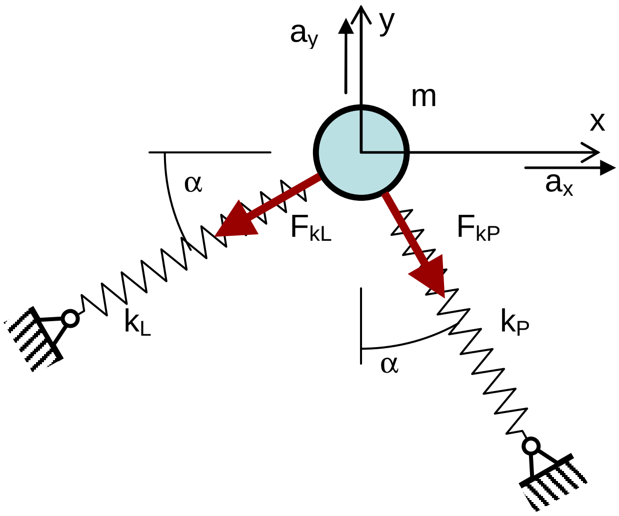
$$\begin{aligned} \Omega_{0\_1} &= \sqrt{\frac{k_L}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{1}} = 44{,}7\,\mathrm{sek}^{-1} \\ \Omega_{0\_2} &= \sqrt{\frac{k_P}{m}} = \sqrt{\frac{3000}{1}} = 54{,}8\,\mathrm{sek}^{-1} \end{aligned} \qquad (2.43)$$

S tímto přístupem však dlouho nevystačíme. Nebudou-li pružiny k sobě kolmé, nebo bude-li jich více (viz obr. 2.10), nelze již tak snadno definovat oba směry.



Obr. 2.10 - Hmotný bod, kmitající v rovině.

Budeme tedy postupovat systematicky a sestavíme pohybové rovnice pro souřadnice x a y, viz obr. 2.11. Ve směrech souřadných os uvažujeme složky celkového zrychlení hmotného bodu a_x a a_y. Dále uvažujeme posunutí hmotného bodu o souřadnice x a y a s tím související deformaci obou pružin a vznik direkčních sil F_{kL} a F_{kP}.



Obr. 2.11 - Hmotný bod rovině, silový rozbor.

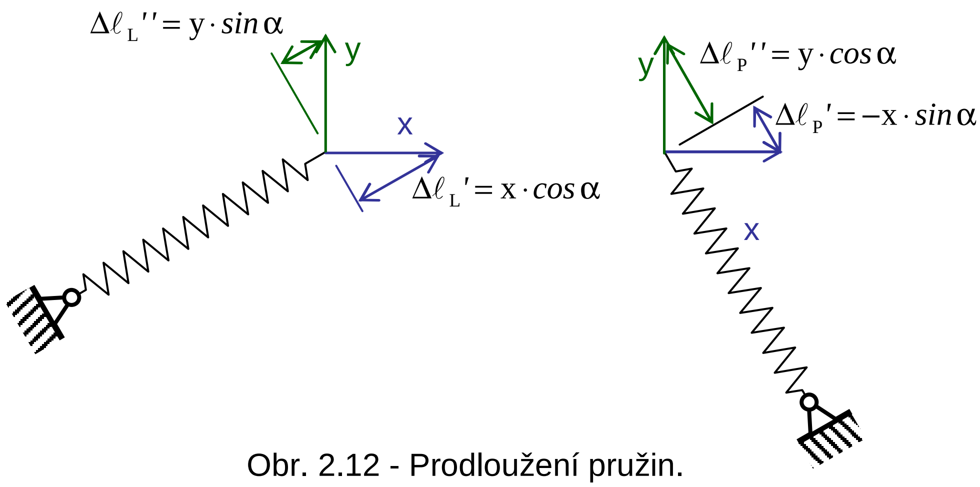
Pohybové rovnice hmotného bodu jsou :

$$m \cdot a_x = -F_{kL} \cdot \cos\alpha + F_{kP} \cdot \sin\alpha$$
$$m \cdot a_y = -F_{kL} \cdot \sin\alpha - F_{kP} \cdot \cos\alpha$$

Direkční síly jsou :

$$F_{kL} = k_L \cdot \Delta\ell_L$$
$$F_{kP} = k_P \cdot \Delta\ell_P$$

kde k_L a k_P jsou tuhosti pružin, $\Delta\ell_L$ a $\Delta\ell_P$ jsou deformace - prodloužení pružin.



Obr. 2.12 - Prodloužení pružin.

Budeme-li uvažovat zvlášť posunutí jen ve směru x a pak zase posunutí jen ve směru y, superpozicí určíme velikost prodloužení pružin jako funkci posunutí x a y, viz obr. 2.12.

$$\Delta\ell_L = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$
$$\Delta\ell_P = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

Poznámka : Zde uvedený výpočet deformací platí pouze do té míry, do jaké je posunutí x a y velmi malé ve srovnání s délkou pružin.

Z uvedeného konečně sestavíme pohybové rovnice hmotného bodu, kmitajícího v rovině :

$$m \cdot a_x = -k_L \cdot (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\alpha + k_P \cdot (-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$$
$$m \cdot a_y = -k_L \cdot (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha - k_P \cdot (-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\alpha$$

a konečně :

$$\begin{aligned} m \cdot a_x + \left(k_L \cdot \cos^2\alpha + k_P \cdot \sin^2\alpha\right) \cdot x + (k_L - k_P) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y = 0 \\ m \cdot a_y + (k_L - k_P) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot x + \left(k_L \cdot \sin^2\alpha + k_P \cdot \cos^2\alpha\right) \cdot y = 0 \end{aligned} \qquad (2.44)$$

neboli :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + k_{11} \cdot x + k_{12} \cdot y = 0 \\ m \cdot \ddot{y} + k_{21} \cdot x + k_{22} \cdot y = 0 \end{aligned} \qquad (2.45)$$

je-li :

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_L \cdot \cos^2\alpha + k_P \cdot \sin^2\alpha \\ k_{12} &= k_{21} = (k_L - k_P) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ k_{22} &= k_L \cdot \sin^2\alpha + k_P \cdot \cos^2\alpha \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Pohybové rovnice (2.45) jsou formálně shodné s rovnicemi (2.8) při $m_1 = m_2 = m$. Můžeme tedy vypočíst vlastní kruhové frekvence dle (2.15) :

$$\Omega_{0\_1,2} = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (k_{11} + k_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (k_{11} - k_{22})^2 + k_{12} \cdot k_{21}}\right]} \qquad (2.47)$$

Dosadíme-li výrazy (2.46) a uvážíme-li dále, že :

$$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2 \cdot \alpha)$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2 \cdot \alpha)$$

dostáváme v souladu s (2.43) :

$$\begin{aligned} \Omega_{0\_1} &= \sqrt{\frac{k_L}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{1}} = 44{,}7\,\text{sek}^{-1} \\ \Omega_{0\_2} &= \sqrt{\frac{k_P}{m}} = \sqrt{\frac{3000}{1}} = 54{,}8\,\text{sek}^{-1} \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Je ovšem zřejmé, že narozdíl od úvahy, popsané v souvislosti s obrázkem 2.9, uvedený postup je proveditelný i v případě uložení hmotného bodu na složitějším systému pružin dle obr. 2.10. Rozdíl je pouze v počtu sčítanců v substitučních vztazích (2.46).

Dále provedeme výpočet vlastních tvarů dle (2.17) :

$$\mathrm{v}_{11} = -\mathrm{k}_{12} = -(\mathrm{k}_L - \mathrm{k}_P)\cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\mathrm{v}_{21} = \mathrm{k}_{11} - \mathrm{m}_1 \cdot \Omega_{0\_1}{}^2 = \mathrm{k}_L \cdot \cos^2\alpha + \mathrm{k}_P \cdot \sin^2\alpha - \mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{k}_L}{\mathrm{m}}$$
$$\mathrm{v}_{12} = -\mathrm{k}_{12} = -(\mathrm{k}_L - \mathrm{k}_P)\cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\mathrm{v}_{22} = \mathrm{k}_{11} - \mathrm{m}_1 \cdot \Omega_{0\_2}{}^2 = \mathrm{k}_L \cdot \cos^2\alpha + \mathrm{k}_P \cdot \sin^2\alpha - \mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{k}_P}{\mathrm{m}}$$

První a druhý vlastní tvar jsou poměry :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{v}_{11}}{\mathrm{v}_{21}} &= \frac{(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\mathrm{k}_L\cdot\cos^2\alpha + \mathrm{k}_P\cdot\sin^2\alpha - \mathrm{k}_L} = \frac{(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot\sin^2\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}\\ \frac{\mathrm{v}_{12}}{\mathrm{v}_{22}} &= \frac{(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\mathrm{k}_L\cdot\cos^2\alpha + \mathrm{k}_P\cdot\sin^2\alpha - \mathrm{k}_P} = \frac{(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-(\mathrm{k}_P - \mathrm{k}_L)\cdot\cos^2\alpha} = -\tan\alpha\end{aligned} \tag{2.49}$$

Vlastní tvary, normované na jedničku, pak jsou :

$$\mathbf{V}^{\langle 1\rangle} = \begin{Bmatrix}1\\ \tan\alpha\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 0{,}649\end{Bmatrix} \qquad \mathbf{V}^{\langle 2\rangle} = \begin{Bmatrix}-\tan\alpha\\ 1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-0{,}649\\ 1\end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

konečně modální matice je :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -0{,}649\\ 0{,}649 & 1\end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Nyní si uvědomíme, jaký druh informace nám vlastní tvary přináší. Jsou to poměry amplitud jednotlivých souřadnic (zde x a y) při kmitání s první resp. druhou vlastní frekvencí.

Při kmitání s první vlastní frekvencí $\Omega_{0\_1} = 44{,}7\ s^{-1}$, jsou souřadnice x a y v poměru 1 : *tan*α. To znamená, že první vlastní tvar je kmitání pod úhlem α = 33° vůči vodorovné ose, tedy kmitání ve „*směru 1*“ dle obr. 2.9.

Při kmitání s druhou vlastní frekvencí $\Omega_{0\_2} = 54{,}8\ s^{-1}$, jsou souřadnice x a y v poměru -*tan*α : 1. To znamená, že druhý vlastní tvar je kmitání pod úhlem α = 33° vůči svislé ose, tedy kmitání ve „*směru 2*“ dle obr. 2.9.

V kapitole 2.2.3. byla definována a dokázána důležitá vlastnost vlastních tvarů - ortogonalita. V tomto případě má ortogonalita vlastních tvarů význam geometrické kolmosti. První vlastní tvar („*směr 1*“ na obr. 2.9) a druhý vlastní tvar („*směr 2*“ na obr. 2.9) jsou k sobě kolmé.
V naprosté většině ostatních případů však ortogonalitu nelze takto přímo geometricky interpretovat.

Uvážíme dále transformaci do hlavních souřadnic dle (2.40) resp. (2.41) v kap. 2.2.4. Hlavní souřadnice zde označíme s_1 a s_2 :

$$x = v_{11} \cdot s_1 + v_{12} \cdot s_2$$
$$y = v_{21} \cdot s_1 + v_{22} \cdot s_2$$

resp. :

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Použijeme-li modální matici **V** dle (2.51), kde oba vlastní tvary vynásobíme *cos*α, tedy :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$$

a inverzní matice je :

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$$

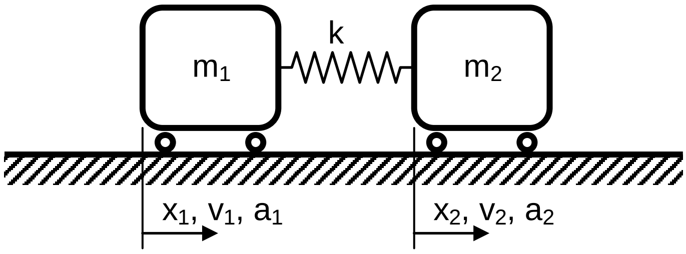
uvědomíme si, že se jedná o transformační matici pro souřadný systém, natočený o úhel α. Hlavní souřadnice s_1 a s_2 jsou tedy pravoúhlé souřadnice, natočené vůči osám x a y o úhel α, tedy souřadnice ve „*směru 1*“ a „*směru 2*“ na obr. 2.9.

Takováto přímá geometrická interpretace hlavních souřadnic je ovšem výjimečná. Obvykle jsou hlavní souřadnice lineární kombinací fyzikálních souřadnic bez přímé geometrické interpretace.

Ukážeme nyní dva zvláštní případy řešení vlastních frekvencí a vlastních tvarů.

Kmitání volné soustavy

První zvláštní případ bude dle výpočtového modelu na obr. 2.4, ovšem pro tuhosti $k_a = k_c = 0$, $k_b = k \neq 0$.



Obr. 2.13 - Kmitání volné soustavy.

Z výrazu (2.15) lze po několika úpravách dospět k řešení vlastních kruhových frekvencí :

$$\Omega_{0\_1,2} = \sqrt{\frac{k}{2} \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \pm \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)}$$

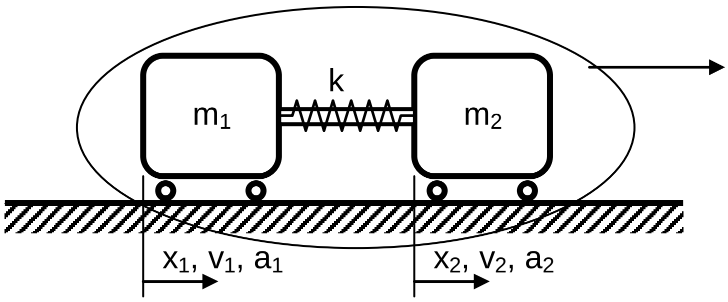
Je zřejmé, že první vlastní frekvence je nulová :

$$\Omega_{0\_1} = 0$$

druhá je nenulová :

$$\Omega_{0\_2} = \sqrt{k \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

Tato situace, kdy první vlastní frekvence je nulová, nastává vždy tehdy, když soustava není vázána k rámu a má možnost pohybu jakožto tuhé těleso.



Obr. 2.14 - Pohyb soustavy jakožto tuhého tělesa.

Dokonce při řešení v trojrozměrném prostoru, kdy tuhé těleso má 6 stupňů volnosti, tři posuvy a tři rotace, dává řešení kmitající soustavy, nevázané k rámu, 6 nulových vlastních frekvencí, teprve 7. vlastní frekvence je nenulová. Jiný příklad bude uveden v souvislosti s torzním kmitáním.

Vlastní tvary dle (2.17), normované na 1, ve zde uvedeném příkladu jsou :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{m_1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Tedy :

Při „kmitání“ první vlastní frekvencí, která je ovšem nulová, jsou si výchylky obou těles rovny - soustava se pohybuje rovnoměrně jako celek, vzdálenost mezi oběma tělesy se nemění.

Při kmitání druhou vlastní frekvencí je poměr výchylek obou těles roven obrácenému poměru jejich hmotností a kmitají v protifázi - proti sobě. Např. je-li první těleso těžké a druhé lehké, kmitá první těleso málo, druhé hodně.

Dále z (2.42) můžeme definovat tzv. <u>hlavní souřadnice</u>.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{V} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

neboli :

$$y_1 + y_2 = x_1$$

$$y_1 - \frac{m_1}{m_2} \cdot y_2 = x_2$$

Snadno odvodíme, že :

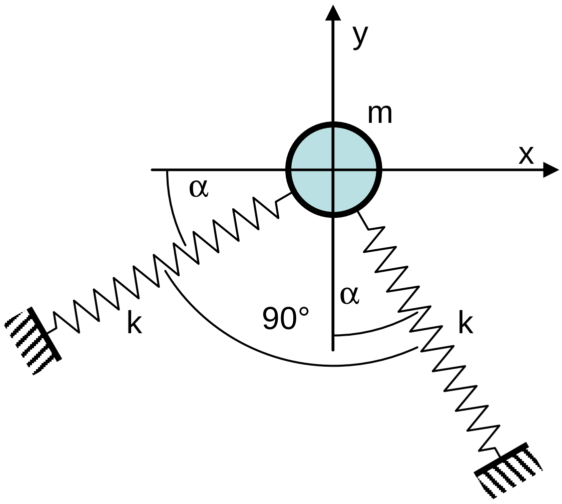
$$y_1 = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_2 = \frac{x_1 - x_2}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}$$

První hlavní souřadnice y_1 vyjadřuje polohu středu hmotnosti obou těles, její změna vyjadřuje rovnoměrný pohyb soustavy jako celku. Druhá hlavní souřadnice y_2 (někdy ji nazýváme „relativní souřadnice“) je určitá část rozdílu obou souřadnic x_1 a x_2 (např. pro m_1=m_2 je to polovina tohoto rozdílu). Změna hlavní souřadnice y_2 vyjadřuje relativní pohyb obou těles vůči pohybujícímu se středu hmotnosti.

Kmitání symetrické soustavy

Druhý zvláštní případ ukážeme na příkladu hmotného bodu na dvou pružinách dle obr. 2.8. Budeme však uvažovat obě pružiny shodné - $k_L = k_P = k$.



Obr. 2.15 - Symetrická soustava.

Vlastní kruhové frekvence dle (2.48) a pro $k_L = k_P = k$ jsou :

$$\Omega_{0\_1} = \Omega_{0\_2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

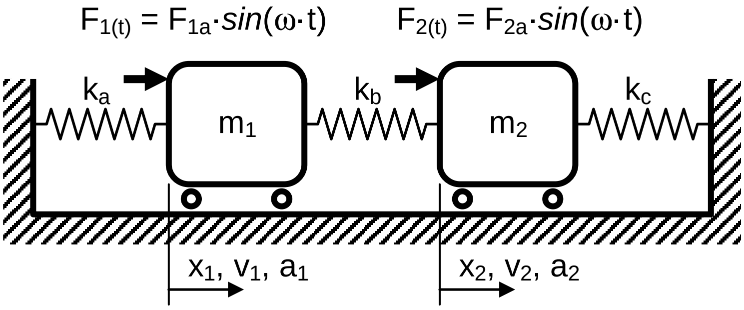
Jedná se o tzv. násobné vlastní frekvence. Ovšem oběma shodným vlastním kruhovým frekvencím $\Omega_{01} = \Omega_{02}$ odpovídají odlišné vlastní tvary, viz (2.49) :

$$\mathbf{V}^{\langle 1 \rangle} = \begin{Bmatrix} 1 \\ tan\,\alpha \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{V}^{\langle 2 \rangle} = \begin{Bmatrix} -tan\,\alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Jedná se o typický rys soustav, vyznačujících se symetrií. Ve vzestupné řadě vlastních frekvencí se objevují páry stejných (nebo téměř stejných) hodnot. Těmto shodným, tzv. násobným frekvencím, však přísluší odlišné vlastní tvary. Při vyšetřování modálních vlastností soustavy je třeba hlídat, abychom k násobným vlastním frekvencím přiřadili všechny platné vlastní tvary. To se provádí např. tzv. Sturmovou posloupností.

2.2.5. Vynucené netlumené kmitání - budící síla harmonického průběhu

Řešení vynuceného kmitání bude ukázáno na mechanickém modelu dle obr. 2.16.



Obr. 2.16 - Kmitající netlumená soustava buzená.

Zde $F_{1(t)}$ - harmonicky proměnná budící síla, působící na první těleso [N],

$F_{2(t)}$ - harmonicky proměnná budící síla, působící na druhé těleso [N],

F_{1a}, F_{2a} - amplituda budící síly [N],

ω - kruhová frekvence budící síly [s^{-1}].

Pohybové rovnice v souladu s (2.6) a (2.7) a pro $b_a = b_b = b_c = 0$ (netlumené kmitání) budou :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 &= F_{1(t)} = F_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 &= F_{2(t)} = F_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{2.52}$$

V souladu s partikulárním řešení kmitání s jedním stupněm volnosti předpokládáme řešení pohybových rovnic (2.52) ve tvaru :

$$\begin{aligned} x_{1\_part} &= x_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) \\ x_{2\_part} &= x_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{2.53}$$

a dále :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1\_part} &= -x_{1a} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) \\ \ddot{x}_{2\_part} &= -x_{2a} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

kde x_{1a} a x_{2a} jsou amplitudy ustáleného vynuceného kmitání.

Po dosazení do pohybových rovnic (2.52) dostáváme :

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot x_{1a} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) + k_{11} \cdot x_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) + k_{12} \cdot x_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) &= F_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) \\ -m_2 \cdot x_{2a} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) + k_{21} \cdot x_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) + k_{22} \cdot x_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) &= F_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

a po vykrácení členů $sin(\omega \cdot t)$ a vytknutí amplitud konečně dostáváme lineární soustavu dvou algebraických rovnic o dvou neznámých - amplitudách x_{1a} a x_{2a} :

$$\begin{aligned} \left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) \cdot x_{1a} + k_{12} \cdot x_{2a} &= F_{1a} \\ k_{21} \cdot x_{1a} + \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) \cdot x_{2a} &= F_{2a} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ačkoliv se jedná o poměrně jednoduchou matematickou úlohu, zaslouží si podrobnější diskuzi. Řešení soustavy (2.54) můžeme provést například Cramerovým pravidlem :

$$x_{1a} = \frac{D_1}{D} \qquad x_{2a} = \frac{D_2}{D} \tag{2.55}$$

kde :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} F_{1a} & k_{12} \\ F_{2a} & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = F_{1a} \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) - F_{2a} \cdot k_{12} \\
D_2 &= \begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & F_{1a} \\ k_{21} & F_{2a} \end{vmatrix} = F_{2a} \cdot \left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) - F_{1a} \cdot k_{21} \\
D &= \begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) - k_{12} \cdot k_{21}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Nyní připomeneme řešení vlastní kruhové frekvence Ω_0 dle (2.11) resp. (2.12). Kořeny této rovnice - vlastní kruhové frekvence Ω_{0_1} a Ω_{0_2} - představují kořenové činitele rozvoje determinantu D v (2.56). Tento determinant můžeme tedy vyjádřit též jako :

$$D = m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_2}{}^2\right) \tag{2.57}$$

Řešení rovnic (2.54) pak bude :

$$\begin{aligned}
x_{1a} &= \frac{D_1}{D} = \frac{F_{1a} \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) - F_{2a} \cdot k_{12}}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0_2}{}^2\right)} \\
x_{2a} &= \frac{D_2}{D} = \frac{F_{2a} \cdot \left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) - F_{1a} \cdot k_{21}}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0_2}{}^2\right)}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Tyto vztahy udávají závislost amplitud ustálených vynucených kmitů na budící frekvenci. Jejich grafy na obr. 2.18 jsou amplitudové charakteristiky soustavy.
Řešení (2.58) ukazuje dva kvalitativní závěry :

1. Rezonance

Je zřejmé, že (analogicky k řešení vynuceného kmitání s jedním stupněm volnosti) může nastat situace, zvaná rezonance. Je-li $\omega = \Omega_{0\_1}$ nebo $\omega = \Omega_{0\_2}$ narůstá amplituda obou souřadnic nade všechny meze. V praxi definujeme rezonanci jako stav, kdy budící frekvence je číselně blízká některé z vlastních frekvencí ($\omega \cong \Omega_{0\_1}$ nebo $\omega \cong \Omega_{0\_2}$), amplituda ustáleného vynuceného kmitání dosahuje velmi vysokých hodnot.

2. Antirezonance

Je-li :

$$\frac{F_{2a}}{F_{1a}} = \frac{k_{22} - m_2 \cdot \omega^2}{k_{12}} \tag{2.59a}$$

je :

$$x_{1a} = 0$$

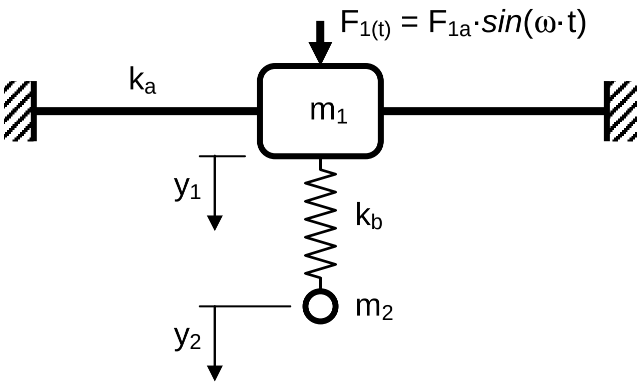
resp. je-li :

$$\frac{F_{1a}}{F_{2a}} = \frac{k_{11} - m_1 \cdot \omega^2}{k_{21}} \tag{2.59b}$$

je :

$$x_{2a} = 0$$

Typickou praktickou aplikací antirezonance je konstrukce tzv. antivibrátorů neboli dynamických hltičů vibrací. K soustavě s jedním stupněm volnosti, tvořené hmotou m_1 a tuhostí k_a, viz obr. 2.17 (zde příklad ohybového kmitání), přidáme hmotu m_2 na tuhosti k_b, tuhost $k_c = 0$ (třetí pružina vůbec není použita). Obvykle je hmotnost $m_2 << m_1$. Na základní těleso m_1 působí budící síla F_1, na těleso m_2 nepůsobí žádná budící síla, $F_{2a} = 0$.



