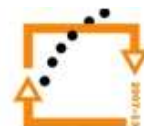




MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdelávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní



POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ NELINEÁRNÍCH PROBLÉMŮ ANSYS – WORKBENCH

Návody do cvičení předmětu „Výpočty v mechanice s použitím MKP“

Jiří Podešva

Ostrava 2011



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu OP VK CZ.1.07/2.3.00/09.0147 „Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu“.

Název: POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ NELINEÁRNÍCH PROBLÉMŮ

Autor: Jiří Podešva

Vydání: první, 2011

Počet stran: 28

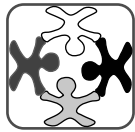
Náklad:

Studijní materiály pro studijní obor Aplikovaná mechanika Fakulty strojní

Jazyková korektura: nebyla provedena



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Vzdělávání lidských zdrojů pro rozvoj týmů ve vývoji a výzkumu

Číslo: CZ.1.07/2.3.00/09.0147

Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© Jiří Podešva

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2763-6

POKYNY KE STUDIU

Výpočty v mechanice s použitím MKP

POČÍTAČOVÉ MODELOVÁNÍ NELINEÁRNÍCH PROBLÉMŮ

ANSYS – WORKBENCH

Pro předmět 2. semestru navazujícího magisterského studia oboru Aplikovaná mechanika jste obdrželi studijní balík obsahující výukový text, zaměřený na problematiku modelování nelinearit v prostředí Ansys - Workbench.

Pro studium problematiky modelování nelinearit jste obdrželi studijní balík obsahující:

- skriptum,
- přístup do e-learningového portálu

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování předmětu MKP I, Modelování MKP, vyučované v rámci bakalářského studia.

Cíl učební opory

Cílem je seznámení se základními pojmy modelování nelinearit. Po prostudování modulu by měl student být schopen vytvářet středně složité modely mechanických soustav a zejména definovat různé druhy nelinearit, zadávat jejich parametry, nastavit výpočet a správně zobrazit a interpretovat výsledky.

Pro koho je předmět určen




Modul je zařazen do studijního plánu navazujícího magisterského studia oboru Aplikovaná mechanika studijního programu Strojní inženýrství, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:**Čas ke studiu:** xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden čas potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly.

**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

-  Popsat ...
-  Definovat ...
-  Vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

**Výklad**

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.

**Shrnutí pojmů**

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.

**Příklad xxx**

V každé kapitole je uveden příklad.

Úspěšné a příjemné studium s tímto učebním textem Vám přeje autor.

Jiří Podešva

OBSAH

1	CO JE TO NELINEARITA	- 6 -
2	GEOMETRICKÁ NELINEARITA - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH.....	- 14 -
3	KONTAKT - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH.....	- 17 -
4	MATERIÁLOVÁ NELINEARITA - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH	- 22 -

1 CO JE TO NELINEARITA



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

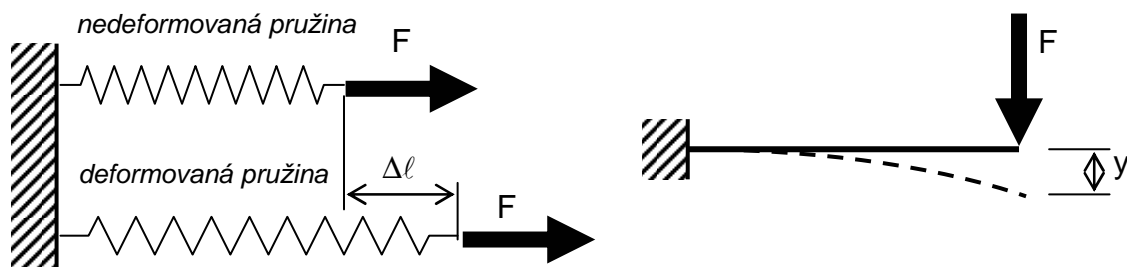
- ✚ Popsat podstatu lineární a nelineární úlohy mechaniky.
- ✚ Definovat jednotlivé typy nelinearit.
- ✚ Vyřešit jednoduché příklady nelinearit.