Obr. 2.17 - Soustava s antivibrátorem.

Zvolíme-li hmotnost m_2 a tuhost k_b tak, aby platilo :

$$\omega^2 = \frac{k_{22}}{m_2} = \frac{k_b}{m_2} \tag{2.60}$$

pak základní těleso m_1 vůbec nebude kmitat, $x_{1a} = 0$. Vliv budící síly F_1 bude zcela eliminován kmitáním antivibrátoru o hmotnosti m_2. V praxi se zřídka kdy podaří vibrace tělesa m_1 zcela eliminovat, úspěšně se však daří je minimalizovat.

Příklad 2.3 Vynucené kmitání se dvěma stupni volnosti.

Pro úlohu dle obr. 2.17 a pro číselné zadání :

m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, k_a = 3 N/mm, k_b = 2 N/mm, k_c = 0, F_{1a} = 1 N, F_{2a} = 0

jsou na obr. 2.18 amplitudové charakteristiky, tedy závislosti amplitud x_{1a} a x_{2a} na kruhové frekvenci budící síly ω. Na průbězích můžeme pozorovat následující zajímavé situace :

Statická deformace

Pro ω = 0 (konstantní síla F_1) odpovídají amplitudy statickým výchylkám :

$$x_{1a} = x_{2a} = x_{1stat} = x_{2stat} = \frac{F_{1a}}{k_a} = 0{,}333\,\text{mm}$$

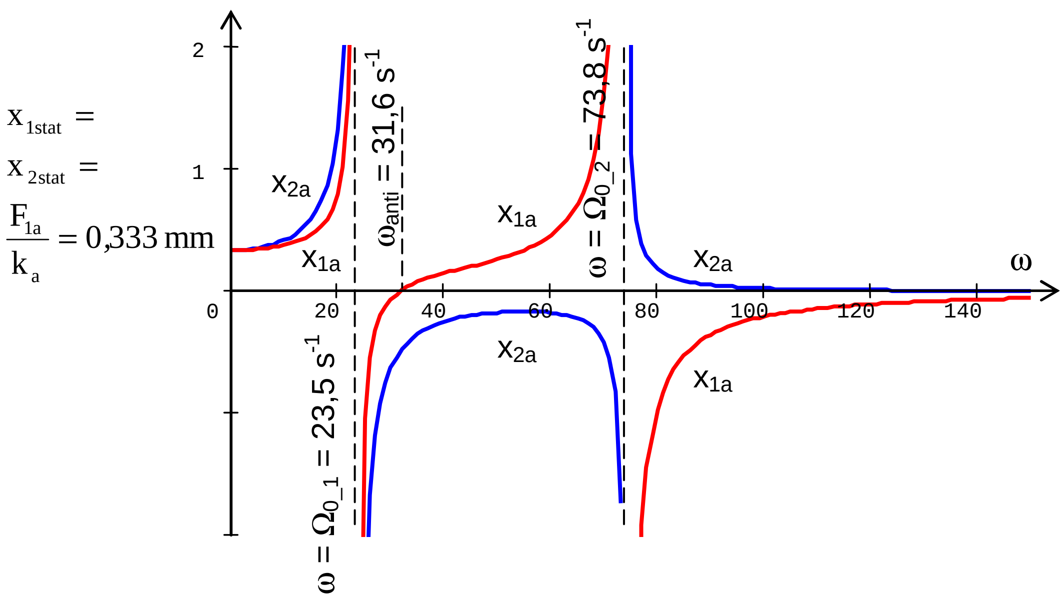
což nejsnáze odvodíme přímo z (2.55) a z determinantů (2.56) a nebo logickou úvahou.

Při velmi malé budící frekvenci $\omega \to 0$ jsou amplitudy kmitů blízké statické výchylce.

První rezonance

Při $\omega = \Omega_{0\_1} = 23{,}5\ s^{-1}$ narůstají obě amplitudy nade všechny meze (pro netlumené kmitání).

Ve jmenovatelích výrazů (2.58) je $\omega^2 - \Omega_{0\_1}^2 = 0$.



Obr. 2.18 - Amplitudové charakteristiky.

Antirezonance

Při $\omega_{anti} = \sqrt{\dfrac{k_b}{m_2}} = 31{,}6\,s^{-1}$ je $x_{1a} = 0$. (Amplituda x_{2a} je přirozeně nenulová.)

Druhá rezonance

Při $\omega = \Omega_{0\_2} = 73{,}8\ s^{-1}$ narůstají obě amplitudy nade všechny meze (pro netlumené kmitání). Ve jmenovatelích výrazů (2.58) je $\omega^2 - \Omega_{0\_2}^2 = 0$.

Konečně při velmi vysoké budící frekvenci $\omega >> \Omega_{0\_2}$ klesají obě amplitudy k nule. Charakteristiky rovněž ukazují fázi kmitání (záporná hodnota amplitudy indikuje kmitání v protifázi).

Při $\omega < \Omega_{0\_1}$ kmitají obě tělesa ve společné fázi s budící silou.

V rozmezí $\Omega_{0\_1} < \omega < \omega_{anti}$ kmitají obě tělesa společně v protifázi vůči budící síle.

V rozmezí $\omega_{anti} < \omega < \Omega_{0\_2}$ kmitá těleso m_1 ve fázi a těleso m_2 v protifázi vůči budící síle.

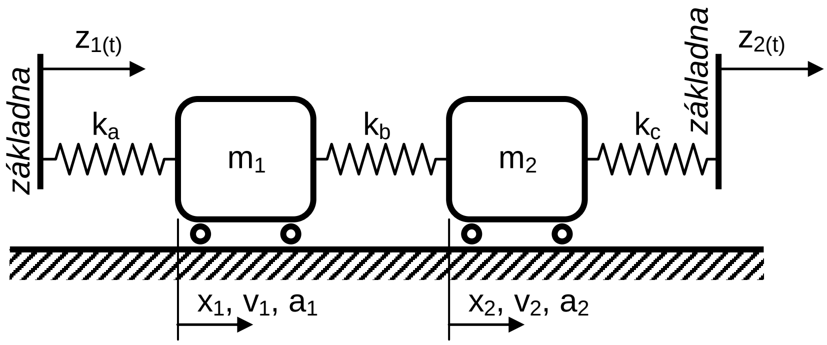
Konečně při $\omega > \Omega_{0\_2}$ kmitá těleso m_1 v protifázi a těleso m_2 ve společné fázi s budící silou.

V blízkosti rezonančních naladění odpovídá poměr obou amplitud hodnotám vlastních tvarů.

Poznámka : Jev antirezonance lze přirozeně vysvětlit. V antirezonanci těleso m_2 kmitá v protifázi vůči budící síle F_1. Ta je v rovnováze s direkční silou F_{Db} pružiny k_b a výsledná síla, působící na těleso m_1 je tedy nulová a i výchylka je nulová. Ve skutečnosti nelze nikdy kmitání tělesa m_1 zcela eliminovat, lze jej však minimalizovat.

2.2.6. Kinematické buzení

Mechanický model je na obr. 2.19.



Obr. 2.19 - Kinematicky buzená soustava.

Pohyb základen je popsán časovými funkcemi :

$$z_{1(t)} = z_{1a} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$z_{2(t)} = z_{2a} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (2.61)$$

kde z_{1a}, z_{2a} - amplitudy budícího pohybu [m],

ω - kruhová frekvence budícího pohybu [s^{-1}].

Pohybové rovnice jsou :

$$m_1 \cdot a_1 = -k_a \cdot (x_1 - z_1) + k_b \cdot (x_2 - x_1)$$
$$m_2 \cdot a_2 = -k_b \cdot (x_2 - x_1) + k_c \cdot (z_2 - x_2)$$

neboli :

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_a + k_b) \cdot x_1 - k_b \cdot x_2 = k_a \cdot z_1$$
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - k_b \cdot x_1 + (k_b + k_c) \cdot x_2 = k_c \cdot z_2$$

neboli konečně :

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 = k_a \cdot z_{1a} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 = k_c \cdot z_{2a} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad (2.62)$$

kde :

$$k_{11} = k_a + k_b$$
$$k_{12} = k_{21} = -k_b$$
$$k_{22} = k_b + k_c$$

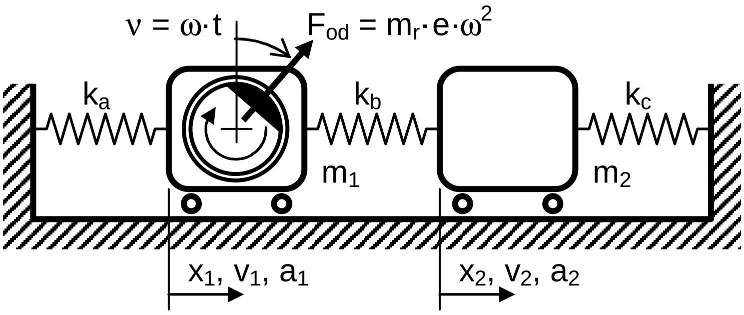
Zavedeme-li dále substituce :

$$F_{1a} = k_a \cdot z_{1a}$$
$$F_{2a} = k_c \cdot z_{2a} \qquad (2.63)$$

bude řešení shodné s řešením pohybových rovnic (2.52), vyjádřeným v (2.53) a (2.58).

2.2.7. Buzení odstředivou silou

Mechanický model podle obr. 2.20 je tvořen dvěma tělesy o hmotnostech m_1 a m_2. Prvé těleso obsahuje nevyvážený rotor o hmotnosti m_r a excentricitě e (vzdálenost těžiště rotoru od osy rotace), otáčející se stálou úhlovou rychlostí ω. (Hmotnost rotoru m_r je součástí celkové hmotnosti m_1.) Při tomto relativním pohybu vzniká odstředivá síla, jejíž průmět do směru pohybu soustavu rozkmitává.



Obr. 2.20 - Buzení odstředivou silou.

Velikost odstředivé síly, viz též (1.79), je :

$$F_{od} = m_r \cdot \omega^2 \cdot e$$

Tu lze rozložit na složky ve směru kmitavého pohybu ($F_{od\,x}$) a kolmo ke směru kmitavého pohybu ($F_{od\,y}$). Složka kolmo ke směru kmitavého pohybu se promítne do reakcí v uložení tělesa a na kmitavý pohyb nebude mít vliv. Naopak složka ve směru kmitavého pohybu bude na pravé straně pohybové rovnice. Je-li úhel natočení nevývažku ν (pro rovnoměrnou rotaci konstantními otáčkami) :

$$\nu = \omega \cdot t$$

pak složka odstředivé síly ve směru kmitavého pohybu, viz též (1.80) je :

$$F_{od\_x} = F_{od} \cdot \sin\nu = F_{od} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Pohybové rovnice jsou formálně shodné s (2.52) pro $F_{1a} = F_{od}$ a $F_{2a} = 0$.

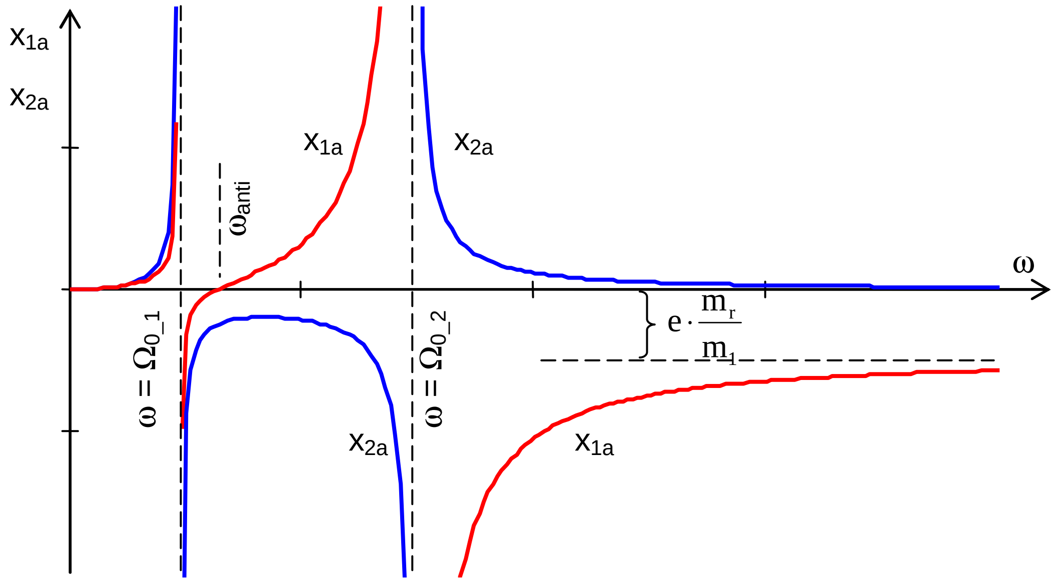
$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 &= F_{od} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení amplitud ustáleného vynuceného kmitání je tedy shodné s (2.58) :

$$x_{1a} = \frac{F_{od} \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right)}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_2}{}^2\right)} = \frac{m_r \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right)}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_2}{}^2\right)}$$

$$x_{2a} = \frac{-F_{od} \cdot k_{21}}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_2}{}^2\right)} = \frac{-m_r \cdot e \cdot \omega^2 \cdot k_{21}}{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_1}{}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - \Omega_{0\_2}{}^2\right)}$$

Amplitudové charakteristiky, tedy závislosti amplitud x_{1a} a x_{2a} na úhlové rychlosti ω, jsou na obr. 2.21.



Obr. 2.21 - Amplitudové charakteristiky.

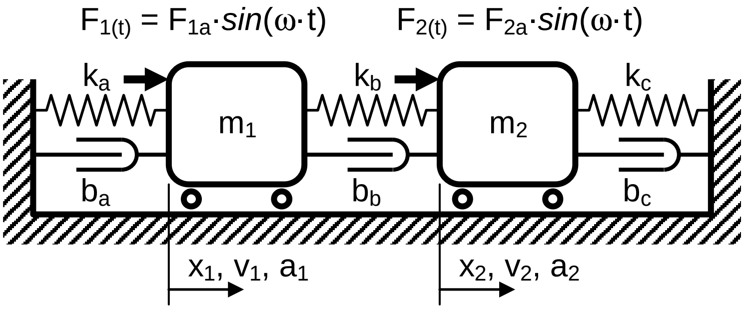
Na průbězích jsou patrné tyto rysy :

- Při malých otáčkách (ω→0) je odstředivá síla velmi malá a výchylky se blíží nule (x_{1a}→0, x_{2a}→0).
- Je-li úhlová rychlost blízká první nebo druhé vlastní kruhové frekvenci (ω≅Ω_{01} nebo ω≅Ω_{02}), nastává rezonance a amplitudy narůstají k velmi vysokým hodnotám.
- Je-li úhlová rychlost přibližně rovna $\omega \cong \sqrt{\frac{k_{22}}{m_2}}$, nastává antirezonance a amplituda první souřadnice je velmi malá (x_{1a}→0).
- Při velmi vysokých otáčkách (ω>>Ω_{02}) se hodnota amplitudy první souřadnice asymptoticky blíží hodnotě $x_{1a} \to e \cdot \frac{m_r}{m_1}$ a to v záporných hodnotách, tedy v protifázi vůči budící síle, zatímco hodnota amplitudy druhé souřadnice klesá k nule, x_{2a}→0.

Stejně, jak bylo uvedeno v kapitole 2.2.5., i v tomto případě se jevu antirezonance využívá ke konstrukci antivibrátorů - dynamických hltičů kmitů.

2.2.8. Vynucené kmitání tlumené soustavy

Vliv tlumení na ustálené vynucené kmitání, buzené budící silou harmonického průběhu, prozkoumáme na mechanickém modelu podle obr. 2.22. Řešení provedeme v komplexním oboru.



Obr. 2.22 - Kmitající tlumená soustava buzená.

Zde kromě dříve již popsaných veličin :

b_a, b_b, b_c - koeficienty tlumení $[N \cdot m^{-1} \cdot s]$.

Harmonický průběh budících sil vyjádříme v komplexním tvaru :

$$\begin{aligned} F_{1(t)} &= F_{1a} \cdot sin(\omega \cdot t) = F_{1a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ F_{2(t)} &= F_{2a} \cdot sin(\omega \cdot t) = F_{2a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \end{aligned} \tag{2.64}$$

kde i je imaginární jednotka.

Pohybové rovnice budou mít stejný tvar jako (2.7) :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + b_{11} \cdot \dot{x}_1 + b_{12} \cdot \dot{x}_2 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 &= F_{1(t)} = F_{1a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b_{21} \cdot \dot{x}_1 + b_{22} \cdot \dot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 &= F_{2(t)} = F_{2a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \end{aligned} \tag{2.65}$$

kde platí substituce (2.6) :

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_a + b_b \\ b_{12} &= b_{21} = -b_b \\ b_{22} &= b_b + b_c \\ k_{11} &= k_a + k_b \\ k_{12} &= k_{21} = -k_b \\ k_{22} &= k_b + k_c \end{aligned}$$

Partikulární řešení má tvar :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_{1a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ x_2 &= \tilde{x}_{2a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \end{aligned} \tag{2.66}$$

kde $\tilde{x}_{1a}$ a $\tilde{x}_{2a}$ jsou komplexní amplitudy, a dále :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{x}_{1a} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \\
\dot{x}_2 &= \tilde{x}_{2a} \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \\
\ddot{x}_1 &= \tilde{x}_{1a} \cdot i^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = -\tilde{x}_{1a} \cdot \omega^2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} \\
\ddot{x}_2 &= \tilde{x}_{2a} \cdot i^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = -\tilde{x}_{2a} \cdot \omega^2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Dosazením partikulárního řešení (2.66) a (2.67) do pohybových rovnic (2.65) dostaneme :

$$\begin{aligned}
\left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 + b_{11} \cdot i \cdot \omega\right) \cdot \tilde{x}_{1a} + \left(k_{12} + b_{12} \cdot i \cdot \omega\right) \cdot \tilde{x}_{2a} &= F_{1a} \\
\left(k_{21} + b_{21} \cdot i \cdot \omega\right) \cdot \tilde{x}_{1a} + \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 + b_{22} \cdot i \cdot \omega\right) \cdot \tilde{x}_{2a} &= F_{2a}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých v komplexním oboru jsou komplexní amplitudy $\tilde{x}_{1a}$ a $\tilde{x}_{2a}$.

Absolutní velikost amplitud pak je :

$$\begin{aligned}
x_{1a} &= \sqrt{Re\left(\tilde{x}_{1a}\right)^2 + Im\left(\tilde{x}_{1a}\right)^2} \\
x_{2a} &= \sqrt{Re\left(\tilde{x}_{2a}\right)^2 + Im\left(\tilde{x}_{2a}\right)^2}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

fázové posuvy jsou :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= arctan \frac{Im\left(\tilde{x}_{1a}\right)}{Re\left(\tilde{x}_{1a}\right)} \\
\phi_2 &= arctan \frac{Im\left(\tilde{x}_{2a}\right)}{Re\left(\tilde{x}_{2a}\right)}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

kde $Re\left(\tilde{x}_{1a}\right)$ a $Im\left(\tilde{x}_{1a}\right)$, resp. $Re\left(\tilde{x}_{2a}\right)$ a $Im\left(\tilde{x}_{2a}\right)$ jsou reálná a imaginární složka komplexních amplitud $\tilde{x}_{1a}$ a $\tilde{x}_{2a}$.

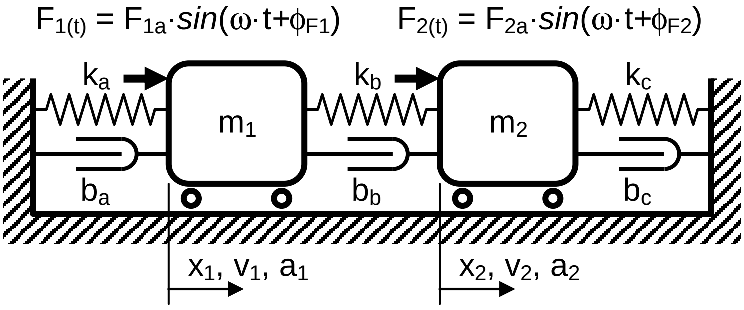
Ukážeme nyní alternativní řešení, obcházející nutnost řešení v komplexním oboru. Soustavu dle obr. 2.22 rozšíříme o různý fázový posuv budících sil. (Síla F_2 dosahuje svého maxima o něco později, než síla F_1, časové zpoždění je $\Delta t = \dfrac{\phi_{F1} - \phi_{F2}}{\omega}$, viz obr. 2.23).

Časový průběh budících sil zapíšeme ve tvaru :

$$\begin{aligned}
F_{1(t)} &= F_{1a} \cdot sin\left(\omega \cdot t + \phi_{F1}\right) = A_{F1} \cdot cos\left(\omega \cdot t\right) + B_{F1} \cdot sin\left(\omega \cdot t\right) \\
F_{2(t)} &= F_{2a} \cdot sin\left(\omega \cdot t + \phi_{F2}\right) = A_{F2} \cdot cos\left(\omega \cdot t\right) + B_{F2} \cdot sin\left(\omega \cdot t\right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

kde :

$$
\begin{aligned}
A_{F1} &= F_{1a} \cdot \mathit{sin}\,\phi_{F1} \\
B_{F1} &= F_{1a} \cdot \mathit{cos}\,\phi_{F1} \\
A_{F2} &= F_{12} \cdot \mathit{sin}\,\phi_{F2} \\
B_{F2} &= F_{2a} \cdot \mathit{cos}\,\phi_{F2}
\end{aligned}
$$



Obr. 2.23 - Kmitající tlumená soustava buzená.

Pohybové rovnice (2.7) resp. (2.65) budou mít tvar :

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{x}_1 + b_{11} \cdot \dot{x}_1 + b_{12} \cdot \dot{x}_2 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 &= A_{F1} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{F1} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \\
m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b_{21} \cdot \dot{x}_1 + b_{22} \cdot \dot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 &= A_{F2} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{F2} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Partikulární řešení je :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_{1a} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t + \phi_1) = A_{x1} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \\
x_2 &= x_{2a} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t + \phi_2) = A_{x2} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

a dále :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -A_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) \\
\dot{x}_2 &= -A_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) \\
\ddot{x}_1 &= -A_{x1} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) - B_{x1} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \\
\ddot{x}_2 &= -A_{x2} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) - B_{x2} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)
\end{aligned}
$$

Dosazením do pohybových rovnic dostáváme :

$$
\begin{aligned}
& m_1 \cdot \left(-A_{x1} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) - B_{x1} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) + \\
& + b_{11} \cdot \left(-A_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t)\right) + b_{12} \cdot \left(-A_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t)\right) + \\
& k_{11} \cdot \left(A_{x1} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) + k_{12} \cdot \left(A_{x2} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) = \\
& \qquad = A_{F1} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{F1} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \\
& m_2 \cdot \left(-A_{x2} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) - B_{x2} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) + \\
& + b_{21} \cdot \left(-A_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t)\right) + b_{22} \cdot \left(-A_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \omega \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t)\right) + \\
& k_{21} \cdot \left(A_{x1} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x1} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) + k_{22} \cdot \left(A_{x2} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{x2} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)\right) = \\
& \qquad = A_{F2} \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t) + B_{F2} \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t)
\end{aligned}
$$

Dále po roznásobení a vytknutí členů $sin(\omega \cdot t)$ a $cos(\omega \cdot t)$:

$$
\begin{aligned}
&\left(-m_1 \cdot A_{x1} \cdot \omega^2 + b_{11} \cdot B_{x1} \cdot \omega + b_{12} \cdot B_{x2} \cdot \omega + k_{11} \cdot A_{x1} + k_{12} \cdot A_{x2}\right) \cdot cos(\omega \cdot t) \\
&+ \left(-m_1 \cdot B_{x1} \cdot \omega^2 - b_{11} \cdot A_{x1} \cdot \omega - b_{12} \cdot A_{x2} \cdot \omega + k_{11} \cdot B_{x1} + k_{12} \cdot B_{x2}\right) \cdot sin(\omega \cdot t) = \\
&\qquad = A_{F1} \cdot cos(\omega \cdot t) + B_{F1} \cdot sin(\omega \cdot t) \\
&\left(-m_2 \cdot A_{x2} \cdot \omega^2 + b_{21} \cdot B_{x1} \cdot \omega + b_{22} \cdot B_{x2} \cdot \omega + k_{21} \cdot A_{x1} + k_{22} \cdot A_{x2}\right) \cdot cos(\omega \cdot t) \\
&+ \left(-m_2 \cdot B_{x2} \cdot \omega^2 - b_{21} \cdot A_{x1} \cdot \omega - b_{22} \cdot A_{x2} \cdot \omega + k_{21} \cdot B_{x1} + k_{22} \cdot B_{x2}\right) \cdot sin(\omega \cdot t) = \\
&\qquad = A_{F2} \cdot cos(\omega \cdot t) + B_{F2} \cdot sin(\omega \cdot t)
\end{aligned}
$$

Obě rovnice mají formální tvar :

$$A_L \cdot cos(\omega \cdot t) + B_L \cdot sin(\omega \cdot t) = A_F \cdot cos(\omega \cdot t) + B_F \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Je zřejmé, že musí platit :

$$
\begin{aligned}
A_L &= A_F \\
B_L &= B_F
\end{aligned}
$$

Úlohu jsme tedy převedli do podoby soustavy čtyř algebraických rovnic o čtyřech neznámých A_{x1}, B_{x1}, A_{x2}, B_{x2} :

$$
\begin{aligned}
-m_1 \cdot A_{x1} \cdot \omega^2 + b_{11} \cdot B_{x1} \cdot \omega + b_{12} \cdot B_{x2} \cdot \omega + k_{11} \cdot A_{x1} + k_{12} \cdot A_{x2} &= A_{F1} \\
-m_1 \cdot B_{x1} \cdot \omega^2 - b_{11} \cdot A_{x1} \cdot \omega - b_{12} \cdot A_{x2} \cdot \omega + k_{11} \cdot B_{x1} + k_{12} \cdot B_{x2} &= B_{F1} \\
-m_2 \cdot A_{x2} \cdot \omega^2 + b_{21} \cdot B_{x1} \cdot \omega + b_{22} \cdot B_{x2} \cdot \omega + k_{21} \cdot A_{x1} + k_{22} \cdot A_{x2} &= A_{F2} \\
-m_2 \cdot B_{x2} \cdot \omega^2 - b_{21} \cdot A_{x1} \cdot \omega - b_{22} \cdot A_{x2} \cdot \omega + k_{21} \cdot B_{x1} + k_{22} \cdot B_{x2} &= B_{F2}
\end{aligned}
$$

resp. po vytknutí neznámých na levých stranách :

$$
\begin{aligned}
\left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) \cdot A_{x1} + b_{11} \cdot \omega \cdot B_{x1} + k_{12} \cdot A_{x2} + b_{12} \cdot \omega \cdot B_{x2} &= A_{F1} \\
-b_{11} \cdot \omega \cdot A_{x1} + \left(k_{11} - m_1 \cdot \omega^2\right) \cdot B_{x1} - b_{12} \cdot \omega \cdot A_{x2} + k_{12} \cdot B_{x2} &= B_{F1} \\
k_{21} \cdot A_{x1} + b_{21} \cdot \omega \cdot B_{x1} + \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) \cdot A_{x2} + b_{22} \cdot \omega \cdot B_{x2} &= A_{F2} \\
-b_{21} \cdot \omega \cdot A_{x1} + k_{21} \cdot B_{x1} - b_{22} \cdot \omega \cdot A_{x2} + \left(k_{22} - m_2 \cdot \omega^2\right) \cdot B_{x2} &= B_{F2}
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

neboli v maticovém tvaru :

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & b_{11} \cdot \omega & k_{12} & b_{12} \cdot \omega \\
-b_{11} \cdot \omega & k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & -b_{12} \cdot \omega & k_{12} \\
k_{21} & b_{21} \cdot \omega & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 & b_{22} \cdot \omega \\
-b_{21} \cdot \omega & k_{21} & -b_{22} \cdot \omega & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} A_{x1} \\ B_{x1} \\ A_{x2} \\ B_{x2} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} A_{F1} \\ B_{F1} \\ A_{F2} \\ B_{F2} \end{Bmatrix}
\tag{2.75}
$$

Neznámé pak jsou :

$$\begin{Bmatrix} A_{x1} \\ B_{x1} \\ A_{x2} \\ B_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & b_{11} \cdot \omega & k_{12} & b_{12} \cdot \omega \\ -b_{11} \cdot \omega & k_{11} - m_1 \cdot \omega^2 & -b_{12} \cdot \omega & k_{12} \\ k_{21} & b_{21} \cdot \omega & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 & b_{22} \cdot \omega \\ -b_{21} \cdot \omega & k_{21} & -b_{22} \cdot \omega & k_{22} - m_2 \cdot \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} A_{F1} \\ B_{F1} \\ A_{F2} \\ B_{F2} \end{Bmatrix} \qquad (2.76)$$

a konečně :

$$\begin{aligned} x_{1a} &= \sqrt{A_{x1}^{\,2} + B_{x1}^{\,2}} \\ \phi_1 &= arctan \frac{A_{x1}}{B_{x1}} \\ x_{2a} &= \sqrt{A_{x2}^{\,2} + B_{x2}^{\,2}} \\ \phi_2 &= arctan \frac{A_{x2}}{B_{x2}} \end{aligned} \qquad (2.77)$$

Z analýzy získaných závislostí plyne :

- v rezonanci jsou amplitudy kmitání konečné a tlumení podstatně ovlivňuje velikost amplitudy,
- v antirezonanci prvá hmota sice není v klidu, ale kmitá pro $\omega \in \langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$ s minimální amplitudou,
- vlivem tlumení se fáze mění spojitě, a to $\phi_1 \in \langle 0, \pi \rangle$ a $\phi_2 \in \langle 0, 2\cdot\pi \rangle$, v rezonanci je tato fáze přibližně rovna $\pi/2$ resp. $3\cdot\pi/2$,
- vhodnou volbou parametrů systému lze docílit ploché amplitudové charakteristiky, což je podstatou tzv. laděného tlumiče kmitů, který je efektivní v širokém frekvenčním pásmu.

2.3. Kroutivé (torzní) kmitání se dvěma stupni volnosti

Čas ke studiu : 1/2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

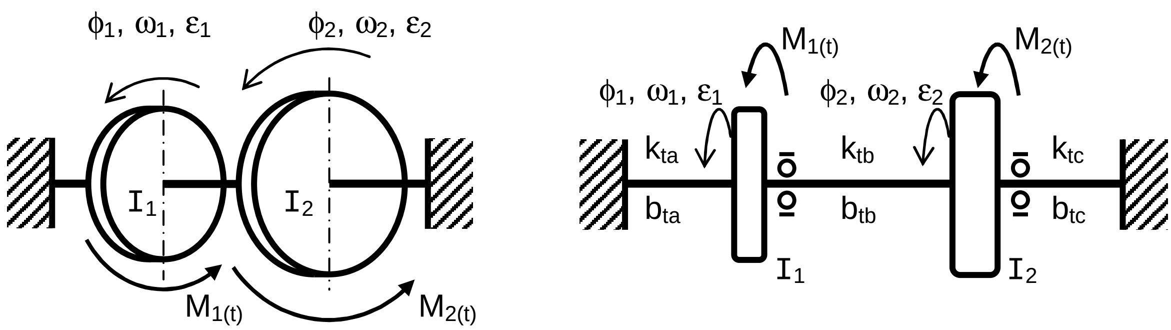
Popsat specifika kroutivého kmitání ve srovnání s podélným kmitáním.

Definovat základní veličiny a vztahy kroutivého kmitání.

Vyřešit středně těžké úlohy kroutivého kmitání.

Výklad

Základní poznatky o kroutivém kmitání získáme řešením reprezentativního modelu, uvedeného na obr. 2.24. Model je tvořen dvěma kotouči, upevněnými na torzně poddajném hřídeli zanedbatelné hmotnosti. Momenty setrvačnosti kotoučů k ose otáčení jsou I_1 a I_2, konstanty torzní tuhosti jsou k_{ta} ,k_{tb}, a k_{tc}, součinitelé torzního tlumení jsou b_{ta}, b_{tb} a b_{tc}, budící momenty jsou $M_{1(t)}$ a $M_{2(t)}$. Poloha kotoučů je určena dvěma nezávislými úhlovými souřadnicemi ϕ_1 a ϕ_2.



Obr. 2.24 - Torzní kmitání se dvěma stupni volnosti.

kde I_1, I_2 - hmotové momenty setrvačnosti [kg·m^2],

k_{ta}, k_{tb}, k_{tc} - torzní tuhosti [N·m/rad],

b_{ta}, b_{tb}, b_{tc} - torzní koeficienty tlumení [N·m·s],

ϕ_1, ϕ_2 - úhlové souřadnice [rad],

ω_1, ω_2 - úhlové rychlosti [rad/s],

ε_1, ε_2 - úhlová zrychlení [rad/s^2],

$M_{1(t)}$, $M_{2(t)}$ - budící momenty [N·m].

Pohybové rovnice můžeme odvodit přímo z obrázku metodou uvolňování. Budou analogické k pohybovým rovnicím podélného kmitání (2.52) resp. (2.65) resp. (2.72).

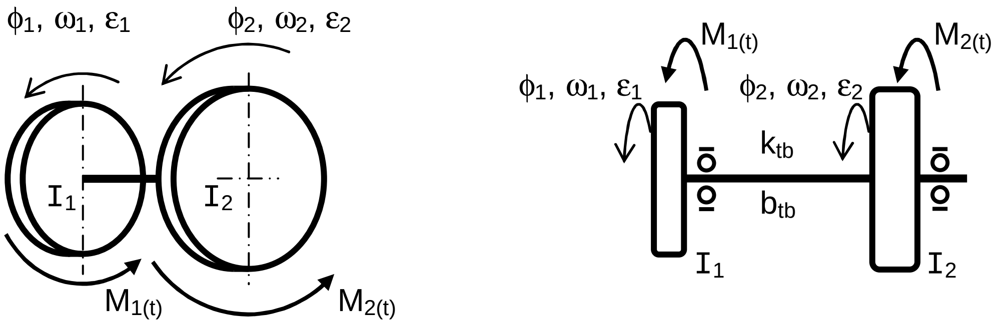
$$
\begin{aligned}
I_1 \cdot \ddot{\phi}_1 + b_{t11} \cdot \dot{\phi}_1 + b_{t12} \cdot \dot{\phi}_2 + k_{t11} \cdot \phi_1 + k_{t12} \cdot \phi_2 &= M_{1a(t)} \\
I_2 \cdot \ddot{\phi}_2 + b_{t21} \cdot \dot{\phi}_1 + b_{t22} \cdot \dot{\phi}_2 + k_{t21} \cdot \phi_1 + k_{t22} \cdot \phi_2 &= M_{2a(t)}
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

kde analogicky k (2.6) platí :

$$
\begin{aligned}
b_{t11} &= b_{ta} + b_{tb} \\
b_{t12} &= b_{t21} = -b_{tb} \\
b_{t22} &= b_{tb} + b_{tc} \\
k_{t11} &= k_{ta} + k_{tb} \\
k_{t12} &= k_{t21} = -k_{tb} \\
k_{t22} &= k_{tb} + k_{tc}
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Veškeré řešení jak vlastního, tak vynuceného kmitání je analogické k řešení podélného kmitání v souladu s převodní tabulkou 1.1.

V souvislosti s torzním kmitáním se často setkáváme s kmitáním soustavy, nevázané k rámu. Jedná se o rotační pohony, kde jednotlivá tělesa torzně kmitají vůči sobě navzájem, avšak mají možnost souvislé rotace jakožto tuhé soustavy.



Obr. 2.25 - Torzní soustava rotačně nevázaná.

V tom případě, analogicky k řešení dle modelu na obr. 2.13, je první vlastní frekvence nulová, příslušný vlastní tvar odpovídá rovnoměrné rotaci soustavy jako torzně tuhého celku.

2.4. Kmitání systému s n stupni volnosti

Čas ke studiu : 2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat zákonitosti kmitání s více stupni volnosti.

Definovat základní veličiny a vztahy kmitání s více stupni volnosti.

Vyřešit středně těžké úlohy kmitání s více stupni volnosti.

Výklad

Pohybové rovnice (2.7)

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + b_{11} \cdot \dot{x}_1 + b_{12} \cdot \dot{x}_2 + k_{11} \cdot x_1 + k_{12} \cdot x_2 = F_{1(t)}$$
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b_{21} \cdot \dot{x}_1 + b_{22} \cdot \dot{x}_2 + k_{21} \cdot x_1 + k_{22} \cdot x_2 = F_{2(t)}$$

můžeme zapsat v maticové podobě :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

Poznámka : Čtvercové matice bývá zvykem psát do hranatých závorek, sloupcové matice bývá zvykem psát do složených závorek.

Zápis pohybových rovnic může mít také podobu :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{2.81}$$

kde :

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ je čtvercová <u>matice hmot</u>,

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ je čtvercová <u>matice tlumení</u>,

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ je čtvercová <u>matice tuhosti</u>,

$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ je sloupcová matice - vektor souřadnic,

$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$ je sloupcová matice - vektor prvních derivací - rychlostí,

$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$ je sloupcová matice - vektor druhých derivací - zrychlení,

$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \end{Bmatrix}$ je sloupcová matice - vektor zatěžujících sil.

Poznámka :

*Matice se v tištěném textu značí tučným písmem, čtvercové matice bývá zvykem značit velkým písmenem (**M**, **B**, **K**), sloupcové matice bývá zvykem značit malým písmenem (**q**, **f**). Sloupcové matice se slovně též označují jako vektory, ovšem nikoliv ve smyslu orientované úsečky ve 3D prostoru (jako např. síla nebo rychlost), ale jako sloupcová matice čísel.*

Poznámka :

Matice hmot bývá často diagonální (nenulové prvky pouze na hlavní diagonále), ovšem není to podmínkou. Matice tlumení a matice tuhosti bývá plná, ovšem (až na speciální vybrané případy) symetrická podle hlavní diagonály ($b_{12} = b_{21}$, $k_{12} = k_{21}$).

Rovnice (2.81) je maticově zapsaná soustava pohybových rovnic - lineárních nehomogenních diferenciálních rovnic druhého řádu, s konstantními koeficienty, pro souřadnice x_1 a x_2. Soustava bude mít stejnou podobu i pro n stupňů volnosti (viz obr. 2.26). Jednotlivé prvky maticové rovnice pak budou :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$ je čtvercová matice hmot, řádu n,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$ je čtvercová matice tlumení, řádu n,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & k_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$ je čtvercová <u>matice tuhosti</u>, řádu n,

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$ je sloupcová matice - <u>vektor souřadnic</u>,

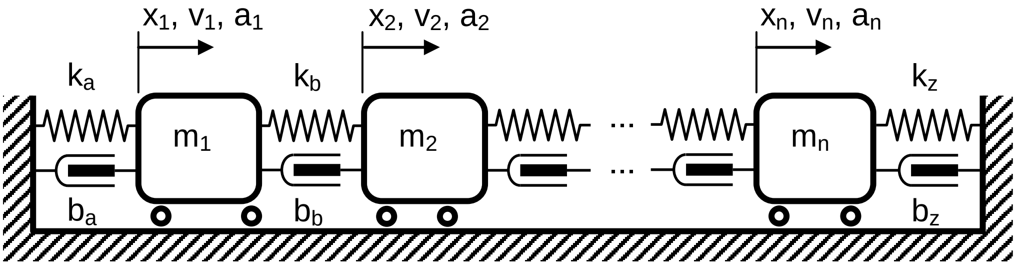
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$ je sloupcová matice - <u>vektor prvních derivací - rychlostí</u>,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}$$ je sloupcová matice - <u>vektor druhých derivací - zrychlení</u>,

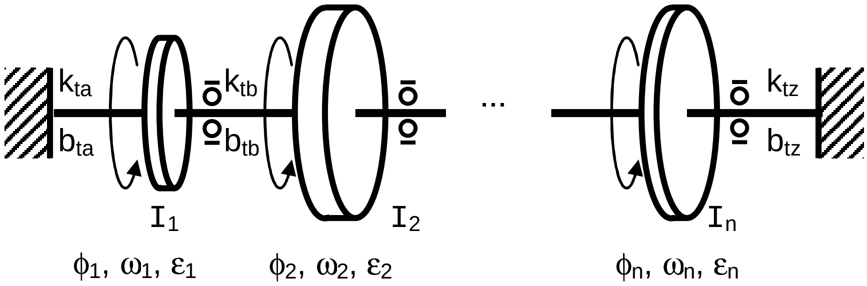
$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_{1(t)} \\ F_{2(t)} \\ \vdots \\ F_{n(t)} \end{Bmatrix}$$ je sloupcová matice - <u>vektor zatěžujících sil</u>.

Poznámka : S úlohou kmitání soustavy s velmi vysokým počtem stupňů volnosti se můžeme setkat zejména u úloh dynamiky kontinua, diskretizovaných metodou konečných prvků. Zde není nic mimořádného, když počet stupňů volnosti n = 10^5 nebo 10^6. V tom případě matice hmot již není diagonální, avšak jak matice hmot, tak matice tuhosti jsou symetrické (až na zvláštní případy, např. dynamika rotorů s uvažováním vlivu gyroskopických účinků).

a) podélné kmitání s n stupni volnosti



b) rotační (kroutivé, torzní) kmitání s n stupni volnosti



Obr. 2.26 - Kmitající soustava s n stupni volnosti (příklady).

Poznámka : Samozřejmě i v tomto případě bude mít analogické řešení torzně kmitající soustava s n stupni volnosti (viz obr. 2.26).

2.4.1. Vlastní (volné) netlumené kmitání

V pohybových rovnicích (2.81) bude matice tlumení $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ a vektor budících sil bude $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Pohybové rovnice pak budou mít tvar :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.82}$$

Předpokládáme-li řešení ve tvaru :

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi) = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi) \tag{2.83 a}$$

kde **v** je sloupcová matice (vektor) amplitud, pak druhé derivace jsou :

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{v} \cdot \Omega^2 \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi) \tag{2.83 b}$$

Dosazením do pohybových rovnic (2.82) dostáváme :

$$-\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \cdot \Omega^2 \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \cdot sin(\Omega \cdot t + \phi) = \mathbf{0}$$

a po vykrácení členu *sin*$(\Omega \cdot t+\phi)$ a po vytknutí vektoru amplitud **v** :

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2.84}$$

Poznámka : Rovnice (2.84) ve tvaru $(\boldsymbol{A}-\lambda \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *představuje obecný matematický problém, tzv. zobecnělý problém vlastních čísel (*λ*) a vlastních vektorů (**v**). Při jednotkové matici* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{1}$ *se jedná o tzv. speciální problém vlastních čísel. Matematika nabízí celou řadu metod pro řešení tohoto problému. Podrobný rozbor těchto metod není předmětem tohoto textu.*

Rovnice (2.84) představuje soustavu lineárních homogenních algebraických rovnic. Podmínkou existence netriviálního řešení soustavy je nulová hodnota determinantu soustavy (2.84), jenž se nazývá frekvenční determinant :

$$\left|\mathbf{K} - \Omega^2 \cdot \mathbf{M}\right| = 0 \tag{2.85}$$

Rozvinutím determinantu dostaneme tzv. frekvenční polynom :

$$a_n \cdot \Omega^{2 \cdot n} + a_{n-1} \cdot \Omega^{2 \cdot (n-1)} + \ldots + a_2 \cdot \Omega^4 + a_1 \cdot \Omega^2 + a_0 = 0$$

nebo po substituci $\Omega^2 = \lambda$:

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \tag{2.86}$$

Polynom řádu n má n kořenů, tzv. vlastních čísel λ_1, λ_2, ... λ_n. Pro pozitivně definitní matice **M** a **K** jsou kořeny reálné, nezáporné. Odmocniny z vlastních čísel $\Omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ jsou vlastní kruhové frekvence netlumeného kmitání s n stupni volnosti.

Podmínka (2.85) dále znamená, že soustava rovnic (2.84) je lineárně závislá (jak bylo ukázáno též v kap. 2.2.2). Nelze tedy jednoznačně vypočíst velikosti amplitud souřadnic x_i (ty budou záviset na počátečních podmínkách), lze jednoznačně vypočíst pouze jejich poměr. Tzv. vlastní vektor **v** (vlastní tvar kmitání) tedy obsahuje čísla, určující poměr amplitud jednotlivých souřadnic x_i.

Jednotlivé prvky ve vlastním tvaru v_i lze vypočíst jako subdeterminanty z frekvenčního determinantu (2.85), jež vzniknou škrtnutím libovolně zvoleného j-tého řádku a i-tého sloupce (pro výpočet všech prvků vlastního tvaru je třeba škrtnout stejný řádek, index škrtnutého sloupce i je index prvku ve vlastním tvaru). Subdeterminant je dále vynásoben členem $(-1)^{i+j}$ (což je obecné pravidlo pro vyjadřování subdeterminantů).

Protože existuje n vlastních kruhových frekvencí $\Omega_{i=1...n}$, kořenů rovnice (2.86), existuje i n vlastních tvarů $\mathbf{v}_{i=1..n}$. Tyto vlastní tvary jsou uspořádány do tzv. <u>modální matice</u> neboli <u>matice vlastních tvarů</u>, v níž tvoří jednotlivé sloupce. Jednotlivé řádky modální matice tedy přísluší jednotlivým souřadnicím x_1, x_2 ... x_n, jednotlivé sloupce (vlastní tvary) přísluší jednotlivým vlastním kruhovým frekvencím Ω_1, Ω_2 ... Ω_n.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^{\langle 1\rangle} & \mathbf{v}^{\langle 2\rangle} & \cdots & \mathbf{v}^{\langle n\rangle}\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{1. vlastní tvar} & \text{2. vlastní tvar} & & \text{n. vlastní tvar} \end{array} \\ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_2 \\ \\ \rightarrow x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_1 & \Omega_2 & & \Omega_n \end{matrix} \end{array} \tag{2.87}$$

Při výpočtu jednotlivých prvků modální matice v_{ij} v j-tém sloupci (vlastním tvaru) se do subdeterminantu dosadí j-tá vlastní kruhová frekvence Ω_j. Kvadráty vlastních kruhových frekvencí jsou uspořádány na hlavní diagonále tzv. <u>spektrální matice</u> $\mathbf{\Lambda}$.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

Úloha vlastních frekvencí a vlastních tvarů, matematicky definovaná v (2.84) pro soustavu s n stupni volnosti, má n řešení. Za jedno řešení považujeme kombinaci vlastní kruhové frekvence Ω_i (jedno číslo) a vlastního tvaru $\mathbf{v}^{<i>}$ (sloupcová matice - vektor). Platí zásadně dodržované pravidlo, že vlastní frekvence jsou seřazeny vzestupně podle velikosti (první vlastní frekvence je nejmenší, n-tá je největší).

Poznámka : Uvedený způsob výpočtu vlastních frekvencí a vlastních tvarů ve skutečnosti není vhodný pro praktické výpočty. Existuje však několik metod výpočtu, jež se v praxi používají. Obsah těchto metod nebude v tomto textu podrobně rozebrán, bude však pro ilustraci stručně uvedena jedna metoda.

Poznámka : U úloh s velkým počtem stupňů volnosti (např. 10^3 až 10^6), typicky jde o úlohy dynamiky kontinua, diskretizované metodou konečných prvků, se nepočítají všechny vlastní frekvence, ale jen jistý počet vlastních frekvencí, počínaje první - nejmenší. Modální matice pak má n řádků, kde n je počet stupňů volnosti, a m sloupců, kde m je počet vypočtených vlastních frekvencí.

Normování vlastních tvarů

Jak již bylo uvedeno, číselné hodnoty ve vlastním tvaru nemají význam samy o sobě, určují poměr amplitud (postup určení číselných hodnot ze subdeterminantů může dát různé hodnoty ve vlastním tvaru v závislosti na tom, který řádek ve frekvenčním determinantu škrtneme). Informační hodnota vlastního tvaru **v** se nezmění, když všechny hodnoty v_i vynásobíme (nebo vydělíme) stejným číslem. Samotné hodnoty se sice změní, jejich poměr však zůstane zachován.

Tuto proceduru (vynásobení nebo vydělení všech prvků ve vlastním tvaru stejným číslem) nazýváme „normování vlastních tvarů“. Obecně existuje nekonečně mnoho možností, jak normovat vlastní tvar, v praxi se však používají dva způsoby.

Normování na jedničku

Celý vlastní tvar se vydělí největším číslem ve vlastním tvaru.

$$\mathbf{v}_{\text{normovany}} = \frac{\mathbf{v}}{max(\mathbf{v})} \tag{2.89}$$

Výsledkem je, že největší číslo ve vlastním tvaru je 1, ostatní čísla jsou v příslušném poměru menší.

Normování podle matice hmot

$$\mathbf{v}_{\text{normovany}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}}} \tag{2.90}$$

Výsledkem je, že :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} &= 1 \\ \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} &= \Omega^2 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Výsledné kmitání je lineární kombinací vlastních tvarů, analogicky k (2.26) :

$$\mathbf{q} = \sum_j \mu_j \cdot \mathbf{v}_j \cdot sin(\Omega_j \cdot t + \phi_j) = \sum_j \mathbf{v}_j \cdot (A_j \cdot cos(\Omega_j \cdot t) + B_j\, sin(\Omega_j \cdot t)) \tag{2.92}$$

Zde integrační konstanty μ_j a ϕ_j, resp. A_j a B_j, vypočteme z počátečních podmínek :

$t = 0$ ... $x_j = x_{0j}$, $\dot{x}_j = v_{0j}$

Poznámka : Tato poslední část řešení, tedy určení integračních konstant z počátečních podmínek, se obvykle neřeší. Proces, zvaný <u>*modální analýza*</u>*, znamená obvykle právě výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů.*

<u>Ortogonalita vlastních tvarů</u>

Pro dvě vlastní kruhové frekvence Ω_i a Ω_j má rovnice (2.84) tvar :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \Omega_i^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{K} - \Omega_j^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_j &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.93}$$

První rovnici vynásobíme $\mathbf{v}_j^T$, druhou rovnici vynásobíme $\mathbf{v}_i^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^T \cdot (\mathbf{K} - \Omega_i^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_i^T \cdot (\mathbf{K} - \Omega_j^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_j &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.94}$$

Druhou rovnici transponujeme, přičemž využijeme symetrie matice hmot i matice tuhosti, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^T \cdot (\mathbf{K} - \Omega_i^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_j^T \cdot (\mathbf{K} - \Omega_j^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.95}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme :

$$(\Omega_i^2 - \Omega_j^2) \cdot \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \tag{2.96}$$

Pro $\Omega_i \neq \Omega_j$ musí pro $i \neq j$ platit :

$$\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \tag{2.97}$$

Dosazením do první z rovnic (2.94) platí i :

$$\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \tag{2.98}$$

Tato vlastnost vlastních tvarů se nazývá ortogonalita vlastních tvarů (viz též kap. 2.2.3).