Výklad

V první kapitole bude vysvětlen pojem „lineární“ a „nelineární“ úloha mechaniky. Budou uvedeny příklady obou typů úloh s několika různými druhy nelinearit.

Pro lineární úlohu mechaniky je určující lineární vztah mezi zatížením a deformací. Např. prodloužení pružiny nebo průhyb nosníku je přímo úměrný zatěžující síle.



Obrázek 1.1 - Lineární úloha mechaniky.

Prodloužení pružiny je :

$$\Delta\ell = \frac{8 \cdot n \cdot D^3 \cdot F}{G \cdot d^4}$$

kde G - modul pružnosti ve smyku [Pa] - vlastnost materiálu,

d - průměr drátu, z něhož je pružina svinuta [m],

D - střední průměr spirály pružiny [m],

n - počet závitů pružiny [-],

F - působící síla [N].

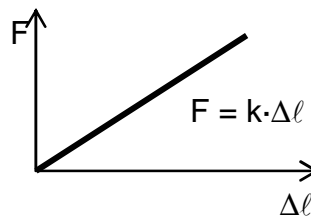
Definujeme-li tuhost pružiny jako poměr mezi silou a deformací, je tento poměr konstantní :

$$k = \frac{F}{\Delta \ell} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} = konst$$

Vztah mezi silou a deformací (charakteristika) je lineární :

$$F = k \cdot \Delta \ell$$

$$\Delta \ell = \frac{1}{k} \cdot F$$



Obrázek 1.2 - Lineární charakteristika.

Průhyb nosníku je :

$$y = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

kde ℓ - délka nosníku [m],

E - modul pružnosti v tahu [Pa] - vlastnost materiálu,

J - moment setrvačnosti průřezu nosníku [m⁴],

F - působící síla [N].

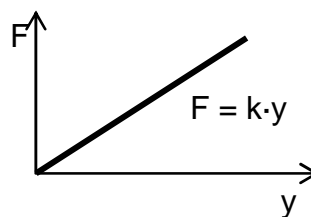
Definujeme-li ohybovou tuhost nosníku jako poměr mezi silou a deformací, je tento poměr konstantní :

$$k = \frac{F}{y} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{\ell^3} = konst$$

Vztah mezi silou a deformací (charakteristika) je lineární :

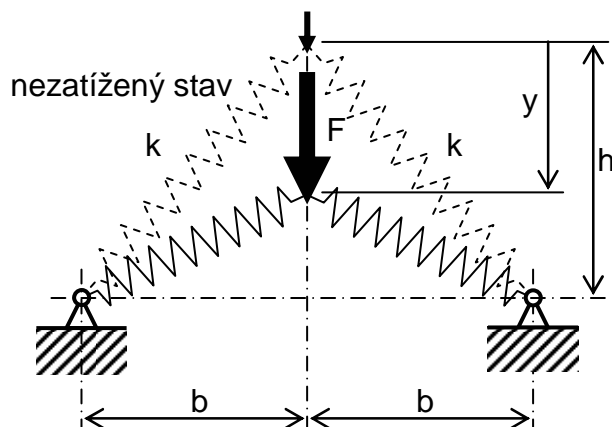
$$F = k \cdot y$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot F$$



Obrázek 1.3 - Lineární charakteristika.