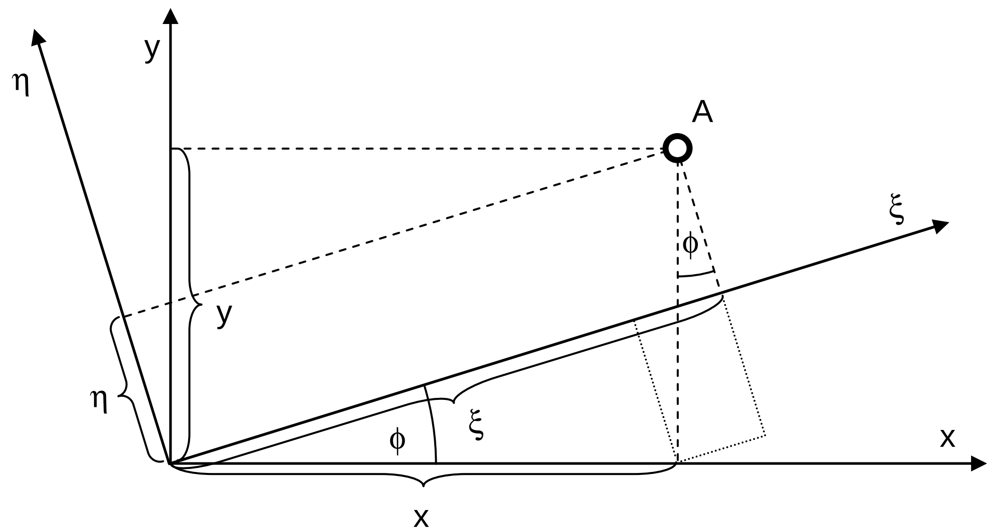
Vlastní vektory (vlastní tvary), příslušné různým vlastním frekvencím, jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti i vzhledem k matici tuhosti. Tato vlastnost má důležitý důsledek. S maticí hmot **M** a maticí tuhosti **K** provedeme tzv. modální transformaci, obě matice vynásobíme zprava modální maticí **V** (2.87) a zleva transponovanou modální maticí $\mathbf{V}^T$. Výsledné matice označíme jako tzv. modální matici hmot a modální matici tuhosti :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \tag{2.99}$$

V důsledku ortogonality vlastních tvarů jsou obě modální matice diagonální ($\mathbf{M}_{ij} = 0$, $\mathbf{K}_{ij} = 0$, pro $i \neq j$). Jednotlivé prvky na hlavní diagonále obou matic se nazývají hlavní modální hmotnosti a hlavní modální tuhosti. Je-li modální matice normována podle matice hmot, je dle (2.91) modální matice hmot jednotková, modální matice tuhosti je rovna spektrální matici (2.88).

2.4.2. Modální transformace

Pro lepší konkrétní představu čtenáře vysvětlíme nejprve co obnáší samotný postup transformace souřadnic. Mějme rovinný 2D prostor, v něm kartézský souřadný systém x-y a bod A, jehož poloha je dána souřadnicemi {x, y}. Mějme dále natočený souřadný systém ξ-η, jehož počátek je totožný s počátkem souřadného systému x-y, avšak je vůči němu natočen o úhel ϕ. Poloha bodu A je dána souřadnicemi $\{\xi, \eta\}$ (viz obr. 2.27).



Obr. 2.27 - Transformace souřadnic.

Snadno odvodíme, že mezi souřadnicemi {x, y} a {ξ, η} platí transformační vztahy :

$$\xi = x \cdot \cos\phi + y \cdot \sin\phi$$
$$\eta = -x \cdot \sin\phi + y \cdot \cos\phi$$

Tyto transformační vztahy mají v maticové podobě tvar :

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

je tzv. transformační matice.

Modální transformace je transformace z tzv. originálních souřadnic nebo též fyzikálních souřadnic **q** do tzv. modálních souřadnic nebo též hlavních souřadnic **u** (viz též kap. 2.2.4), přičemž za transformační matici použijeme modální matici **V** (2.87). Protože modální matice **V** je matice konstant, platí vztah i pro derivace.

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (2.100)$$
$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{u}}$$
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{u}}$$

Poznámka : Modální souřadnice $\boldsymbol{u}$ *určíme z originálních souřadnic* $\boldsymbol{q}$ *jako* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{q}$. *Tento vztah se však v praxi nepoužívá, používá se pouze vztah* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}$ *(2.100).*

Je třeba podotknout, že modální souřadnice **u** jsou lineární kombinací originálních souřadnic **q** a jako takové nemají žádný přímý fyzikální význam, až na výjimky, popsané v kap. 2.2.4.

Použijeme-li modální transformaci (2.100) pro pohybové rovnice (2.81), dostaneme (pro netlumené kmitání $\mathbf{B} = \mathbf{0}$) :

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{V}\cdot\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Celou rovnici dále vynásobíme zleva transponovanou modální maticí $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{V}\cdot\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{f} \tag{2.101}$$

Použijeme-li výše definovanou (2.99) modální matici hmot $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{V}$ a modální matici tuhosti $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{V}$ a zavedeme-li dále tzv. <u>modální vektor budících účinků</u> :

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{f} \tag{2.102}$$

dostáváme soustavu pohybových rovnic, přepsanou pro modální souřadnice :

$$\widetilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{f}} \tag{2.103}$$

Často říkáme, že jsme úlohu převedli do <u>modálního prostoru</u>.

Jak bylo ukázáno výše, v důsledku ortogonality vlastních tvarů jsou modální matice hmot a modální matice tuhosti diagonální. To znamená, že soustava pohybových rovnic (2.103) nepředstavuje simultánní soustavu rovnic (v každé rovnici jsou všechny neznámé), ale nezávislou soustavu rovnic, kdy v každé rovnici je jen jedna neznámá.

Nezávislá i-tá pohybová rovnice pro modální souřadnici u_i má tvar :

$$0\cdot\ddot{u}_1 + 0\cdot\ddot{u}_2 + \ldots + \widetilde{\mathbf{M}}_{ii}\cdot\ddot{u}_i + \ldots + 0\cdot\ddot{u}_n + 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \ldots + \widetilde{\mathbf{K}}_{ii}\cdot u_i + \ldots + 0\cdot u_n = \widetilde{\mathbf{f}}_i$$

neboli :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{ii}\cdot\ddot{u}_i + \widetilde{\mathbf{K}}_{ii}\cdot u_i = \widetilde{\mathbf{f}}_i \tag{2.104}$$

nebo též :

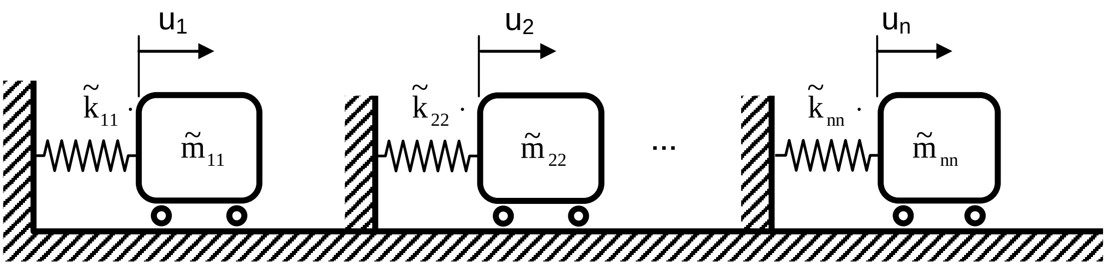
$$\widetilde{m}_{ii}\cdot\ddot{u}_i + \widetilde{k}_{ii}\cdot u_i = \widetilde{f}_i$$

Často v té souvislosti mluvíme o soustavě nezávislých oscilátorů (viz obr. 2.28).

Poznámka : Čtenáře jistě nepřekvapí přesvědčí-li se výpočtem, že podíl hlavní modální tuhosti a hlavní modální hmotnosti určuje přímo vlastní frekvenci :

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\tilde{k}_{ii}}{\tilde{m}_{ii}}}$$

soustava n nezávislých oscilátorů



Obr. 2.28 - Kmitající soustava s n stupni volnosti v modálním prostoru.

Problém nejprve řešíme v modálním prostoru jako n nezávislých problémů s 1 stupněm volnosti (viz kap. 1.), pak modální transformací (2.100) přejdeme do prostoru fyzikálních souřadnic.

2.4.3. Rayleighův kvocient

Základní rovnici (2.84)

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

definující problém vlastních frekvencí, lze upravit na :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \Omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

Na obou stranách rovnice jsou sloupcové matice. Vynásobíme-li rovnici zleva transponovaným vektorem $\mathbf{v}^T$:

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \Omega^2 \cdot \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

budou na obou stranách rovnice prostá čísla.

Pak již lze vyjádřit kvadrát vlastní kruhové frekvence jako :

$$\lambda = \Omega^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}} \tag{2.105}$$

Poznámka : Čitatel zlomku na pravé straně rovnice (2.105) vyjadřuje dvojnásobek potenciální energie soustavy ve stavu největší deformace, jmenovatel vyjadřuje dvojnásobek kinetické energie soustavy ve stavu s nejmenší deformací a největší rychlostí.

Číslo λ ve vzorci (2.105) je tzv. <u>Rayleighův kvocient</u>. Má tyto vlastnosti :

1. Je-li vektor **v** přímo (přesně) roven vlastnímu tvaru, Rayleighův kvocient λ je přímo roven kvadrátu příslušné vlastní kruhové frekvence.
2. Liší-li se vektor **v** od vlastního tvaru o malou hodnotu 1. řádu, pak odmocnina z Rayleighova kvocientu $\sqrt{\lambda}$ se liší od skutečné vlastní kruhové frekvence Ω o malou hodnotu 2. řádu.
3. Nabývá-li vektor **v** postupně hodnot n jednotlivých vlastních vektorů, je odmocnina z Rayleighova kvocientu $\sqrt{\lambda}$ vždy uvnitř intervalu, daného nejnižší a nejvyšší vlastní kruhovou frekvencí.

<u>Metoda inverzní iterace</u>

Jak bylo zmíněno výše, postup výpočtu vlastních frekvencí a vlastních tvarů, popsaný v kap. 2.4.1. není použitelný pro praktické výpočty. Tento text není zaměřen na detailní výklad o metodách řešení problému vlastních čísel a vlastních vektorů. Přesto alespoň stručně uvedeme jednu metodu řešení, tzv. metodu inverzní iterace.

Základní rovnici (2.84)

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

definující problém vlastních frekvencí, lze upravit na :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \Omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \tag{2.106}$$

Použijeme-li substituci :

$$\mathbf{f} = \Omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \tag{2.107}$$

můžeme rovnici (2.106) ve tvaru :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{2.108}$$

interpretovat a vypočíst jako standardní úlohu statické deformace při zatěžovacím vektoru **f**.

Poznámka : Řešení pro relativně malý počet stupňů volnosti můžeme nalézt inverzí matice tuhosti jako $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}^{-1} \cdot \boldsymbol{f}$*, ovšem pro rozsáhlejší soustavy patrně použijeme některou z celé řady efektivnějších metod.*

Vypočtený vektor **v** však ve skutečnosti nemá fyzikální význam statické deformace ale jde o vlastní vektor, vlastní tvar (viz výklad v kap. 2.4.1.). Jako takový jej normujeme, např. podle matice hmot. Následně vypočteme upřesněnou vlastní kruhovou frekvenci jako odmocninu z Rayleighova kvocientu (2.105) :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}}} \tag{2.109}$$

Výpočet není přesný, ale opakováním v řadě iterací konverguje ke správnému řešení. Iterační algoritmus bude mít následující strukturu :

1. Počáteční odhad vlastní kruhové frekvence, např. $\Omega^{(0)} = 1$,
   a vlastního tvaru, např. $\mathbf{v}^{(0)} = \{1, 1, \dots 1\}^{\mathrm{T}}$.
2. Výpočet zatěžovacího vektoru **f** dle (2.107).
3. Výpočet prvního přiblížení vlastního vektoru $\mathbf{v}^{(1)}$ dle (2.108).
4. Normování vlastního tvaru, např. vůči matici hmot dle (2.90).
5. Výpočet prvního přiblížení vlastní kruhové frekvence $\Omega^{(1)}$ dle (2.109).
6. Návrat do bodu 2.

Po dostatečném počtu iterací postup konverguje k první vlastní frekvenci a vlastnímu tvaru.

Metoda iterace podprostoru

Je modifikací metody inverzní iterace. Místo jednoho vlastního tvaru **v** se použije několik vlastních tvarů (je-li počet použitých vlastních tvarů m, pak obvykle m<<n), uspořádaných do modální matice **V** (tato je v tomto případě obdélníková n×m, počet řádků n je roven počtu stupňů volnosti, počet sloupců m je roven počtu uvažovaných vlastních frekvencí a vlastních tvarů).

Výsledkem substituce (2.107) není sloupcová matice **f**, ale obdélníková matice n×m :

$$\mathbf{F} = \Omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$$

Rovnici (2.108) ve tvaru :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F}$$

lze interpretovat jako úlohu statické deformace při m zatěžovacích vektorech (jednotlivé sloupce matice **F**). Úloha má m řešení, jež jsou uspořádána do jednotlivých sloupců modální matice **V**.

Při vhodné volbě počátečních odhadů vlastních vektorů $\mathbf{v}^{(0)}_{j=1..m}$ postup konverguje k řešení prvních m vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů.

2.4.4. Vlastní (volné) kmitání soustavy tlumené proporcionálně

Soustava pohybových rovnic bude mít tvar dle (2.81) při nulovém vektoru budících účinků $\mathbf{f} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad (2.110)$$

Uvažujeme-li tzv. proporcionální tlumení, pak matice tlumení bude mít tvar :

$$\mathbf{B} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \qquad (2.111)$$

Zde člen $\alpha \cdot \mathbf{M}$ představuje tzv. konstrukční tlumení (vnější tlumení, dané např. odporem prostředí), člen $\beta \cdot \mathbf{K}$ představuje tzv. materiálové tlumení (vnitřní tlumení, dané vnitřním třením struktury materiálu).

U proporcionálního tlumení jsou vlastní tvary ortogonální vůči matici tlumení pro $i \neq j$:

$$\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \qquad (2.112)$$

Řešení pohybových rovnic (2.110) předpokládáme v komplexním oboru ve tvaru :

$$\mathbf{q} = \sum_j C_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot \mathbf{v}_j \tag{2.113}$$

kde $\mathbf{v}_j$ je vlastní vektor netlumeného kmitání. Po dosazení do (2.110) dostaneme :

$$\mathbf{M} \cdot \sum_j \lambda_j^2 \cdot C_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{B} \cdot \sum_j \lambda_j \cdot C_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{K} \cdot \sum_j C_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

Po vynásobení zleva transponovaným vlastním vektorem $\mathbf{v}_j^T$ a s využitím podmínek ortogonality (2.97), (2.98) a (2.112) pak pro j = 1, 2, ... n :

$$C_j \cdot \left(\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \lambda_j^2 + \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_j \cdot \lambda_j + \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_j \right) \cdot e^{\lambda_j \cdot t} = \mathbf{0}$$

Definujeme-li dle (2.99) hlavní modální hmotnosti a hlavní modální tuhosti jako :

$$m_{mod\_j} = \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_j$$

$$k_{mod\_j} = \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_j$$

můžeme sestavit charakteristický polynom pro j = 1, 2, ... n :

$$m_{mod\_j} \cdot \lambda_j^2 + \left(\alpha \cdot m_{mod\_j} + \beta \cdot k_{mod\_j} \right) \cdot \lambda_j + k_{mod\_j} = 0 \tag{2.114}$$

Komplexně sdružené kořeny (s imaginární jednotkou i) jsou :

$$\lambda_{j\_1,2} = -\delta_j \pm i \cdot \Omega_j \tag{2.115}$$

kde imaginární složka řešení představuje vlastní kruhovou frekvenci tlumeného kmitání :

$$\Omega_j = \sqrt{\frac{k_{mod\_j}}{m_{mod\_j}} - \delta_j^2}$$

reálná složka představuje konstantu doznívání :

$$\delta_j = \frac{\alpha \cdot m_{mod\_j} + \beta \cdot k_{mod\_j}}{2 \cdot m_{mod\_j}}$$

Pro podkritické tlumení, kdy $\Omega_{0\_j} = \sqrt{\frac{k_{mod\_j}}{m_{mod\_j}}} > \delta_j$, bude výsledný periodický pohyb vyjádřený rovnicemi :

$$\mathbf{q} = \sum_j C_j \cdot e^{-\delta_j \cdot t} \cdot sin(\Omega_j \cdot t + \phi_j) \cdot \mathbf{v}_j \tag{2.116}$$

nebo

$$\mathbf{q} = \sum_j e^{-\delta_j \cdot t} \cdot (A_j \cdot cos(\Omega_j \cdot t) + B_j \cdot sin(\Omega_j \cdot t)) \cdot \mathbf{v}_j$$

Zde integrační konstanty C_j a ϕ_j, resp. A_j a B_j, vypočteme z počátečních podmínek :

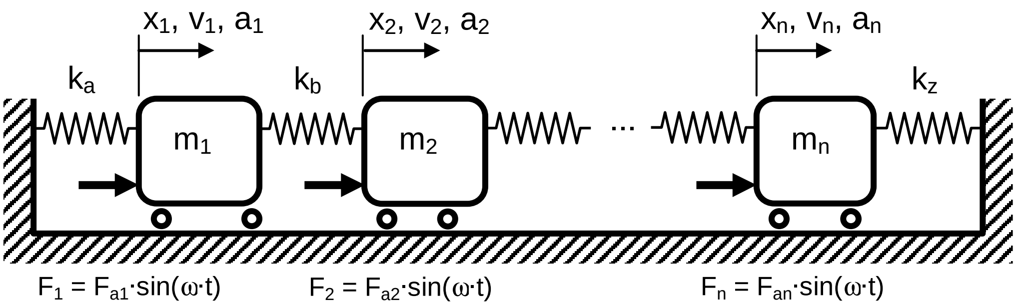
$t = 0$ ... $x_j = x_{0j}$, $\dot{x}_j = v_{0j}$

2.4.5. Kmitání netlumené, vynucené budící silou harmonického průběhu

Soustava pohybových rovnic (2.81) má tvar :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f} = \mathbf{f_a} \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{2.117}$$

kde kromě již mnohokrát zmiňované matice hmot **M**, matice tuhosti **K**, sloupcové matice (vektoru) souřadnic **q** a vektoru zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}$ je **f** vektor proměnných budících silových účinků harmonického průběhu, $\mathbf{f_a}$ je vektor amplitud budících sil a ω je kruhová frekvence budících sil.



Obr. 2.29 - Kmitající soustava s n stupni volnosti, harmonicky buzená.

V dalším výkladu se zaměříme na ustálené vynucené kmitání. Předpokládejme partikulární řešení ve tvaru :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q_a} \cdot sin(\omega \cdot t) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{q_a} \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \\ \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{q_a} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{2.118}$$

kde $\mathbf{q_a}$ = {x_{a1}, x_{a2}, ... x_{an}} je sloupcová matice (vektor) amplitud ustáleného vynuceného kmitání. Dosazením do pohybových rovnic (2.117) dostáváme :

$$-\mathbf{M}\cdot\mathbf{q_a}\cdot\omega^2\cdot sin(\omega\cdot t)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q_a}\cdot sin(\omega\cdot t)=\mathbf{f_a}\cdot sin(\omega\cdot t)$$

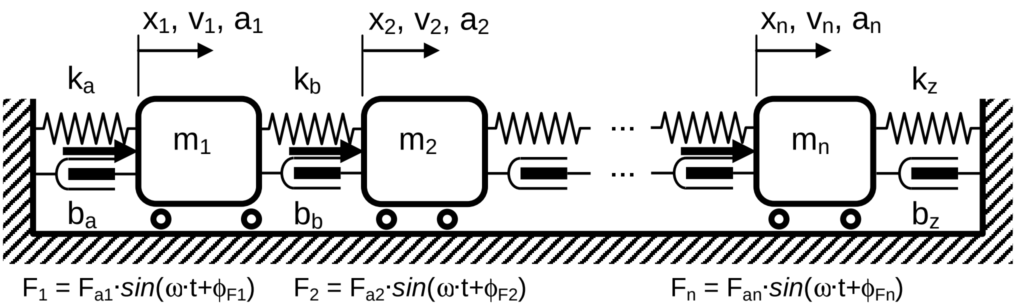
Dále po vykrácení členu $sin(\omega\cdot t)$ a vytknutí vektoru amplitud $\mathbf{q_a}$ pak dostáváme :

$$\left(\mathbf{K}-\omega^2\cdot\mathbf{M}\right)\cdot\mathbf{q_a}=\mathbf{f_a} \tag{2.119}$$

Zavedeme-li tzv. matici dynamické tuhosti $\mathbf{D} = \mathbf{K} - \omega^2\cdot\mathbf{M}$, pak pseudostatická úloha $\mathbf{D}\cdot\mathbf{q_a} = \mathbf{f_a}$ představuje soustavu n lineárních algebraických rovnic o n neznámých x_{ai} (kde n je počet stupňů volnosti). Její řešení bývá často zapisováno ve tvaru $\mathbf{q_a} = \mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{f}_a$ (kde $\mathbf{D}^{-1}$ je matice inverzní k matici dynamické tuhosti, často bývá nazývána matice dynamické poddajnosti), pro jeho nalezení však patrně použijeme nějakou efektivnější metodu, než inverze matice dynamické tuhosti.

2.4.6. Kmitání tlumené, vynucené budící silou harmonického průběhu

V předchozí kapitole jsme v řešení ustáleného vynuceného kmitání zanedbali tlumení. Kromě toho jsme uvažovali budící síly o stejné frekvenci a se stejným (nulovým) fázovým posunutím. Uvedeme zde nyní řešení v těchto dvou směrech zobecnělé.



Obr. 2.30 - Kmitající tlumená soustava s n stupni volnosti, harmonicky buzená.

V kmitající soustavě uvažujeme tlumení a budící síly stejné frekvence ale s různým fázovým posuvem (síly nabývají svých maximálních hodnot v různých časových okamžicích). Soustava pohybových rovnic bude mít tvar :

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{f}=\begin{Bmatrix} F_{a1}\cdot sin(\omega\cdot t+\phi_{F1}) \\ F_{a2}\cdot sin(\omega\cdot t+\phi_{F2}) \\ \vdots \\ F_{an}\cdot sin(\omega\cdot t+\phi_{Fn}) \end{Bmatrix} \tag{2.120}$$

kde **B** je matice tlumení, F_{ai} jsou amplitudy budících sil a ϕ_{Fi} jsou jejich fázové posuvy. Předpokládané partikulární řešení :

$$x_i = x_{ai} \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_i)$$

zapíšeme ve tvaru :

$$x_i = A_i \cdot cos(\omega \cdot t) + B_i \cdot sin(\omega \cdot t)$$

neboli :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q_A} \cdot cos(\omega \cdot t) + \mathbf{q_B} \cdot sin(\omega \cdot t) \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{q_A} \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t) + \mathbf{q_B} \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \\ \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{q_A} \cdot \omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t) - \mathbf{q_B} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \tag{2.121}$$

kde $A_i = x_{ai} \cdot sin\phi_i$, $B_i = x_{ai} \cdot cos\phi_i$, a dále :

$$\mathbf{q_A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{q_B} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

Stejně i budící síly $F_i = F_{ai} \cdot sin(\omega \cdot t + \phi_{Fi})$ zapíšeme ve tvaru :

$$F_i = A_{Fi} \cdot cos(\omega \cdot t) + B_{Fi} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

neboli :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f_A} \cdot cos(\omega \cdot t) + \mathbf{f_B} \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{2.122}$$

kde $A_{Fi} = F_{ai} \cdot sin\phi_{Fi}$, $B_{Fi} = F_{ai} \cdot cos\phi_{Fi}$, a dále :

$$\mathbf{f_A} = \begin{Bmatrix} A_{F1} \\ A_{F2} \\ \vdots \\ A_{Fn} \end{Bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{f_B} = \begin{Bmatrix} B_{F1} \\ B_{F2} \\ \vdots \\ B_{Fn} \end{Bmatrix}$$

Dosazením (2.121) a (2.122) do pohybových rovnic (2.120) dostaneme :

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \cdot \left(-\mathbf{q_A} \cdot \omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t) - \mathbf{q_B} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t)\right) + \\ &\quad + \mathbf{B} \cdot \left(-\mathbf{q_A} \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t) + \mathbf{q_B} \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t)\right) + \\ &\quad\quad + \mathbf{K} \cdot \left(\mathbf{q_A} \cdot cos(\omega \cdot t) + \mathbf{q_B} \cdot sin(\omega \cdot t)\right) = \mathbf{f_A} \cdot cos(\omega \cdot t) + \mathbf{f_B} \cdot sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

nebo po roznásobení závorek a vytknutí členů *sin*(ω·t) a *cos*(ω·t) :

$$\left(-\mathbf{M}\cdot\mathbf{q_A}\cdot\omega^2+\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_B}\cdot\omega+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q_A}\right)\cdot cos(\omega\cdot t)+\left(-\mathbf{M}\cdot\mathbf{q_B}\cdot\omega^2-\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_A}\cdot\omega+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q_B}\right)\cdot sin(\omega\cdot t)=$$
$$=\mathbf{f_A}\cdot cos(\omega\cdot t)+\mathbf{f_B}\cdot sin(\omega\cdot t)$$

Porovnáním levé a pravé strany je zřejmé, že koeficienty u členů *sin*(ω·t) a *cos*(ω·t) si musí být rovny :

$$-\mathbf{M}\cdot\mathbf{q_A}\cdot\omega^2+\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_B}\cdot\omega+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q_A}=\mathbf{f_A}$$
$$-\mathbf{M}\cdot\mathbf{q_B}\cdot\omega^2-\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_A}\cdot\omega+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q_B}=\mathbf{f_B}$$

nebo po vytknutí vektorů neznámých $\mathbf{q_A}$ a $\mathbf{q_B}$:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{K}-\omega^2\cdot\mathbf{M}\right)\cdot\mathbf{q_A}+\omega\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_B}&=\mathbf{f_A}\\-\omega\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{q_A}+\left(\mathbf{K}-\omega^2\cdot\mathbf{M}\right)\cdot\mathbf{q_B}&=\mathbf{f_B}\end{aligned}\qquad(2.123)$$

nebo vyjádřeno jedinou maticovou rovnicí :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}-\omega^2\cdot\mathbf{M} & \omega\cdot\mathbf{B}\\-\omega\cdot\mathbf{B} & \mathbf{K}-\omega^2\cdot\mathbf{M}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{q_A}\\\mathbf{q_B}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f_A}\\\mathbf{f_B}\end{Bmatrix}\qquad(2.124)$$

Úloha má tentokrát charakter soustavy 2·n lineárních algebraických rovnic o 2·n neznámých, vektorech koeficientů $\mathbf{q_A}$ a $\mathbf{q_B}$ (matice koeficientů však již není symetrická). Po jejich vyřešení určíme amplitudu a fázový posuv řešení jako :

$$x_{ai}=\sqrt{A_i^{\ 2}+B_i^{\ 2}}$$
$$\phi_i=arctan\frac{A_i}{B_i}$$

Poznámka : Alternativní postup spočívá v řešení v komplexním oboru čísel. Počet rovnic se pak nezdvojnásobuje, ale každé číslo má reálnou a imaginární složku. Odmocnina ze součtu kvadrátů obou složek je amplituda veličiny, poměr složek vyjadřuje fázový posuv. Reálná a imaginární složka jsou analogické k sinovým a cosinovým členům ve výše popsaném postupu.

2.4.7. Kmitání, vynucené budící silou obecného průběhu

Soustava pohybových rovnic má tvar dle (2.81) :

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{f}_{(t)} \tag{2.125}$$

Zaměříme se opět na řešení ustáleného vynuceného kmitání soustavy s proporcionálním tlumením dle (2.111) :

$$\mathbf{B}=\alpha\cdot\mathbf{M}+\beta\cdot\mathbf{K}$$

Pro řešení použijeme metody modální transformace (2.100) (viz kap. 2.4.2.) :

$$\mathbf{q}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{u}$$

Úlohu (2.125) tzv. „převedeme do modálního prostoru“ :

$$\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\mathbf{u}}+\tilde{\mathbf{B}}\cdot\dot{\mathbf{u}}+\tilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{f}} \tag{2.126}$$

kde **u** je vektor tzv. modálních (hlavních) souřadnic, a dále :

$$\tilde{\mathbf{M}}=\mathbf{V}^{T}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{V}$$
$$\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{V}^{T}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}$$
$$\tilde{\mathbf{K}}=\mathbf{V}^{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{V}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{V}^{T}\cdot\mathbf{f}_{(t)}$$

jsou tzv. modální matice hmot, modální matice tlumení, modální matice tuhosti a modální vektor budících účinků. Tento můžeme rozepsat jako :

$$\tilde{F}_{j(t)}=\sum_{i}V_{j,i}\cdot F_{i(t)}$$

Jak bylo ukázáno v kap. 2.4.2., modální matice hmot, tlumení a tuhosti jsou diagonální a představují tedy soustavu nezávislých pohybových rovnic po jedné neznámé :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{j,j}\cdot\ddot{u}_{j}+\tilde{\mathbf{B}}_{j,j}\cdot\dot{u}_{j}+\tilde{\mathbf{K}}_{j,j}\cdot u_{j}=\tilde{F}_{j(t)} \tag{2.127}$$

Řešení v modálním prostoru představuje n krát opakované řešení úlohy s jedním stupněm volnosti. O této problematice dostatečně široce pojednává 1. kapitola. Řešením v modálním prostoru je časový průběh modálních souřadnic :

$$u_{j}=u_{j}(t) \tag{2.128}$$

Řešení ve fyzikálním prostoru nalezneme modální transformací (2.100) :

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}$$

neboli :

$$x_i = \sum_j V_{i,j} \cdot u_j$$

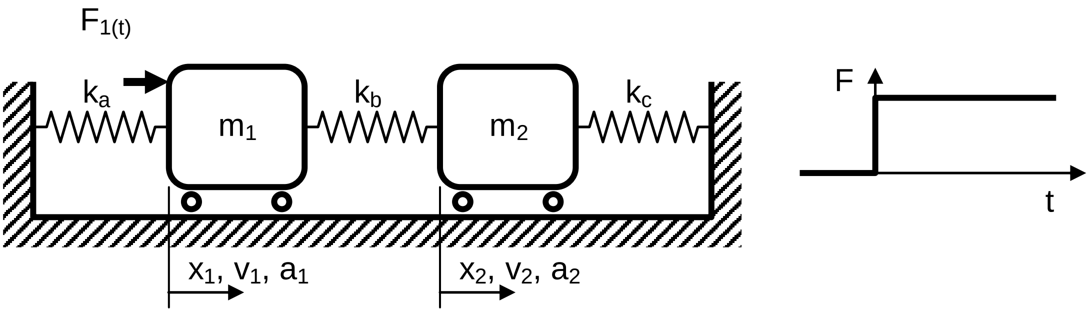
Poznámka : Modální transformaci (2.100) $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{u}$ *můžeme rozepsat jako :*

$$\mathbf{q} = \sum_j u_j \cdot \mathbf{V}^{\langle j \rangle}$$

kde j-tý sloupec v modální matici $\boldsymbol{V}^{\langle j \rangle}$ *je j-tý vlastní tvar. Tento výraz lze interpretovat jako lineární kombinaci vlastních tvarů, kde koeficienty lineární kombinace jsou modální souřadnice* $\boldsymbol{u}$*. Často pak bývá používána formulace, že hledáme řešení ve tvaru lineární kombinace nebo prostě superpozice vlastních tvarů. Toto je pouze jinou interpretací modální transformace.*

Příklad 2.4 Odezva na skokový nárůst budící síly.

Jako příklad uvedeme odezvu soustavy dle obr. 2.31 na rázovou sílu F_1, tedy sílu, jež z nuly skokem nabývá své plné hodnoty.



Obr. 2.31 - Kmitající netlumená soustava, buzená rázovou silou.

Řešení provedeme pro číselné zadání :

$m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_a = 3$ N/mm, $k_b = 4$ N/mm, $k_c = 5$ N/mm, $F_1 = 67$ N, $F_2 = 0$

Pohybové rovnice mají tvar (2.125) :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}_{(t)}$$

Zde matice hmot, matice tuhosti a vektor zatěžujících sil jsou :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{kg}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & k_b + k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 67 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{N}$$

Výpočtem dle kap. 2.2.2. nebo 2.4.1. určíme vlastní čísla, vlastní kruhové frekvence a vlastní frekvence :

$\lambda_1 = 2\,658\ \text{s}^{-2}$ $\Omega_1 = 51{,}6\ \text{s}^{-1}$ $f_1 = 8{,}2\ \text{Hz}$

$\lambda_2 = 8\,842\ \text{s}^{-2}$ $\Omega_1 = 94{,}0\ \text{s}^{-1}$ $f_1 = 15{,}0\ \text{Hz}$

Dále určíme modální matici, kterou normujeme na jedničku :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix}$$

V souladu s kap. 2.4.2. provedeme modální transformaci. Modální matice hmot je :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}849 & 0 \\ 0 & 1{,}424 \end{bmatrix} \text{kg}$$

Modální matice tuhosti je :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}57 & 0 \\ 0 & 12{,}59 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Modální vektor budících sil je :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 67 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 61{,}7 \\ 67 \end{Bmatrix} \text{N}$$

Pohybové rovnice v modálním prostoru mají číselnou podobu :

$$2{,}849 \cdot \ddot{u}_1 + 7570 \cdot u_1 = 61{,}7$$
$$1{,}424 \cdot \ddot{u}_2 + 12590 \cdot u_2 = 67$$

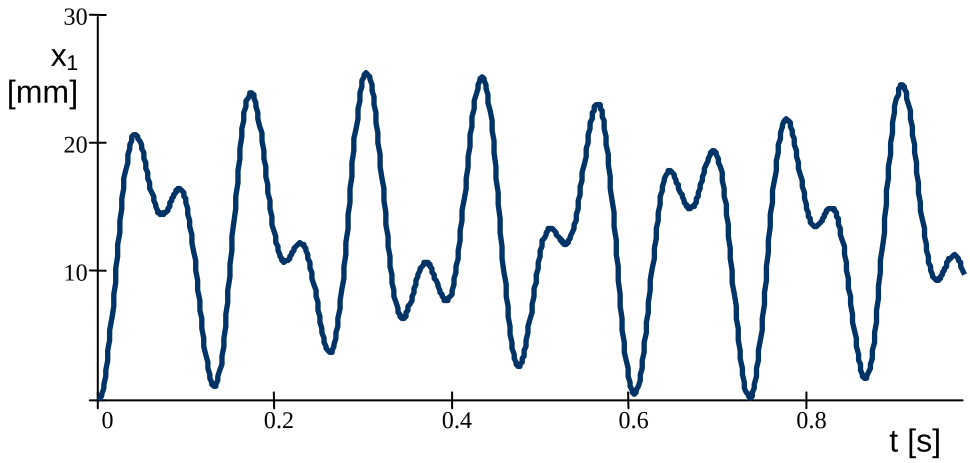
Zde síly na pravých stranách rovnic mají charakter skokového nárůstu. Tato úloha kmitání s jedním stupněm volnosti je popsána v kap. 1.1.9. a pro netlumené kmitání má tvar (1.124) :

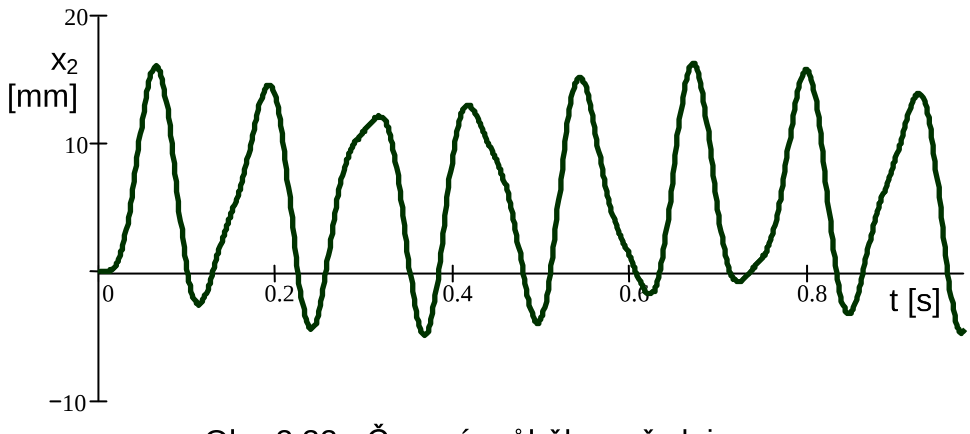
$$u_i = u_{stat\_i} \cdot \left(1 - cos(\Omega_i \cdot t)\right)$$

kde tzv. statické deformace jsou :

$$u_{stat\_1} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_1}{\tilde{\mathbf{K}}_{1,1}} = \frac{61{,}7}{7{,}57} = 8{,}15\,\text{mm}$$

$$u_{stat\_2} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_2}{\tilde{\mathbf{K}}_{2,2}} = \frac{67}{12{,}59} = 5{,}32\,\text{mm}$$





Obr. 2.32 - Časový průběh souřadnic x_1 a x_2.

Konečně původní, fyzikální souřadnice vyjádříme modální transformací :

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}$$

neboli :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}921 & 1 \\ 1 & -0{,}461 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{stat\_1} \cdot \left(1 - cos(\Omega_1 \cdot t)\right) \\ u_{stat\_2} \cdot \left(1 - cos(\Omega_2 \cdot t)\right) \end{Bmatrix}$$

neboli :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}921 \cdot 8{,}15 \cdot (1 - cos(\Omega_1 \cdot t)) + 1 \cdot 5{,}32 \cdot (1 - cos(\Omega_2 \cdot t)) \\ x_2 &= 1 \cdot 8{,}15 \cdot (1 - cos(\Omega_1 \cdot t)) - 0{,}461 \cdot 5{,}32 \cdot (1 - cos(\Omega_2 \cdot t)) \end{aligned} \quad \text{mm}$$

neboli konečně :

$$\begin{aligned} x_1 &= 7{,}51 \cdot (1 - cos(\Omega_1 \cdot t)) + 5{,}32 \cdot (1 - cos(\Omega_2 \cdot t)) \\ x_2 &= 8{,}15 \cdot (1 - cos(\Omega_1 \cdot t)) - 2{,}45 \cdot (1 - cos(\Omega_2 \cdot t)) \end{aligned} \quad \text{mm}$$

Časový průběh je graficky znázorněn na obr. 2.32. Je zřejmé že se nejedná o periodický děj.

2.5. Ohybové kmitání s více stupni volnosti

Čas ke studiu : 1/2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

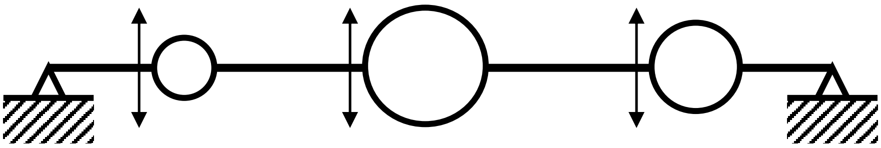
Popsat specifika ohybového kmitání ve srovnání s podélným kmitáním.

Definovat základní veličiny a vztahy, týkající se ohybového kmitání.

Vyřešit středně těžké úlohy ohybového kmitání.

Výklad

Řada úloh technické praxe vede na mechanické modely, představované nehmotným, k rovině kmitání symetrickým nosníkem, který nese osamělé hmoty soustředěné do hmotných bodů.



Obr. 2.33 - Ohybové kmitání s více stupni volnosti.

Při sestavování pohybových rovnic, zejména pak matice tuhosti, se nejčastěji používá znalosti příčinkových činitelů. Jedná se o tyto druhy příčinkových činitelů :

α_{ij} - průhyb v místě i od jednotkové síly v místě j,

β_{ij} - úhel natočení v místě i od jednotkové síly v místě j,

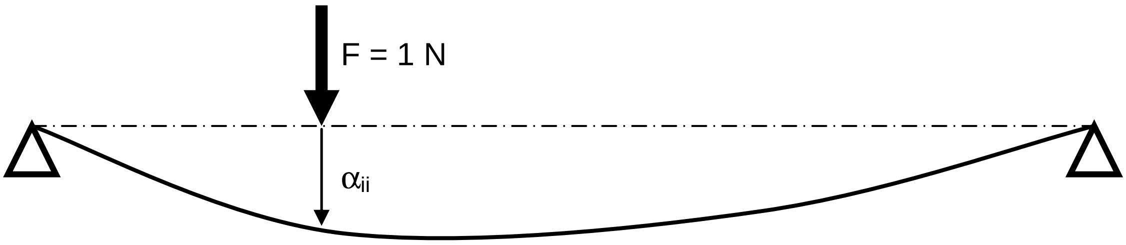
γ_{ij} - průhyb v místě i od jednotkového momentu v místě j,

δ_{ij} - úhel natočení v místě i od jednotkového momentu v místě j.

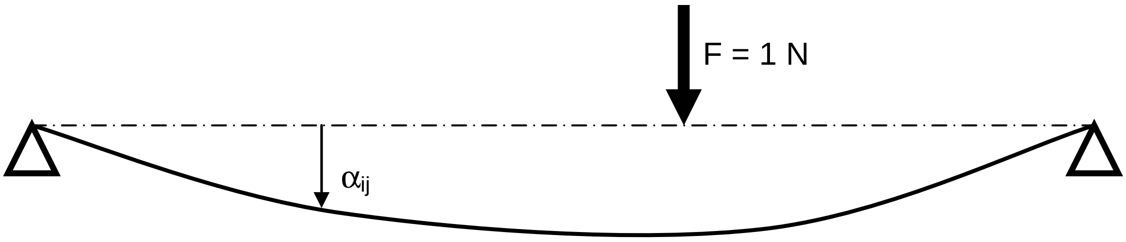
Podle Maxwellovy věty platí : $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\beta_{ij} = \gamma_{ji}$, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Zanedbáme-li rotační setrvačnost hmotných bodů, můžeme se zaměřit na příčinkové činitele α_{ij} (obr. 2.34).

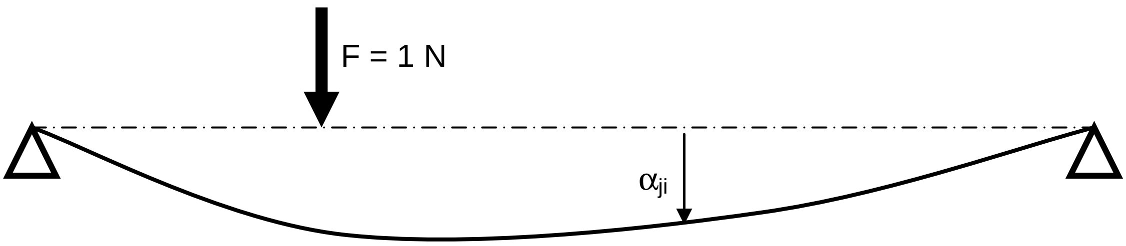
a) příčinkový činitel α_{ii}, průhyb v místě i od jednotkové síly v místě i



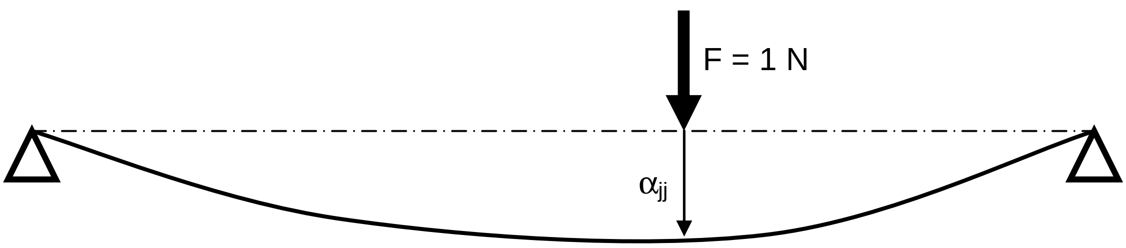
b) příčinkový činitel α_{ij}, průhyb v místě i od jednotkové síly v místě j



c) příčinkový činitel α_{ji}, průhyb v místě j od jednotkové síly v místě i



d) příčinkový činitel α_{jj}, průhyb v místě j od jednotkové síly v místě j



Obr. 2.34 - Příčinkový činitel α_{ij}.

Výpočet příčinkových činitelů je předmětem lineární teorie nosníků. U lineární úlohy, kdy platí princip superpozice, lze průhyb v místě i od daných zatěžujících sil F_j vyjádřit jako :

$$y_i = \sum_j \alpha_{i,j} \cdot F_j$$

Průhyby ve všech místech i = 1 ... n pak vyjádříme jako :

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

nebo prostě :

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} \qquad (2.129)$$

kde $\mathbf{q} = \{y_1, y_2, ... y_n\}^T$ je sloupcová matice průhybů, $\mathbf{f} = \{F_1, F_2, ... F_n\}^T$ je sloupcová matice zatěžujících sil a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.130)$$

je matice příčinkových činitelů, zvaná též matice poddajnosti.

Rovnici (2.129) vynásobíme zleva maticí inverzní k matici příčinkových činitelů :

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}$$

neboli :

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}$$

Srovnáním s maticovou rovnicí statické rovnováhy :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti, je zřejmé, že matice tuhosti je rovna inverzní matici k matici poddajnosti :

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1} \qquad (2.131)$$

Dále pak můžeme psát pohybové rovnice vlastního netlumeného kmitání (2.82), vlastního tlumeného kmitání (2.110) nebo vynuceného kmitání (2.117), (2.120), (2.125) a nalézt jejich řešení tak, jak bylo ukázáno v příslušných kapitolách.

3. Nelineární kmitání s jedním stupněm volnosti

Čas ke studiu : 7 hodin

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat základní zákonitosti nelineárního kmitání.

Definovat základní veličiny a vztahy nelineárního kmitání

Vyřešit středně těžké úlohy nelineárního kmitání

Výklad

3.1. Úvod

Soustava obsahuje alespoň jeden prvek, jehož charakteristika je popsána nelineární závislostí silových a kinematických (deformačních) veličin. Jevy, typické pro nelineární soustavy, jsou např. : závislost vlastní frekvence a tlumení na amplitudě kmitání, víceznačnost řešení, oblasti nestability, vznik subharmonických a vícesložkových kmitů. U nelineárních soustav neplatí princip superpozice.

3.2. Fyzikální příčiny nelinearit a jejich matematické modelování

Čas ke studiu : 1 hodin

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat důvody a příčiny nelinearit.

Definovat základní případy nelinearit.

Výklad

Pohybová rovnice v obecném tvaru :

$$f(\ddot{x},\dot{x},x,t)=0 \tag{3.1}$$

Zde x je tzv. zobecnělá souřadnice. Jde o nelineární diferenciální rovnici 2. řádu. Metoda, která by umožňovala obecné exaktní řešení v uzavřeném tvaru ($x = x_{(t)}$) neexistuje, exaktní řešení známe jen ve vybraných zvláštních případech. Lze provést řešení numerické nebo řešení přibližnými analytickými metodami.

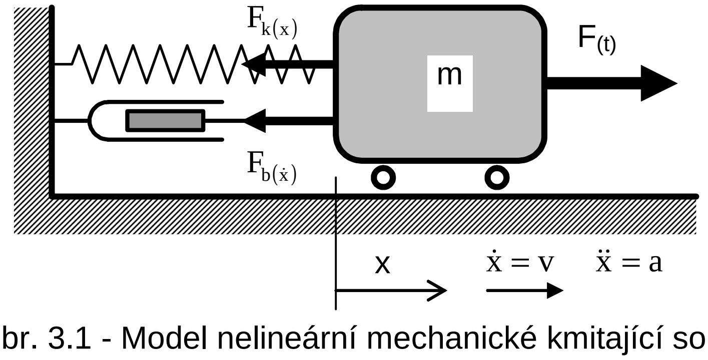
Vzhledem k úrovni a dostupnosti výpočetní techniky je možno získat řešení pohybové rovnice nelineárního kmitání přímo vhodnými numerickými metodami. Z numerického řešení však není možné, bez provedení tzv. numerického experimentu, bezprostředně posoudit vliv jednotlivých parametrů na průběh kmitání. To umožňují přibližné metody analytické, kterými se budeme zabývat v rámci tohoto učebního textu.