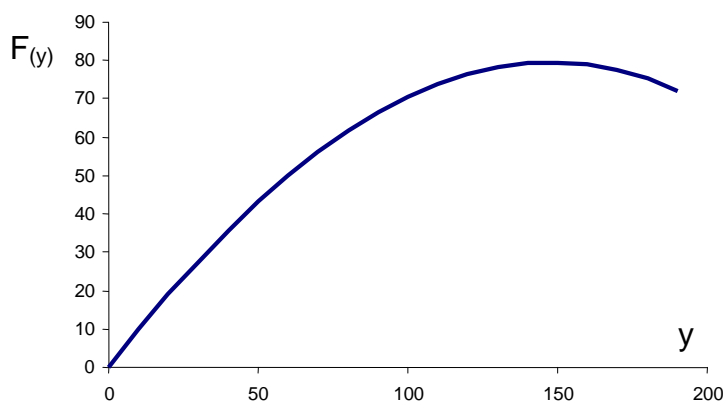
Z nejrůznějších důvodů však vztah mezi silou a deformací může být nelineární. Např. působí-li síla na dvě šikmé pružiny :



Obrázek 1.4 - Nelineární úloha mechaniky.

Dvě shodné pružiny, každá o tuhosti k , jsou uloženy ve dvou kloubových vazbách o rozteči $2 \cdot b$ a v nezatíženém stavu jsou spojeny ve výšce h nad úrovní kloubů (délka $\ell_0 = \sqrt{b^2 + h^2}$ je tzv. volná délka pružiny, tedy délka nezatížené pružiny). Ve styčném bodě jsou pružiny zatíženy silou F svisle dolů. Styčný bod se posune dolů o souřadnici y . Pro vztah mezi zatížením a deformací lze odvodit vzorec :

$$F_{(y)} = 2 \cdot k \cdot \left(\frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{\sqrt{b^2 + (h - y)^2}} - 1 \right) \cdot (h - y)$$



Obrázek 1.5 - Nelineární charakteristika.

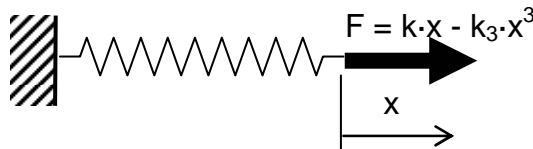
Typickým rysem charakteristiky je, že umožňuje vypočítat sílu F pro zadaný posuv y , avšak opačný postup, vypočítat posunutí y pro zadanou sílu F , je extrémně obtížné.

Poznámka : Povšimneme si, že pokud by bylo posunutí $y \ll h$, pak by úloha byla téměř lineární a charakteristika by se blížila výrazu :

$$F_{(y)} = \left(2 \cdot k \cdot \frac{h^2}{b^2 + h^2} \right) \cdot y$$

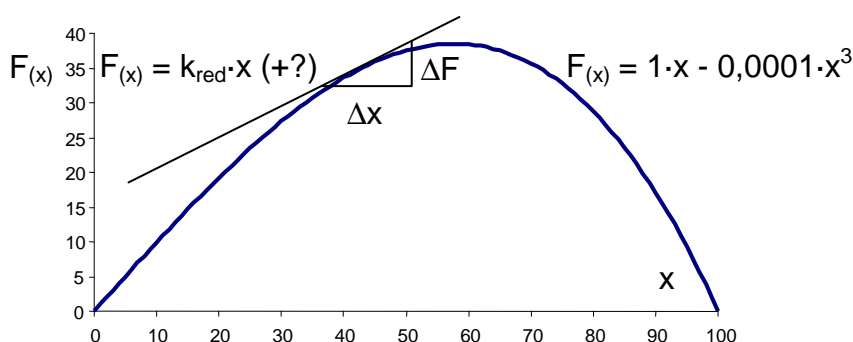
Postup řešení této úlohy (vypočítat posunutí y pro zadanou sílu F) budeme demonstrovat na příkladu s poněkud jednodušší kubickou charakteristikou (aniž bychom popisovali technické souvislosti - kde se s takovou charakteristikou můžeme setkat) :

$$F = k \cdot x - k_3 \cdot x^3$$



Obrázek 1.6 - Nelineární úloha mechaniky.

I tato úloha se vyznačuje snadným výpočtem $x \rightarrow F$, avšak obtížným výpočtem $F \rightarrow x$ (kořen kubické rovnice $k_3 \cdot x^3 - k \cdot x + F = 0$).