Základní případy nelineárního kmitání jsou : volné kmitání, vynucené kmitání, samobuzené kmitání, parametrické kmitání. Nejčastější nelinearity se vyskytují v pružných a tlumících členech. Pak můžeme osamostatnit d'Alembertovu sílu jakož i vnější sílu $F_{(t)}$. Pohybová rovnice pak má tvar :

$$m\cdot\ddot{x}+f(x,\dot{x})=F(t) \tag{3.2}$$

V dalším se budeme zabývat soustavou, kde lze oddělit účinky pružných a tlumících členů. Pak můžeme osamostatnit tzv. <u>vratnou sílu</u> $F_{k(x)}$ a <u>tlumící sílu</u> $F_{b(\dot{x})}$. Pohybová rovnice soustavy dle obr. 3.1 je :

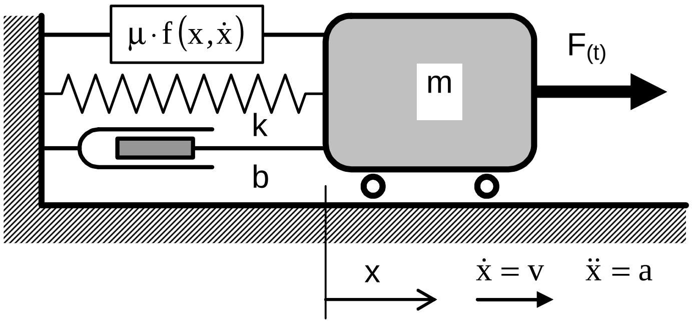
$$m\cdot\ddot{x}+F_{b(\dot{x})}+F_{k(x)}=F(t) \tag{3.3}$$



Obr. 3.1 - Model nelineární mechanické kmitající soustavy.

Závislost vratné síly $F_{k(x)}$ na výchylce, resp. závislost tlumící síly $F_{b(\dot{x})}$ na rychlosti jsou tzv. charakteristiky vratného a tlumícího členu.

Slabě nelineární systémy modelujeme dle obr. 3.2. Pro řešení je výhodné definovat lineární složky charakteristiky, tedy lineární vratnou sílu $F_v = k \cdot x$ a lineární tlumící sílu $F_b = b \cdot v$. Nelinearita pak je vyjádřena členem $\mu \cdot f(x, \dot{x})$ kde $\mu << 1$ je malé číslo.



Obr. 3.2 - Model slabě nelineární mechanické kmitající soustavy.

Pohybová rovnice pak je :

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x + \mu \cdot f(x, \dot{x}) = F(t) \tag{3.4}$$

Příklady nelineárních charakteristik vratné síly :

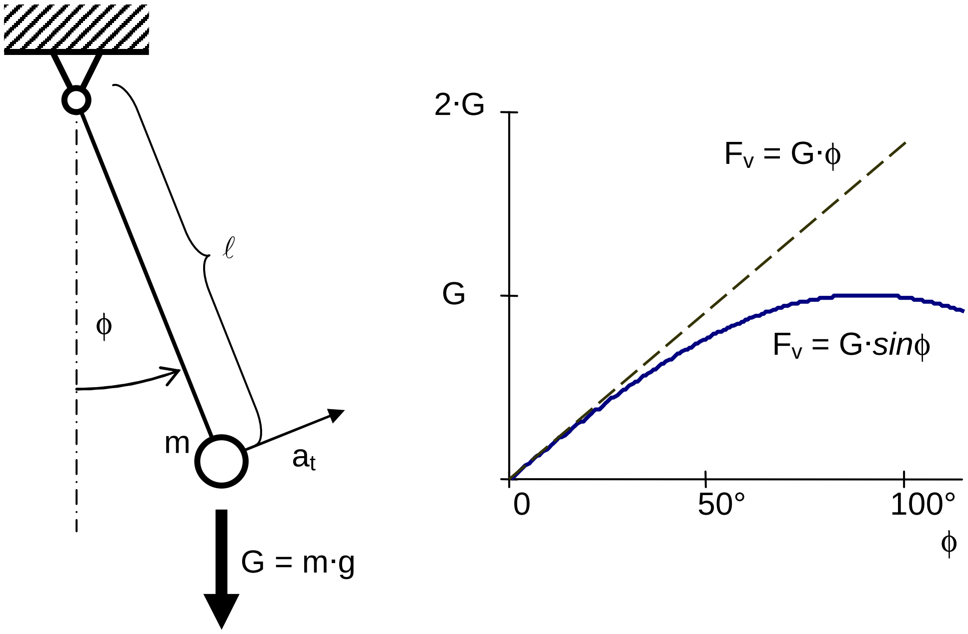
a) Matematické kyvadlo, obr. 3.3a. Hmotný bod o hmotnosti m je zavěšen na nehmotném závěsu délky ℓ. Při kývavém pohybu je poloha bodu dána úhlem ϕ od svislice k závěsu, dráha bodu je $s = \phi \cdot \ell$. Na hmotný bod působí tíhová síla $G = m \cdot g$. Tečné zrychlení bodu je a_t. Pohybová rovnice hmotného bodu je :

$$m \cdot a_t = -G \cdot \sin\phi$$

neboli :

$$m \cdot a_t + G \cdot \sin\phi = 0 \tag{3.5}$$

Zde člen $F_v = G \cdot \sin\phi$ představuje právě vratnou sílu, sílu, jež vrací bod zpět do rovnovážné polohy.



Obr. 3.3a - Matematické kyvadlo.

Pro klasifikaci charakteristiky je důležitá směrnice její tečny v počátku. Je-li :

$$F_v = G \cdot sin\,\phi \tag{3.6}$$

pak její derivace, směrnice tečny, je :

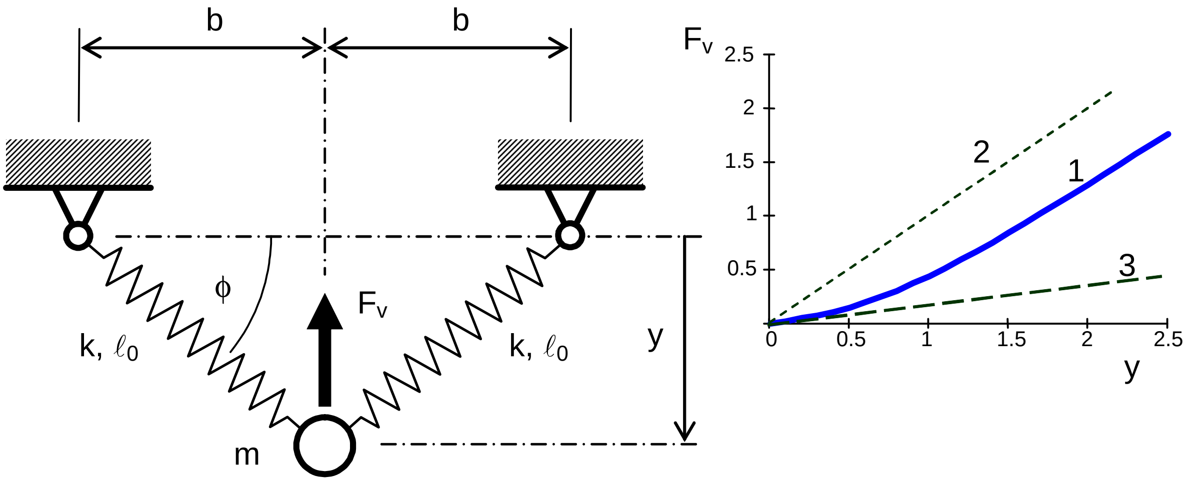
$$\frac{dF_v}{d\phi} = G \cdot cos\,\phi$$

V počátku, pro $\phi = 0$, pak platí :

$$\left.\frac{dF_v}{d\phi}\right._{(\phi=0)} = G \cdot cos\,0 = G$$

Přímka $F_v = G \cdot \phi$ je tedy tečnou charakteristiky v počátku (pro malý úhel lze charakteristiku linearizovat touto přímkou). Je zřejmé, že skutečná hodnota vratné síly je vždy menší, než hodnota, daná touto linearizací (s výjimkou polohy $\phi = 0$, kdy jsou si rovny, neboť $0 = 0$), $G \cdot sin\phi < G \cdot \phi$. Charakteristika, ležící vždy pod svou vlastní tečnou v počátku, se nazývá <u>měknoucí charakteristika</u> (jako by se s narůstající výchylkou okamžitá tuhost zmenšovala).

<u>b) Geometrická nelinearita</u>, obr. 3.3b. Uvažujme hmotný bod, uchycený na dvou shodných lineárních pružinách o tuhosti k a volné délky ℓ_0 (délka nedeformované pružiny). Pružiny jsou vázánu k rámu ve dvou kloubech o celkové rozteči 2·b (b > ℓ_0). Celá soustava je symetrická vůči svislé ose. Poloha vychýleného bodu je dána souřadnicí y.



Obr. 3.3b - Geometrická nelinearita.

Při vychýlení hmotného bodu z rovnovážné polohy mezi oběma klouby vzniká v obou pružinách direkční síla $F_D = k\cdot(\ell-\ell_0)$, kde kromě tuhosti k a volné délky ℓ_0 je ℓ okamžitá délka pružiny. Direkční síly mají vodorovnou a svislou složku. Zatímco vodorovné složky se navzájem odečítají, svislé složky se sčítají a dávají vratnou sílu $F_v = 2\cdot F_D\cdot \sin\phi$. Vyjádříme-li úhel ϕ jako funkci posunutí bodu y, dostáváme závislost vratné síly na výchylce, charakteristiku soustavy (křivka 1 na obr. 3.3b) :

$$F_v = 2\cdot k\cdot y\cdot\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{b^2+y^2}}\right) \tag{3.7}$$

Poznámka : Pro velmi vysoké hodnoty y se zlomek v závorce blíží nule a charakteristika se blíží rovnoběžce s přímkou $F_v = 2\cdot k\cdot y$ (přímka 2 na obr. 3.3b).

První derivace funkce F_v, a tedy směrnice tečny charakteristiky, je :

$$\frac{dF_v}{dy} = 2\cdot k\cdot\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{b^2+y^2}}+\frac{\ell_0\cdot y^2}{\left(b^2+y^2\right)^{3/2}}\right)$$

V počátku charakteristiky (y = 0) má první derivace hodnotu :

$$\frac{dF_v}{dy}_{(y=0)} = 2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{\ell_0}{b}\right)$$

Přímka

$$F_v = 2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{\ell_0}{b}\right) \cdot y$$

je tedy tečnou charakteristiky v počátku (přímka 3 na obr. 3.3b). Protože

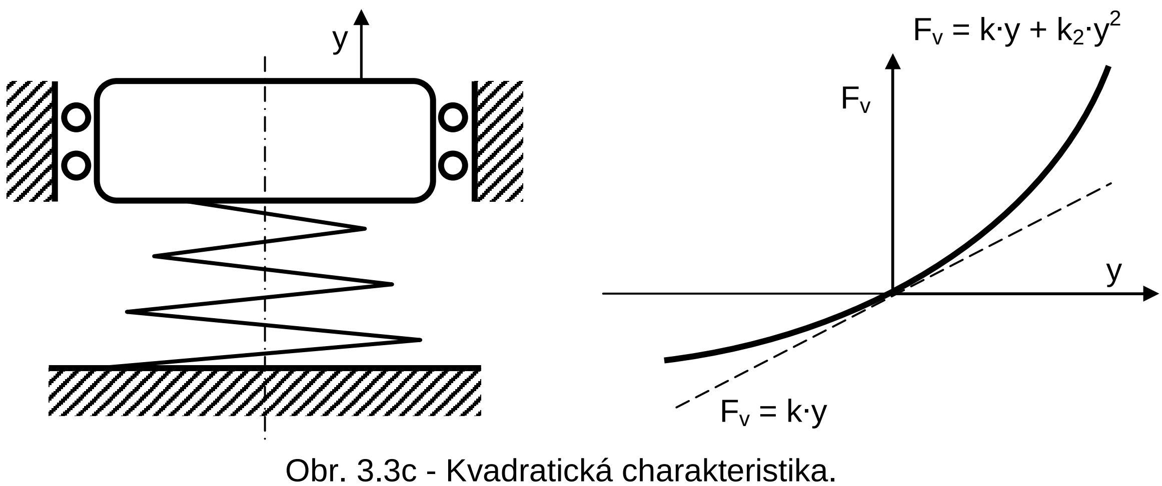
$$1 - \frac{\ell_0}{b} < 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{b^2 + y^2}}$$

je skutečná hodnota vratné síly vždy větší, než hodnota, daná tečnou v počátku. Charakteristika, ležící vždy nad svou vlastní tečnou v počátku, se nazývá tvrdnoucí charakteristika (jako by se s narůstající výchylkou okamžitá tuhost zvětšovala).

Oba předchozí příklady jsou systémy se symetrickou charakteristikou (z matematického hlediska se jedná o tzv. lichou funkci, pro niž platí $F_{v(-x)} = -F_{v(+x)}$). Některé nelineární systémy však nemají symetrickou charakteristiku.

c) Kvadratická charakteristika, obr. 3.3c. Hmotný bod je uložen na pružině tvaru kónické spirály. Její charakteristiku lze vyjádřit jako kvadratickou parabolu.

$$F_v = k \cdot y + k_2 \cdot y^2 \tag{3.8}$$



Obr. 3.3c - Kvadratická charakteristika.

Směrnice tečny je :

$$\frac{dF_v}{dy} = k + 2 \cdot k_2 \cdot y$$

Směrnice tečny v počátku je :

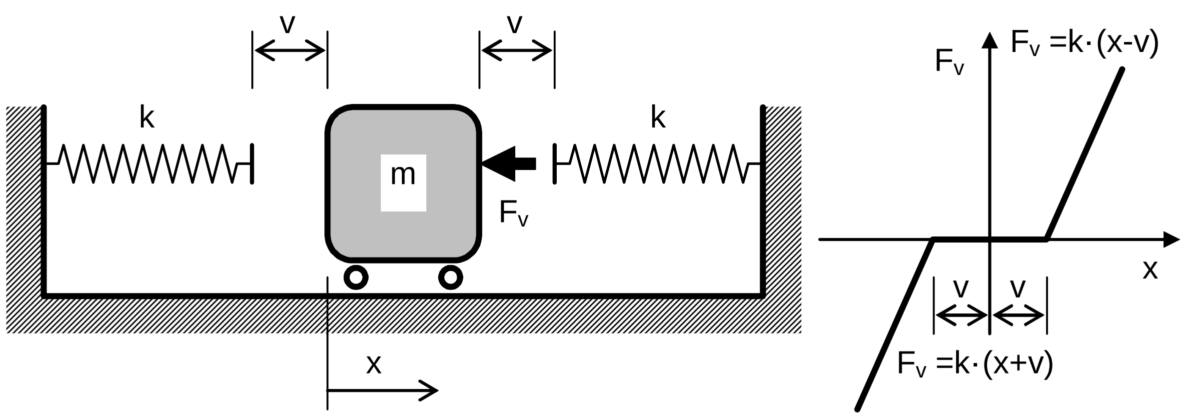
$$\left.\frac{dF_v}{dy}\right|_{(y=0)} = k$$

Tečna k charakteristice v počátku tedy je :

$$F_v = k \cdot y$$

Pro y>0 platí, že skutečná hodnota vratné síly je větší než hodnota, daná tečnou, charakteristika je nad tečnou a je tedy <u>tvrdnoucí</u>.
Pro y<0 však platí, že skutečná hodnota vratné síly je menší než hodnota, daná tečnou (srovnáváme absolutní hodnoty), charakteristika je pod tečnou (blíže k ose y) a je tedy <u>měknoucí</u>.

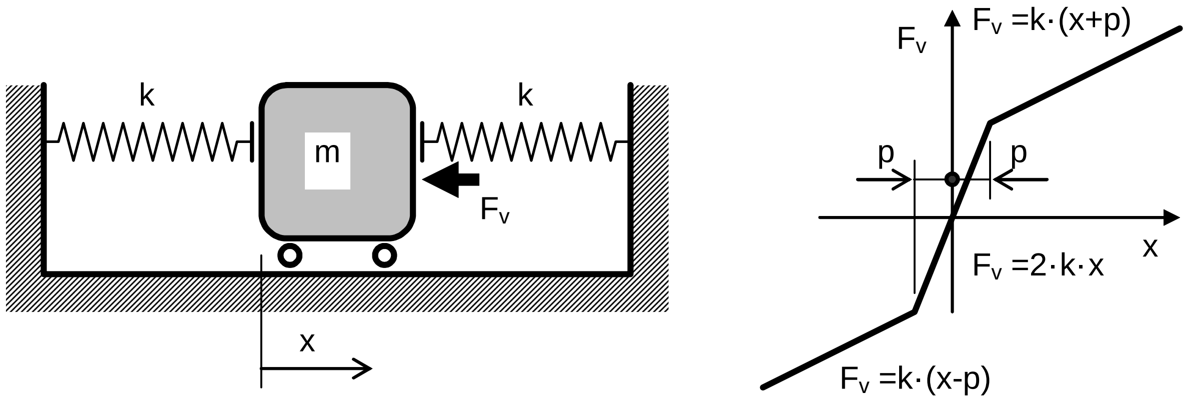
<u>d) Kontakt s vůlí</u>, obr. 3.3d. Těleso je ve svém pohybu omezeno vůči rámu pružinami o tuhosti k. Ovšem mezi tělesem a pružinami je vůle v.



Obr. 3.3d - Kontakt s vůlí.

Pokud se těleso pohybuje v rozmezí $x \in \langle -v, v \rangle$, proti pohybu není kladen žádný odpor, tuhost je nulová. Když se však vymezí vůle v, je-li $|x| > v$, pak se začne deformovat jedna nebo druhá pružina a proti vychýlení působí vratná síla $F_v = k \cdot (x-v)$. Charakteristika je tvrdnoucí, ovšem je nespojitá v první derivaci.

e) Kontakt s předpětím, obr. 3.3e. Těleso je vázáno vůči rámu dvěma shodnými pružinami o tuhosti k. Každá pružina má předpětí p, tedy v rovnovážné poloze je stlačena o tuto hodnotu.



Obr. 3.3e - Kontakt s předpětím.

Pokud se těleso pohybuje v rozmezí $x \in \langle -p, p \rangle$, tuhost uložení je dána paralelním spojením dvou pružin, tedy $2\cdot k$, direkční síla je $F_D = 2\cdot k\cdot x$. Pokud posunutí v jednom či druhém směru překročí hodnotu předpětí, je-li $|x| > p$, jedna z pružin se uvolní a tuhost je pak již dána pouze jednou pružinou, tedy k, direkční síla je $F_D = k\cdot(x+p)$. Charakteristika je měknoucí, ovšem je nespojitá v první derivaci.

Základní charakteristiky nelineárních tlumících členů, závislost tlumící síly na rychlosti, jsou na obr. 3.4.

a) Hydraulické tlumení se symetrickou charakteristikou, obr. 3.4a. Nejběžnější nelineární tlumení je tlumení kvadratické, kdy tlumící síla závisí na druhé mocnině rychlosti :

$$F_b = b \cdot v^2$$

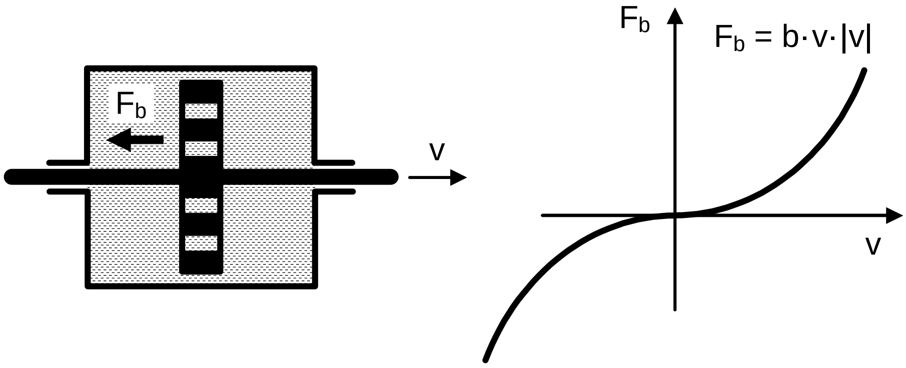
Tento matematický zápis ovšem není vhodný, neboť smazává informaci o směru tlumící síly vždy proti směru rychlosti. Jak pro kladnou, tak pro zápornou rychlost dává sílu stejného směru. Matematický zápis, zahrnující změnu směru tlumící síly při změně směru rychlosti, může být např. :

$$F_b = b \cdot |v| \cdot v \tag{3.9}$$

nebo :

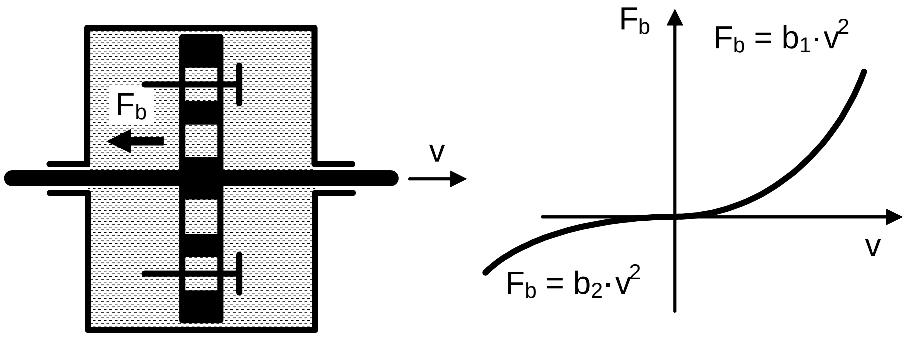
$$F_b = b \cdot v^2 \cdot sign(v)$$

kde funkce *sign*(v) vrací +1 je-li argument kladný a -1 je-li argument záporný.



Obr. 3.4a - Hydraulické tlumení.

b) Automobilový tlumič, obr. 3.4b. V důsledku technického řešení je tlumící síla v jednom směru podstatně větší, než ve druhém.



Obr. 3.4b - Automobilový tlumič.

Pro v>0 platí :

$$F_b = b_1 \cdot v^2 \tag{3.10a}$$

Pro v<0 platí :

$$F_b = b_2 \cdot v^2 \tag{3.10b}$$

(Pro zápornou rychlost bude koeficient tlumení b_2 záporný, $|b_2|<b_1$.)

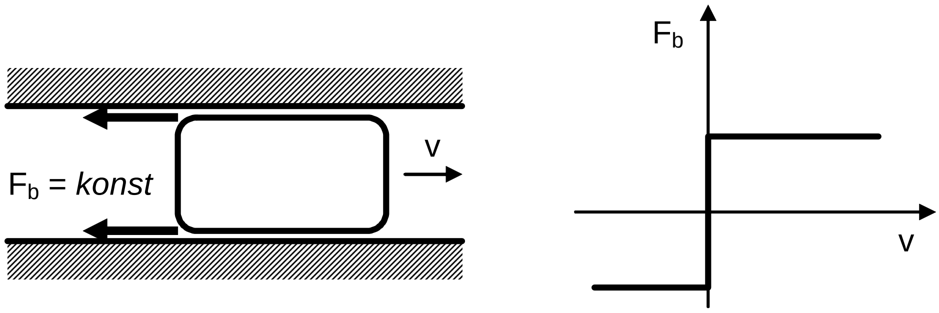
c) Suché tření, obr. 3.4c. Třecí síla závisí na koeficientu tření a na velikosti přítlačné síly, ale (alespoň v prvním přiblížení) nezávisí na rychlosti. Abychom dodrželi formalismus zápisu tlumící síly s koeficientem tlumení b, a abychom vyjádřili směr třecí síly proti směru rychlosti, můžeme použít zápis :

$$F_b = b \cdot \frac{v}{|v|} \tag{3.11}$$

nebo, podobně jako u hydraulického tlumení :

$$F_b = b \cdot sign(v)$$

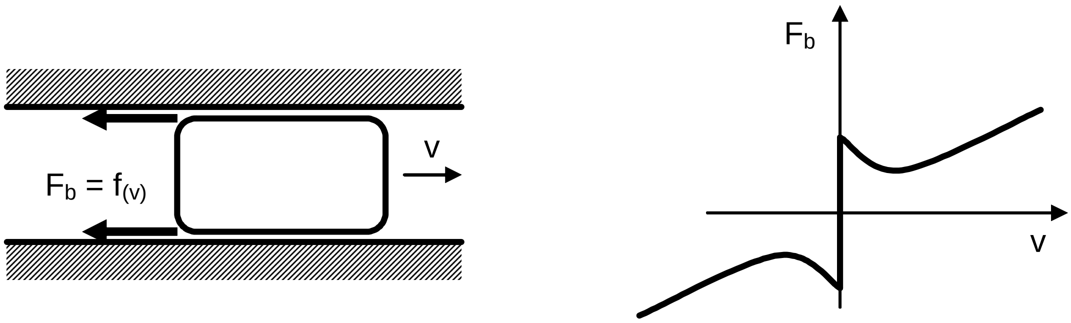
V obou případech koeficient tlumení $b = F_b$ vyjadřuje přímo tlumící sílu.



Obr. 3.4c - Suché tření.

Charakteristika je nespojitá v počátku, což může způsobovat problémy při numerickém řešení.

<u>d) Suché tření s vlivem rychlosti</u>, obr. 3.4d. Při podrobnějším vyšetřování suchého tření zjišťujeme, že třecí síla závisí na rychlosti. Charakter této závislosti zde však již nebudeme zkoumat.



Obr. 3.4d - Suché tření s vlivem rychlosti.

3.3. Přesné řešení pohybové rovnice volného kmitání

Čas ke studiu : 2 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat základní postupy přesného řešení nelineárního kmitání.

Definovat matematické postupy, vedoucí k nalezení přesného řešení nelineárního kmitání.

Vyřešit přesně středně těžké úlohy nelineárního kmitání

Výklad

3.3.1. Konzervativní soustava

Předpokládejme pohybovou rovnici konzervativní soustavy (bez tlumení) ve tvaru :

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0 \tag{3.12}$$

Tuto rovnici lze formálně řešit integrací za použití vztahu pro zrychlení :

$$a = \ddot{x} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Rovnici (3.12) upravíme na :

$$m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx} = -f(x)$$

provedeme separaci proměnných :

$$m \cdot v \cdot dv = -f(x) \cdot dx$$

Tuto rovnici budeme integrovat v mezích od počáteční dráhy x_0 resp. počáteční rychlosti v_0 (počáteční podmínky) do obecné dráhy x a obecné rychlosti v :

$$\int_{v0}^{v} m \cdot v \cdot dv = \int_{x0}^{x} -f(x) \cdot dx$$

Levou stranu můžeme integrovat přímo :

$$\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0{}^2 = \int_{x0}^{x} -f(x) \cdot dx$$

integrál na pravé straně závisí na konkrétním tvaru funkce f(x). Odtud pak vyjádříme rychlost jako funkci polohy, souřadnice x :

$$v = \pm\sqrt{v_0^{\,2} - \frac{2}{m} \cdot \int_{x0}^{x} f(x) \cdot dx} \tag{3.13}$$

Vyjádříme-li dále rychlost jako :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

můžeme ve výrazu (3.13) separovat proměnné :

$$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{v_0^{\,2} - \frac{2}{m} \cdot \int_{x0}^{x} f(x) \cdot dx}}$$

a znovu integrovat :

$$t = \int_{x0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{v_0^{\,2} - \frac{2}{m} \cdot \int_{x0}^{x} f(x) \cdot dx}} \tag{3.14}$$

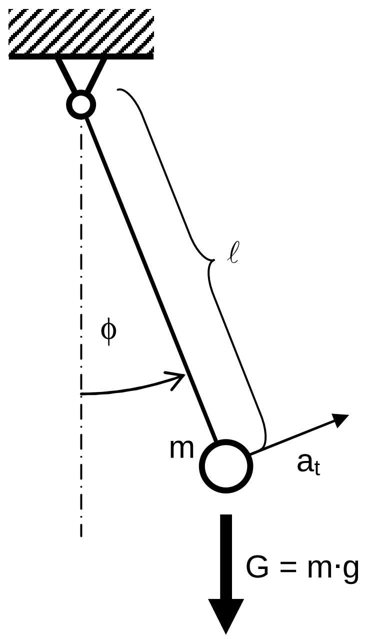
Přesné řešení uvedených integrálů, zejména pak (3.14), lze nalézt jen pro některé jednoduché funkce. Na druhé straně vždy lze tyto integrály řešit numericky, výsledkem však není funkce, již by bylo možno analyzovat, ale pouze číselná hodnota řešení dané úlohy.

Příklad 3.1 Matematické kyvadlo.

Jako příklad uvedeme řešení matematického kyvadla.

Hmotný bod o hmotnosti m je zavěšen na nehmotném závěsu délky ℓ, viz kap. 3.2., obr. 3.3a jakož i obr. 3.5. Pohybová rovnice (3.5) byla odvozena v kap. 3.2. :

$$m \cdot a_t + G \cdot \sin\phi = 0$$



Obr. 3.5 - Matematické kyvadlo.

Vyjádříme-li tečné zrychlení jako :

$$a_t = \varepsilon \cdot \ell$$

kde ε je úhlové zrychlení, a tíhovou sílu jako :

$$G = m \cdot g$$

můžeme pohybovou rovnici matematického kyvadla (po vykrácení hmotnosti) psát jako :

$$\ell \cdot \varepsilon + g \cdot \mathit{sin}\,\phi = 0 \tag{3.15}$$

<u>Lineární řešení pro malý úhel ϕ</u> : sinus malého úhlu je přibližně roven hodnotě tohoto úhlu, vyjádřené v radiánech :

$$\mathit{sin}\,\phi \cong \overset{\frown}{\phi}$$

V kap. 1.2. Kmitání rotační je v tabulce uvedena chyba této přibližné rovnosti pro různé hodnoty úhlu ϕ. Obvykle se pro účely technických výpočtů uvádí mez přijatelnosti $\phi < 15°$, kdy chyba je do 1 %. Pohybová rovnice (3.15) pak bude mít tvar

$$\ell \cdot \varepsilon + g \cdot \phi = 0 \tag{3.16}$$

Srovnáme-li tuto pohybovou rovnici s pohybovou rovnicí vlastního netlumeného kmitání hmotného bodu (1.2) :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

je zřejmé, že se jedná o analogii.

pohybová rovnice hmotného bodu (1.2)	pohybová rovnice matematického kyvadla (3.16)
$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$	$\ell \cdot \varepsilon + g \cdot \phi = 0$
místo souřadnice x	je použita souřadnice ϕ
druhá derivace vyjadřuje zrychlení $\ddot{x} = a$	druhá derivace vyjadřuje úhlové zrychlení $\ddot{\phi} = \varepsilon$
místo tuhosti k	je použito gravitační zrychlení g
místo hmotnosti m	je použita délka závěsu ℓ

Řešení pohybové rovnice (3.16) tedy bude analogické k řešení dle (1.7) :

$$\phi_{(t)} = C \cdot sin(\Omega_0 \cdot t + \gamma_0) \tag{3.17}$$

kde vlastní kruhová frekvence bude analogicky k (1.4) :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{3.18}$$

a též integrační konstanty C (amplituda) a γ_0 (fázový posuv) se určí z počátečních podmínek (t = 0 ... $\phi = \phi_0$, $\omega = \omega_0$) analogicky k (1.10) resp. (1.11) :

$$C = \sqrt{\phi_0{}^2 + \frac{\omega_0{}^2}{\Omega_0{}^2}} \qquad \gamma_0 = arctan\frac{\Omega_0 \cdot \phi_0}{\omega_0} \tag{3.19}$$

Při větších hodnotách úhlu ϕ však již chyba linearizovaného řešení neúnosně narůstá. Vraťme se tedy k nelineární pohybové rovnici (3.15) :

$$\ell \cdot \varepsilon + g \cdot sin\,\phi = 0$$

Vyjádříme-li úhlové zrychlení jako :

$$\varepsilon = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\phi}$$

můžeme v pohybové rovnici separovat proměnné :

$$\ell \cdot \omega \cdot d\omega = -g \cdot sin\,\phi \cdot d\phi$$

a následně integrovat. Spodní mezí určitého integrálu budou počáteční podmínky :

t = 0 ... $\phi = \phi_0$ - počáteční úhel, $\omega = \omega_0$ - počáteční úhlová rychlost.

$$\int_{\omega 0}^{\omega} \ell \cdot \omega \cdot d\omega = \int_{\phi 0}^{\phi} -g \cdot \sin\phi \cdot d\phi$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \ell \cdot \left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right) = g \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)$$

a konečně :

$$\omega_{(\phi)} = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)} \tag{3.20}$$

což vyjadřuje závislost úhlové rychlosti ω na poloze, na úhlu ϕ. Odtud můžeme určit maximální hodnotu úhlu ϕ, protože v této úvrati je úhlová rychlost nulová.

$$\omega_{(\phi=\phi mx)} = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi_{max} - \cos\phi_0)} = 0$$

$$\cos\phi_{max} = \cos\phi_0 - \frac{{\omega_0}^2 \cdot \ell}{2 \cdot g}$$

Vyjádříme-li dále úhlovou rychlost jako :

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

můžeme separovat proměnné a integrovat :

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)}$$

$$\frac{d\phi}{\sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)}} = dt$$

$$\int_0^t dt = t = \int_{\phi 0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)}}$$

Výsledkem by byla závislost úhlu ϕ na čase. Ovšem obecné řešení integrálu asi neumíme nalézt. Provedeme-li však numerické řešení integrálu, můžeme určit čtvrtinu periody T a následně frekvenci kyvadla :

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4} = \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{{\omega_0}^2 + \frac{2 \cdot g}{\ell} \cdot (\cos\phi - \cos\phi_0)}}$$

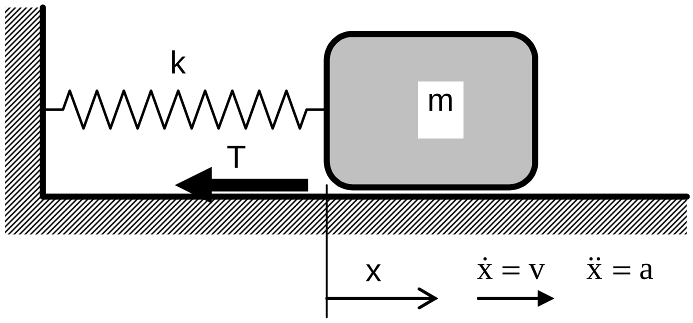
$$f = \frac{1}{T}$$

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

3.3.2. Nekonzervativní soustava

Řešení budeme pouze demonstrovat na příkladu.

Volné kmitání, tlumené suchým smykovým třením. Výpočtový model dle obr. 3.6. Těleso o hmotnosti m je vázáno k rámu pružinou o tuhosti k. Proti směru pohybu působí konstantní třecí síla T (velikost třecí síly zde nebude diskutována).



Obr. 3.6 - Vlastní kmitání, tlumené suchým smykovým třením.

Pohybová rovnice je :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = \pm T \tag{3.21}$$

Zde záporné znaménko u třecí síly platí pro pohyb doprava (v>0), kladné pro pohyb doleva (v<0). Řešení je podrobně popsáno v kap. 1.1.3., vztahy (1.37) a (1.38) :

$$x_{(t)} = \pm p + C \cdot \mathit{sin}(\Omega_0 \cdot t + \phi_0) \tag{3.22}$$

kde :

$$p = \frac{T}{k}$$

je tzv. statická deformace. I zde záporné znaménko u členu p platí pro pohyb doprava (v>0), kladné pro pohyb doleva (v<0). Úseky s kladnou a zápornou rychlostí představují jednotlivé půlperiody harmonického průběhu, jenž je vždy posunut o ±p.

Průběh rozebereme podrobněji pro počáteční podmínky : t = 0 ... $x = x_0$, $v = v_0 = 0$ (předpokládáme, že $x_0 > p$; v opačném případě by kmitání vůbec nenastalo, těleso by vlivem tření zůstalo „přilepeno“ k podložce). Řešení (3.22) pak bude mít tvar :

$$x_{(t)} = \pm p + C \cdot \mathit{cos}(\Omega_0 \cdot t) \tag{3.23}$$

Na počátku, v čase t = 0, bude v souladu s počátečními podmínkami C = x_0-p.

Úsek $t \in \langle 0, {}^1/_2 \cdot T\rangle$: Těleso se pohybuje doleva, rychlost je záporná,

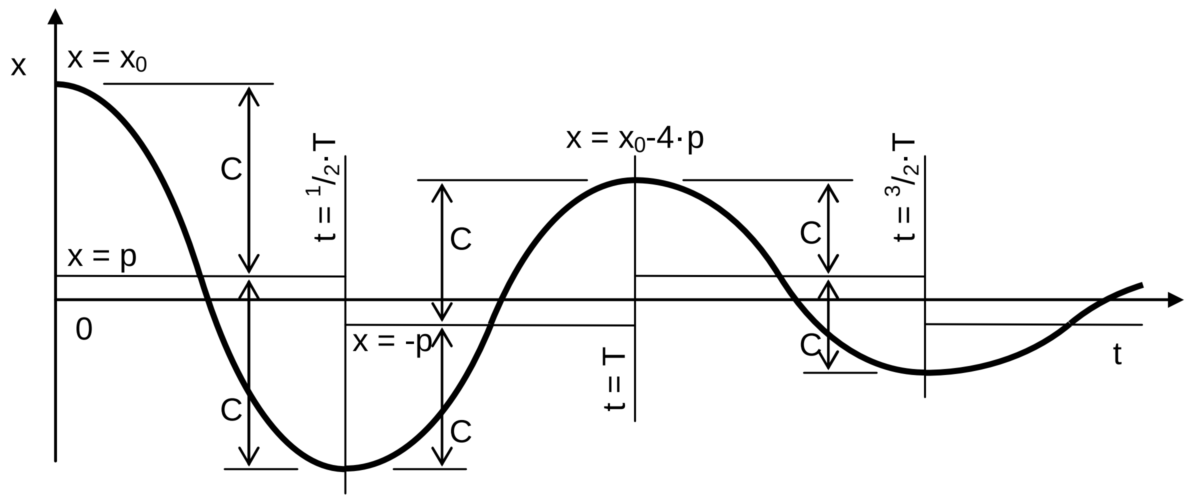
$x_{(t)} = +p + C \cdot cos(\Omega_0 \cdot t)$, C = x_0-p, střední hodnota sinusovky je x = p, na konci úseku, v čase t = $^1/_2 \cdot$T, je x = p-C = 2$\cdot$p-x_0 = x_0-2$\cdot$C.

Úsek $t \in \langle {}^1/_2 \cdot T, T\rangle$: Těleso se pohybuje doprava, rychlost je kladná,

$x_{(t)} = -p + C \cdot cos(\Omega_0 \cdot t)$, C = x_0-3$\cdot$p, střední hodnota je x = -p, na konci úseku, v čase t = T, je x = -p+C = x_0-4$\cdot$p.

Úsek $t \in \langle T, {}^3/_2 \cdot T \rangle$: Těleso se pohybuje doleva, rychlost je záporná,

$x_{(t)} = +p + C \cdot cos(\Omega_0 \cdot t)$, C = x_0-5$\cdot$p, střední hodnota je x = p, na konci úseku, v čase t = $^3/_2 \cdot$T, je x = p-C = 6$\cdot$p-x_0.



Obr. 3.7 - Vlastní kmitání, tlumené smykovým třením, časový průběh.

Průběh lze zhodnotit takto : Frekvence kmitání je nezávislá na velikosti třecí síly. Průběhem je sinusovka, posunutá při kladné rychlosti o hodnotu -p, při záporné rychlosti o hodnotu +p. Amplituda kmitání lineárně klesá, za dobu jedné periody klesne o hodnotu 4$\cdot$p. Z toho lze vypočíst při daných vstupních hodnotách čas, kdy se kmitání zastaví (amplituda klesne pod hodnotu p).

3.4. Přibližné analytické metody řešení nelineárního kmitání

Čas ke studiu : 3 hodiny

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat základní přibližné metody linearizace.

Definovat matematické postupy, vedoucí k linearizaci pohybové rovnice.

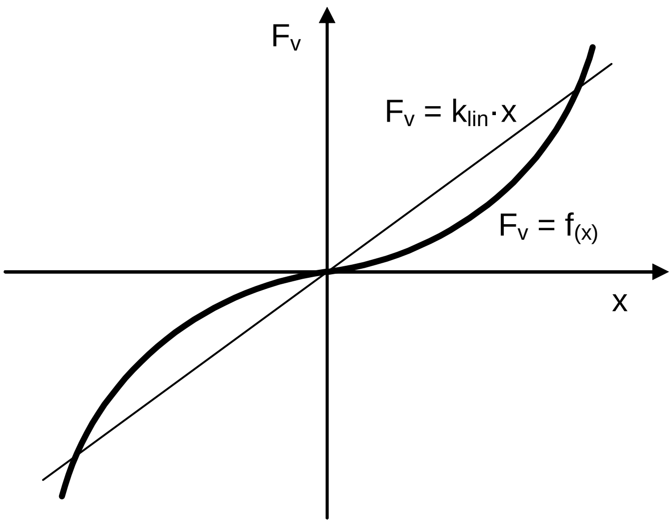
Vyřešit přibližně středně těžké úlohy nelineárního kmitání linearizací.

Výklad

Za přibližné analytické metody považujeme metody, jež nahrazují nelineární pohybovou rovnici takovou lineární rovnicí, jež má řešení nejbližší k řešení původní nelineární rovnice. Proto tyto metody označujeme jako metody linearizace.

3.4.1. Metoda přímé linearizace

Je použitelná i u značných nelinearit. Nelineární charakteristika může být definována matematickým zápisem nebo i tabelárně. Podstatou metody je náhrada nelineární charakteristiky přímkou (viz obr. 3.8).



Obr. 3.8 - Náhrada nelineární charakteristiky přímkou.

Směrnici přímky k_{lin} určíme z podmínky, že střední kvadratická odchylka mezi původní funkcí $F_v = f_{(x)}$ a linearizovanou funkcí $F_v = k_{lin} \cdot x$ má být minimální v intervalu, daném amplitudou kmitání $x \in \langle -C, +C \rangle$. Protože tyto odchylky $r_{(x)} = f_{(x)} - k_{lin} \cdot x$ mají větší váhu pro velké výchylky (při malých výchylkách je obvykle úroveň nelineárnosti úlohy malá), doporučuje se použít střední kvadratickou odchylku vynásobenou výchylkou, tedy $r_{(x)} \cdot x$. Součet těchto odchylek v daném intervalu je dán integrálem :

$$J = \int_{-C}^{+C} \left[\left(f_{(x)} - k_{lin} \cdot x \right) \cdot x \right]^2 \cdot dx \tag{3.24}$$

Hledáme takovou hodnotu linearizované tuhosti k_{lin}, pro kterou tento integrál bude nabývat minimální hodnoty, tedy bude platit :

$$\frac{dJ}{dk_{lin}} = 0$$

$$\frac{dJ}{dk_{lin}} = \frac{d}{dk_{lin}} \left(\int_{-C}^{+C} \left[\left(f_{(x)} - k_{lin} \cdot x \right) \cdot x \right]^2 \cdot dx \right) = 0$$

$$\frac{d}{dk_{lin}} \left(\int_{-C}^{+C} \left[f_{(x)} \cdot x - k_{lin} \cdot x^2 \right]^2 \cdot dx \right) = 0$$

$$\int_{-C}^{+C} 2 \cdot \left[f_{(x)} \cdot x - k_{lin} \cdot x^2 \right] \cdot \left(-x^2 \right) \cdot dx = 0$$

$$\int_{-C}^{+C} \left[k_{lin} \cdot x^4 - f_{(x)} \cdot x^3 \right] \cdot dx = 0$$

$$\int_{-C}^{+C} k_{lin} \cdot x^4 \cdot dx = \int_{-C}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx$$

$$k_{lin} \cdot \left(\frac{x^5}{5} \right)_{-C}^{+C} = k_{lin} \cdot \frac{2 \cdot C^5}{5} = \int_{-C}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx$$

a tedy :

$$k_{lin} = \frac{5}{2 \cdot C^5} \cdot \int_{-C}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx \tag{3.25}$$

Je-li charakteristika $F_v = f_{(x)}$ symetrická (lichá funkce, pro niž platí : $f_{(-x)} = -f_{(x)}$), pak platí :

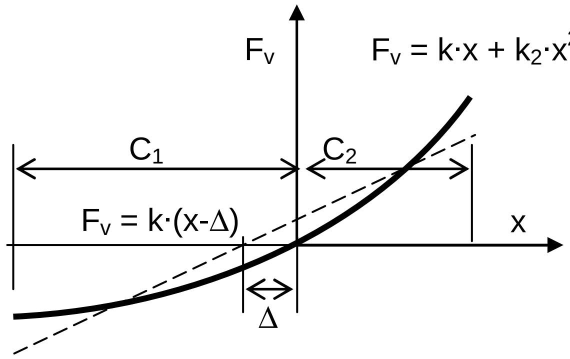
$$\int_{-C}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx$$

a tedy :

$$k_{lin} = \frac{5}{C^5} \cdot \int_{0}^{+C} f_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx \tag{3.26}$$

Výraz pro linearizovanou tuhost (3.26) byl odvozen pro symetrickou charakteristiku. Ukážeme nyní postup pro nesymetrickou charakteristiku, např. kvadratickou (3.8) dle obr. 3.3c a též obr. 3.9 :

$$F_v = k \cdot y + k_2 \cdot y^2$$



Obr. 3.9 - Nesymetrická kvadratická charakteristika.

Především je třeba si uvědomit, že amplituda ve směru záporné výchylky (C_1 na obr. 3.9) a amplituda ve směru kladné výchylky (C_2 na obr. 3.9) nejsou stejně velké. Jejich poměr je však dán podmínkou stejné potenciální deformační energie pro obě amplitudy. Tuto podmínku můžeme vyjádřit jako :

$$\int_{-C1}^{0} F_{v(x)} \cdot dx = -\int_{0}^{C2} F_{v(x)} \cdot dx$$

nebo :

$$\int_{0}^{C1} F_{v(x)} \cdot dx = \int_{0}^{C2} F_{v(x)} \cdot dx$$

nebo prostě :

$$\int_{-C1}^{C2} F_{v(x)} \cdot dx = 0 \tag{3.27}$$

Střední hodnota souřadnice x je :

$$\Delta = \frac{C_2 - C_1}{2} \tag{3.28}$$

Náhradní přímková charakteristika prochází tímto bodem, má rovnici :

$$F_v = k_{lin} \cdot (x - \Delta) \tag{3.29}$$

Amplituda vzhledem ke střední hodnotě je :

$$C_V = \frac{C_1 + C_2}{2} \tag{3.30}$$

Zavedením posunuté souřadnice :

$$x_V = x - \Delta \tag{3.31}$$

vyjádříme linearizovanou tuhost (srovnej s (3.26)) jako :

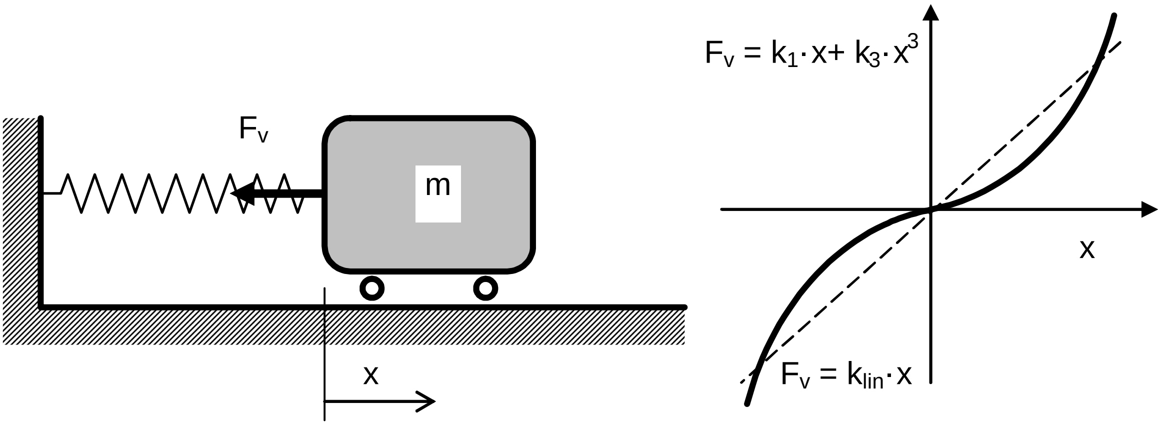
$$k_{lin} = \frac{5}{2 \cdot C_V{}^5} \cdot \int_{-Cv}^{+Cv} f_{(xv+\Delta)} \cdot x_V{}^3 \cdot dx_V \tag{3.32}$$

Příklad 3.2a Linearizace kubické charakteristiky.

Pro ilustraci ukážeme řešení vlastního a vynuceného kmitání nelineární soustavy s kubickou charakteristikou (s nulovým kvadratickým členem) .

$$F_v = k_1 \cdot x + k_3 \cdot x^3 \tag{3.33}$$

Charakteristika je symetrická, tvrdnoucí.



Obr. 3.10 - Model s kubickou charakteristikou.

Linearizovaná tuhost je :

$$k_{lin} = \frac{5}{C^5} \cdot \int_0^C F_{v(x)} \cdot x^3 \cdot dx = \frac{5}{C^5} \cdot \int_0^C \left(k_1 \cdot x + k_3 \cdot x^3\right) \cdot x^3 \cdot dx = \frac{5}{C^5} \cdot \int_0^C \left(k_1 \cdot x^4 + k_3 \cdot x^6\right) \cdot dx$$

$$k_{lin} = \frac{5}{C^5} \cdot \left[\frac{k_1}{5} \cdot x^5 + \frac{k_3}{7} \cdot x^7\right]_0^C = \frac{5}{C^5} \cdot \left[\frac{k_1}{5} \cdot C^5 + \frac{k_3}{7} \cdot C^7\right]$$

$$k_{lin} = k_1 + \tfrac{5}{7} \cdot k_3 \cdot C^2 \tag{3.34}$$

Linearizovaná pohybová rovnice má tvar dle (1.2) :

$$m \cdot \ddot{x} + k_{lin} \cdot x = 0$$

Její řešení je dle (1.7) :

$$x_{(t)} = C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

Vlastní kruhová frekvence dle (1.4) je :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{lin}}{m}}$$

Konečně amplituda a fázový posuv závisí na počátečních podmínkách dle (1.10) a (1.11) :

$$C = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\Omega^2}}$$

$$\phi_0 = \mathit{arctan}\frac{\Omega \cdot x_0}{v_0}$$

Problém při numerickém výpočtu spočívá ve skutečnosti, že amplituda C závisí na kruhové frekvenci Ω, ta závisí na linearizované tuhosti k_{lin} a ta zase závisí na amplitudě C. Vztah pro vlastní kruhovou frekvenci :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{lin}}{m}}$$

můžeme upravit na :

$$\Omega^2 = \frac{k_{lin}}{m} = \frac{k_1 + \frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot C^2}{m} = \frac{k_1}{m} + \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot \left(x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\Omega^2} \right) = \Omega_0^{\,2} + + \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot \left(x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\Omega^2} \right)$$

kde

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

je vlastní kruhová frekvence pro velmi malou amplitudu, kdy člen $\frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot C^2$ lze zanedbat.

Dále pak :

$$\Omega^2 - \left(\frac{k_1}{m} + \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot x_0^{\,2} \right) - \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot \frac{v_0^{\,2}}{\Omega^2} = 0$$

a po vynásobení Ω^2 :

$$\Omega^4 - \left(\frac{k_1}{m} + \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot x_0^{\,2} \right) \cdot \Omega^2 - \frac{5}{7} \cdot \frac{k_3}{m} \cdot v_0^{\,2} = 0$$

Jedná se o bikvadratickou rovnici, jejíž kořeny umíme nalézt. Jakmile známe vlastní kruhovou frekvenci Ω, vypočteme z počátečních podmínek amplitudu C a linearizovanou tuhost k_{lin}.

K výsledku můžeme dospět i jednodušším iteračním výpočtem.
V prvním přiblížení zanedbáme nelineární člen ve výrazu pro linearizovanou tuhost k_{lin}. To provedeme tak, že za amplitudu C dosadíme nulu (C = 0).

1. Vypočteme linearizovanou tuhost $k_{lin} = k_1 + \frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot C^2$

2. Vypočteme vlastní kruhovou frekvenci $\Omega = \sqrt{\frac{k_{lin}}{m}}$

3. Vypočteme upřesněnou hodnotu amplitudy $C = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\Omega^2}}$

4. Vracíme se do bodu 1.

Pro číselné hodnoty : $m = 1$ kg, $k_1 = 100$ N/mm, $k_3 = 1$ N/mm^3,
a pro počáteční podmínky : $x_0 = 10$ mm, $v_0 = 5$ m/s,
má úloha přibližné řešení : $k_{lin} = 244$ N/mm, $\Omega = 494$ s^{-1}, C = 14,2 mm
Iterační výpočet konverguje k výsledku s přesností 1 % po 6 iteracích.

Při řešení ustáleného vynuceného kmitání linearizované soustavy, buzené harmonicky proměnnou budící silou $F = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$, postupujeme jako u lineární soustavy. Řešení ustáleného vynuceného kmitání je (1.45) :

$$x = x_a \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)$$

amplituda pak je (1.48) :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$$

nebo se zanedbáním tlumení :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\left|\Omega^2 - \omega^2\right|}$$

Protože však je vlastní kruhová frekvence Ω funkcí amplitudy x_a, je třeba ji vyjádřit jako :

$$\Omega^2 = \frac{k_{lin}}{m} = \frac{k_1 + \frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot x_a^{\ 2}}{m}$$

Amplituda pak je dána implicitním výrazem :

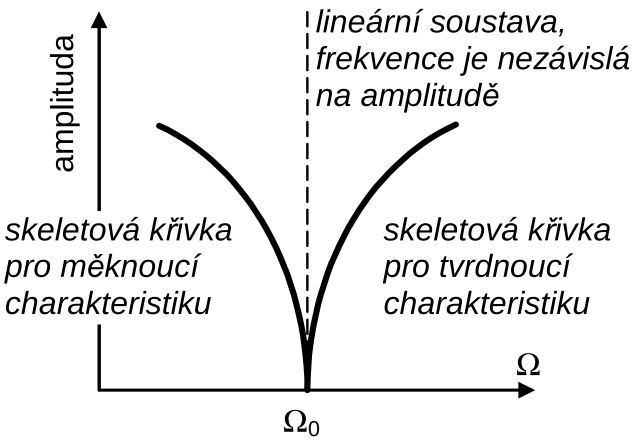
$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\left| \frac{k_1 + \frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot x_a^{\ 2}}{m} - \omega^2 \right|} = \frac{F_a}{\left| k_1 + \frac{5}{7} \cdot k_3 \cdot x_a^{\ 2} - m \cdot \omega^2 \right|}$$

Řešení vede na kubickou rovnici :

$$\tfrac{5}{7} \cdot k_3 \cdot x_a^{\ 3} + \left(k_1 - m \cdot \omega^2\right) \cdot x_a \pm F_a = 0$$

Iterační výpočet pro F_a = 1000 N a ω = 100 s^{-1} konverguje k řešení x_a = 7,6 mm s přesností 1 % po 11 iteracích.

Příklad názorně ukazuje významnou vlastnost nelineárních soustav. Vlastní frekvence není konstantním parametrem soustavy, ale závisí na amplitudě kmitání. Tato závislost se obvykle vyjadřujeme formou grafu jako tzv. skeletovou křivku (obr. 3.11).



Obr. 3.11 - Skeletová křivka

3.4.2. Metoda ekvivalentní linearizace

Není tak názorná, jako metoda přímé linearizace.

Předpokládejme pohybovou rovnici ve tvaru :

$$m \cdot \ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \qquad (3.35)$$

pro vlastní kmitání, nebo :

$$m \cdot \ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F_a \cdot \mathit{sin}(\omega \cdot t) \qquad (3.36)$$

pro harmonicky buzené kmitání.

Předpokládejme dále řešení vlastního kmitání v harmonickém tvaru :

$$\begin{aligned} x &= C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) \\ \dot{x} &= C \cdot \Omega \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) \end{aligned} \qquad (3.37)$$

kde C je amplituda a ϕ je fázový posuv (u vlastního kmitání jsou to též integrační konstanty).

Dosazením (3.37) do nelineární funkce $f(x, \dot{x})$ v (3.35) vznikne periodický výraz. Ten rozvineme do Fourierovy řady, v níž budeme uvažovat pouze první členy, ostatní zanedbáme.

$$f(x, \dot{x}) = f(C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi), C \cdot \Omega \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi)) \cong A \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) + B \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) \qquad (3.38)$$

Zde A a B jsou koeficienty prvního členu Fourierova rozvoje :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} f(C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi), C \cdot \Omega \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi)) \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) \\ B &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} f(C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi), C \cdot \Omega \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi)) \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) \end{aligned} \qquad (3.39)$$

Z (3.37) můžeme vyjádřit :

$$\begin{aligned} \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) &= \frac{x}{C} \\ \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) &= \frac{\dot{x}}{C \cdot \Omega} \end{aligned} \qquad (3.40)$$

a funkci (3.38) vyjádříme jako

$$f(x, \dot{x}) \cong \frac{A}{C \cdot \Omega} \cdot \dot{x} + \frac{B}{C} \cdot x \qquad (3.41)$$

a pohybová rovnice (3.35) bude mít linearizovaný tvar :

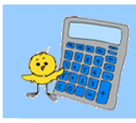
$$m \cdot \ddot{x} + \frac{A}{C \cdot \Omega} \cdot \dot{x} + \frac{B}{C} \cdot x = 0 \tag{3.42}$$

Definujeme-li linearizovanou tuhost k_{lin} a linearizovaný koeficient tlumení b_{lin} jako :

$$\begin{aligned} k_{lin} &= \frac{B}{C} \\ b_{lin} &= \frac{A}{C \cdot \Omega} \end{aligned} \tag{3.43}$$

bude mít pohybová rovnice známý tvar :

$$m \cdot \ddot{x} + b_{lin} \cdot \dot{x} + k_{lin} \cdot x = 0 \tag{3.44}$$



Příklad 3.2b Linearizace kubické charakteristiky.

Jako příklad uvedeme linearizaci soustavy s kubickou charakteristikou dle obr. 3.10. Charakteristika má tvar kubické paraboly (3.33).

$$F_v = f(x) = k_1 \cdot x + k_3 \cdot x^3$$

Koeficienty Fourierova rozvoje jsou :

$$A = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(k_1 \cdot C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) + k_3 \cdot C^3 \cdot \mathit{sin}^3(\Omega \cdot t + \phi)\right) \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

$$B = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(k_1 \cdot C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) + k_3 \cdot C^3 \cdot \mathit{sin}^3(\Omega \cdot t + \phi)\right) \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

neboli :

$$A = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(k_1 \cdot C \cdot \mathit{sin}(\Omega \cdot t + \phi) \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi) + k_3 \cdot C^3 \cdot \mathit{sin}^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot \mathit{cos}(\Omega \cdot t + \phi)\right) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

$$B = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(k_1 \cdot C \cdot \mathit{sin}^2(\Omega \cdot t + \phi) + k_3 \cdot C^3 \cdot \mathit{sin}^4(\Omega \cdot t + \phi)\right) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

Oba koeficienty postupně vyřešíme.

$$A = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

Oba integrály budeme řešit substitucí :

$$sin(\Omega \cdot t + \phi) = z$$
$$cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = dz$$

Pak :

$$\int sin(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \int z \cdot dz = \tfrac{1}{2} \cdot z^2 = \tfrac{1}{2} \cdot sin^2(\Omega \cdot t + \phi)$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[sin^2(\Omega \cdot t + \phi)\right]_0^{2\cdot\pi} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(sin^2(2 \cdot \pi + \phi) - sin^2(\phi)\right)$$

Protože $sin(2\cdot\pi+\phi) = sin(\phi)$ je :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = 0$$

Dále :

$$\int sin^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \int z^3 \cdot dz = \tfrac{1}{4} \cdot z^4 = \tfrac{1}{4} \cdot sin^4(\Omega \cdot t + \phi)$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \tfrac{1}{4} \cdot \left[sin^4(\Omega \cdot t + \phi)\right]_0^{2\cdot\pi} = \tfrac{1}{4} \cdot \left[sin^4(2 \cdot \pi + \phi) - sin^4(\phi)\right]$$

Protože $sin(2\cdot\pi+\phi) = sin(\phi)$ je :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = 0$$

Je tedy Fourierův koeficient A roven nule :

$$A = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^3(\Omega \cdot t + \phi) \cdot cos(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

$$A = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot 0 + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot 0$$

$$A = 0$$

Linearizovaný koeficient tlumení je tedy nulový :

$$b_{lin} = \frac{A}{C \cdot \Omega} = 0$$

Dále Fourierův koeficient B :

$$B = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \left(k_1 \cdot C \cdot sin^2(\Omega \cdot t + \phi) + k_3 \cdot C^3 \cdot sin^4(\Omega \cdot t + \phi)\right) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

$$B = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^2(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^4(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

První integrál je :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^2(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \left[\tfrac{1}{2} \cdot (\Omega \cdot t + \phi) - \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot (\Omega \cdot t + \phi)\right]_0^{2\cdot\pi} =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi + \phi) - \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) - \tfrac{1}{2} \cdot \phi + \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot \phi\right]$$

Protože $sin2 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) = sin2 \cdot \phi$ je :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^2(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \pi$$

Dále :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^4(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \left[\tfrac{3}{8} \cdot (\Omega \cdot t + \phi) - \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot (\Omega \cdot t + \phi) + \tfrac{1}{32} \cdot sin\, 4 \cdot (\Omega \cdot t + \phi)\right]_0^{2\cdot\pi} =$$
$$= \left[\tfrac{3}{8} \cdot (2 \cdot \pi + \phi) - \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) + \tfrac{1}{32} \cdot sin\, 4 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) - \tfrac{3}{8} \cdot \phi + \tfrac{1}{4} \cdot sin\, 2 \cdot \phi - \tfrac{1}{32} \cdot sin\, 4 \cdot \phi\right]$$

Protože $sin2 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) = sin2 \cdot \phi$ jakož i $sin4 \cdot (2 \cdot \pi + \phi) = sin4 \cdot \phi$ je :

$$\int_0^{2\cdot\pi} sin^4(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) = \tfrac{3}{4} \cdot \pi$$

Fourierův koeficient B pak je :

$$B = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^2(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t) + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sin^4(\Omega \cdot t + \phi) \cdot d(\Omega \cdot t)$$

$$B = \frac{k_1 \cdot C}{\pi} \cdot \pi + \frac{k_3 \cdot C^3}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi$$

$$B = k_1 \cdot C + \frac{3}{4} \cdot k_3 \cdot C^3$$

Konečně linearizovaná tuhost je :

$$k_{lin} = \frac{B}{C} = k_1 + \tfrac{3}{4} \cdot k_3 \cdot C^2$$

Další řešení vlastního nebo vynuceného kmitání bude stejné jako u metody přímé linearizace. Výsledek je podobný avšak odlišný od řešení metodou přímé linearizace (3.34). Obě metody jsou přibližné v tom, že nelineární úlohu nahrazují úlohou lineární. Nelze jednoduše určit, která metoda dává lepší výsledky. Pro jednu určitou úlohu (např. úloha s kubickou charakteristikou) lze řešení oběma metodami srovnat s řešením numerickou integrací a posoudit, který výsledek je přesnější. Takový závěr však nelze zobecnit ve prospěch té či oné metody pro všechny úlohy.

3.5. Vlastnosti nelineárních soustav

Čas ke studiu : 1 hodina

Cíl : Po prostudování tohoto odstavce budete umět

Popsat základní vlastnosti nelineárních soustav.

Definovat zákonitosti nelineárních soustav.

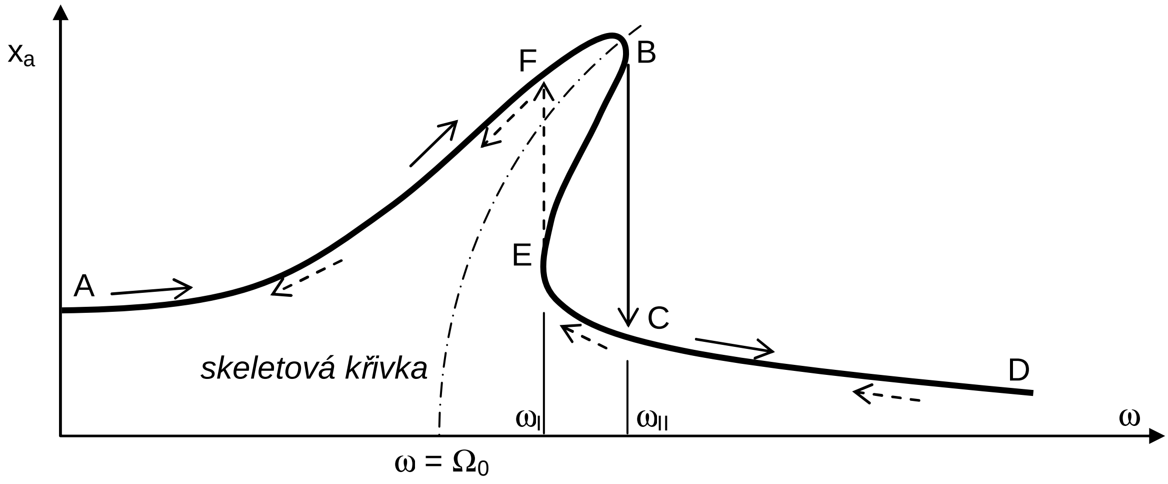
Výklad

A) Vlastní frekvence je závislá na amplitudě.

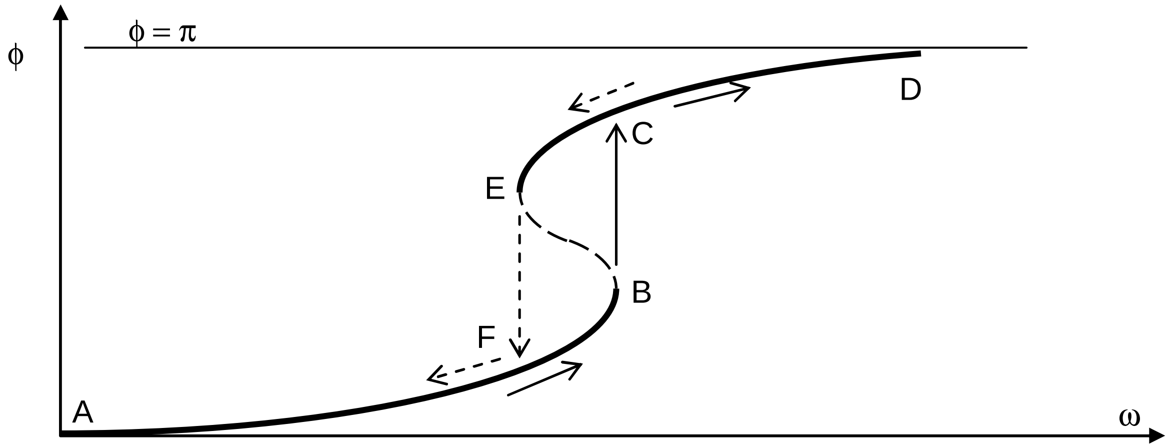
B) Amplitudová a fázová charakteristika jsou odlišné od lineárního kmitání.

V kap. 3.4.1. jsme ukázali výpočet amplitudy ustáleného vynuceného kmitání. Provedeme-li řešení pro jistý interval budící kruhové frekvence ω, dostaneme amplitudovou charakteristiku, závislost amplitudy ustáleného vynuceného kmitání x_a na budící kruhové frekvenci ω, viz obr. 3.12. Čerchovaná čára je tzv. skeletová (páteřová) křivka. Vyjadřuje závislost vlastní kruhové frekvence na amplitudě (viz též obr. 3.11).

Bude-li budící kruhová frekvence ω narůstat pomalu z nulové hodnoty, poroste amplituda x_a podle větve A-B až do bodu B. Zde dojde ke skokové změně amplitudy do bodu C a pokračuje dále po větvi C-D.



Obr. 3.12 - Amplitudová charakteristika



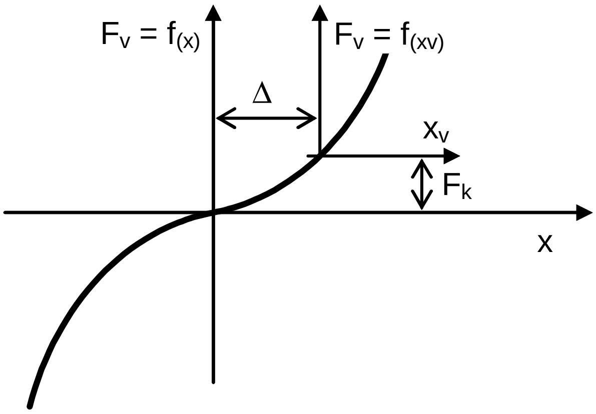
Obr. 3.13 - Fázová charakteristika

Při pomalém poklesu budící kruhové frekvence ω se amplituda zvětšuje podél větve D-E. Zde dojde ke skokové změně amplitudy do bodu F a dále pokračuje podél větve F-A.

Skokové změny na amplitudové charakteristice jsou doprovázeny skokovými změnami B-C a E-F na fázové charakteristice. Tyto skokové změny mezi hodnotami budící kruhové frekvence ω_I a ω_{II} představují nestabilní oblasti, typické pro nelineární soustavy. Budící kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in \langle 0, \omega_I \rangle$, resp. $\omega \in \langle \omega_{II}, \infty \rangle$ odpovídá vždy jediná hodnota amplitudy. Budící kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in \langle \omega_I, \omega_{II} \rangle$ odpovídají tři možné hodnoty amplitudy, mezi nimiž je amplituda nestabilní.

Charakteristiky mohou být ještě složitější v závislosti na parametrech nelineární soustavy a rychlosti změny budící frekvence.

C) Působení konstantní síly posune rovnovážnou polohu a tím změní charakteristiku vratné síly. Symetrická charakteristika $F_v = f_{(x)}$ se posunutím o hodnotu Δ vlivem konstantní síly F_k stane nesymetrickou charakteristikou $F_v = f_{(xv)}$ (viz obr. 3.14).



Obr. 3.14 - Posunutí souřadného systému.

D) Nelineární rezonance. Rezonance soustavy může nastat při hodnotách budící kruhové frekvence :

- hlavní rezonance	$\omega_r = \Omega_{(C)}$	
- subharmonická rezonance	$\omega_r = n \cdot \Omega_{(C)}$	$n = 2, 3, ...$
- ultraharmonická rezonance	$\omega_r = \Omega_{(C)}/m$	$m = 2, 3, ...$
- subultraharmonická rezonance	$\omega_r = n \cdot \Omega_{(C)}/m$	$n, m = 2, 3, ..., n \neq m$

V praxi se nejčastěji setkáváme (kromě hlavní rezonance) se subharmonickou rezonancí. U symetrických charakteristik vratné síly se setkáváme s rezonancí s třetinovou, pětinovou atd. hodnotou budící frekvence. U nesouměrných charakteristik se objevují rezonanční kmity s poloviční frekvencí budící síly.

Příklad 3.3 Subharmonická rezonance.

Následujícím příkladem prokážeme existenci takových kmitů.

Nechť je pohybová rovnice slabě nelineárního kmitání ve tvaru :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + k_3 \cdot x^3 = F_a \cdot cos(\omega \cdot t)$$

Po úpravě a substitucích :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{k_3}{m} = \varepsilon \cdot \frac{k}{m} = \varepsilon \cdot \Omega_0^{\,2} \qquad \varepsilon = \frac{k_3}{k} << 1 \qquad f_a = \frac{F_a}{m}$$

bude mít pohybová rovnice tvar :

$$\ddot{x} + \Omega_0^{\,2} \cdot x + \gamma \cdot x^3 = f_a \cdot \mathit{cos}(\omega \cdot t)$$

Zkoumejme, zda a za jakých předpokladů je možné řešení s třetinovou hodnotou budící frekvence :

$$x = x_a \cdot \mathit{cos}\left(\tfrac{1}{3} \cdot \omega \cdot t\right)$$
$$\dot{x} = -x_a \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \omega \cdot \mathit{sin}\left(\tfrac{1}{3} \cdot \omega \cdot t\right)$$
$$\ddot{x} = -x_a \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \omega^2 \cdot \mathit{cos}\left(\tfrac{1}{3} \cdot \omega \cdot t\right)$$

Dosazením dostaneme :

$$\mathit{cos}\left(\tfrac{1}{3} \cdot \omega \cdot t\right) \cdot \left[x_a \cdot \left(\Omega_0^{\,2} - \tfrac{1}{9} \cdot \omega^2\right) + \tfrac{3}{4} \cdot \gamma \cdot x_a^{\,3}\right] + \mathit{cos}(\omega \cdot t) \cdot \left[\tfrac{1}{4} \cdot \gamma \cdot x_a^{\,3} - f_a\right] = 0$$

když jsme dosadili : $\mathit{cos}^3\,\alpha = \tfrac{3}{4} \cdot \mathit{cos}\,\alpha + \tfrac{1}{4} \cdot \mathit{cos}(3 \cdot \alpha)$

Má-li být rovnice splněna identicky, musí být :

$$x_a \cdot \left(\Omega_0^{\,2} - \tfrac{1}{9} \cdot \omega^2\right) + \tfrac{3}{4} \cdot \gamma \cdot x_a^{\,3} = 0 \qquad \tfrac{1}{4} \cdot \gamma \cdot x_a^{\,3} - f_a = 0$$

Odtud a podle : $\Omega^2 = \dfrac{k + \frac{3}{4} \cdot k_3 \cdot C^2}{m}$ pro metodu ekvivalentní linearizace,

bude platit :

$$x_a = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot f_a}{\gamma}}$$

a

$$\omega = 3 \cdot \sqrt{\Omega_0^{\,2} + \tfrac{3}{4} \cdot \gamma \cdot x_a^{\,2}} = 3 \cdot \Omega_0 \cdot \sqrt{1 + \tfrac{3}{4} \cdot \varepsilon \cdot x_a^{\,2}} = 3 \cdot \Omega$$

Je-li tedy budící frekvence rovna trojnásobku vlastní frekvence jsou možné subharmonické kmity řádu $^1/_3$, amplituda kmitů je x_a.

Teorie nelineárního kmitání je velmi náročná a rozsáhlá. Neexistují v ní obecné a jednoduché metody řešení jako v teorii lineárního kmitání. V této kapitole jsme se zabývali jen základy kmitání nelineárních soustav s jedním stupněm volnosti. Kladli jsme přitom důraz na fyzikální stránku věci, na vlastnosti takových soustav a na jevy, které je odlišují od soustav lineárních.

Literatura

[1] Brousil J., Slavík J., Zeman V. Dynamika. Praha, SNTL 1989.

[2] Brát V., Stejskal V., Votípka F. Základy dynamiky strojů a konstrukcí. Praha, Vydavatelství ČVUT, 1977.

[3] Juliš K., Brepta R. Mechanika, II. díl, dynamika. Praha, SNTL 1987.

[4] Kožešník J. Kmitání mechanických soustav. Praha, Academia 1979.

[5] Timošenko Š. Kmitání ve strojnictví. Praha, SNTL 1960.

[6] Slavík J., Stejskal V., Zeman V. Základy dynamiky strojů. Praha, Vydavatelství ČVUT 1997.