Obrázek 1.7 - Kubická charakteristika.

Popíšeme řešení tzv. Newton - Raphsonovou iterační metodou. Spočívá v definici tzv „tečné tuhosti“ k_t . Uvažujeme-li pouze krátký úsek charakteristiky (při velmi malém posunutí x), lze křivku nahradit tečnou přímkou. Směrnice této tečny je dána derivací charakteristiky a představuje tečnou tuhost k_t .

$$k_t = \frac{dF}{dx} = \frac{d(k \cdot x - k_3 \cdot x^3)}{dx} = k - 3 \cdot k_3 \cdot x^2$$

Tato tečná tuhost k_t je samozřejmě v každém bodě charakteristiky jiná a vyjadřuje lineární závislost změny síly na malém posunutí : $\Delta F = k_{red} \cdot \Delta x$.

Vyřešíme nyní prodloužení x pružiny s parametry $k = 1$ N/mm, $k_3 = 0,0001$ N/mm³ (charakteristika viz obrázek 1.5), zatížené silou $F = 35$ N.

1. iterace

Uvažujeme posunutí $x = 0$.

Tečná tuhost je $k_t = k - 3 \cdot k_3 \cdot x^2 = k = 1$ N/mm.

Uvažujeme-li lineární charakteristiku $F = k_t \cdot x$, bude $x = F/k_t = 35$ mm.

Této hodnotě x však odpovídá skutečná síla F :

$$F = k \cdot x - k_3 \cdot x^3 = 1 \cdot 35 - 0,0001 \cdot 35^3 = 30,7 \text{ N.}$$

Zbytková hodnota síly je $F_{zb} = 35 - 30,7 = 4,3$ N.

2. iterace

Uvažujeme posunutí $x = 35$ mm z 1. iterace.

Tečná tuhost je $k_t = k - 3 \cdot k_3 \cdot x^2 = 1 - 3 \cdot 0,0001 \cdot 35^2 = 0,633$ N/mm.

Korekce, odpovídající zbytkové síle $F_{zb} = 4,3$ N z 1. iterace,

$$\text{je } \Delta x = F_{zb}/k_t = 4,3/0,633 = 6,78 \text{ mm.}$$

Opravené posunutí je $x = x_{1.\text{iterace}} + \Delta x = 35 + 6,78 = 41,78$ mm.

Této hodnotě x však odpovídá skutečná síla F :

$$F = k \cdot x - k_3 \cdot x^3 = 1 \cdot 41,78 - 0,0001 \cdot 41,78^3 = 34,5 \text{ N.}$$

Zbytková hodnota síly je $F_{zb} = 35 - 34,5 = 0,5$ N.

3. iterace

Uvažujeme posunutí $x = 41,78$ mm z 2. iterace.

Tečná tuhost je $k_t = k - 3 \cdot k_3 \cdot x^2 = 1 - 3 \cdot 0,0001 \cdot 41,78^2 = 0,476$ N/mm.

Korekce, odpovídající zbytkové síle $F_{zb} = 0,5$ N z 2. iterace,

$$\text{je } \Delta x = F_{zb}/k_t = 0,5/0,476 = 1,08 \text{ mm.}$$

Opravené posunutí je $x = x_{2.\text{iterace}} + \Delta x = 41,78 + 1,08 = 42,86$ mm.

Této hodnotě x však odpovídá skutečná síla F :

$$F = k \cdot x - k_3 \cdot x^3 = 1 \cdot 42,86 - 0,0001 \cdot 42,86^3 = 34,99 \text{ N.}$$

Zbytková hodnota síly je $F_{zb} = 35 - 34,99 = 0,01$ N.

Tento postup, graficky znázorněný na obrázku 1.6, opakujeme tak dlouho, až oprava posunutí Δx a zbytková hodnota síly F_{zb} jsou menší, než požadovaná přesnost.

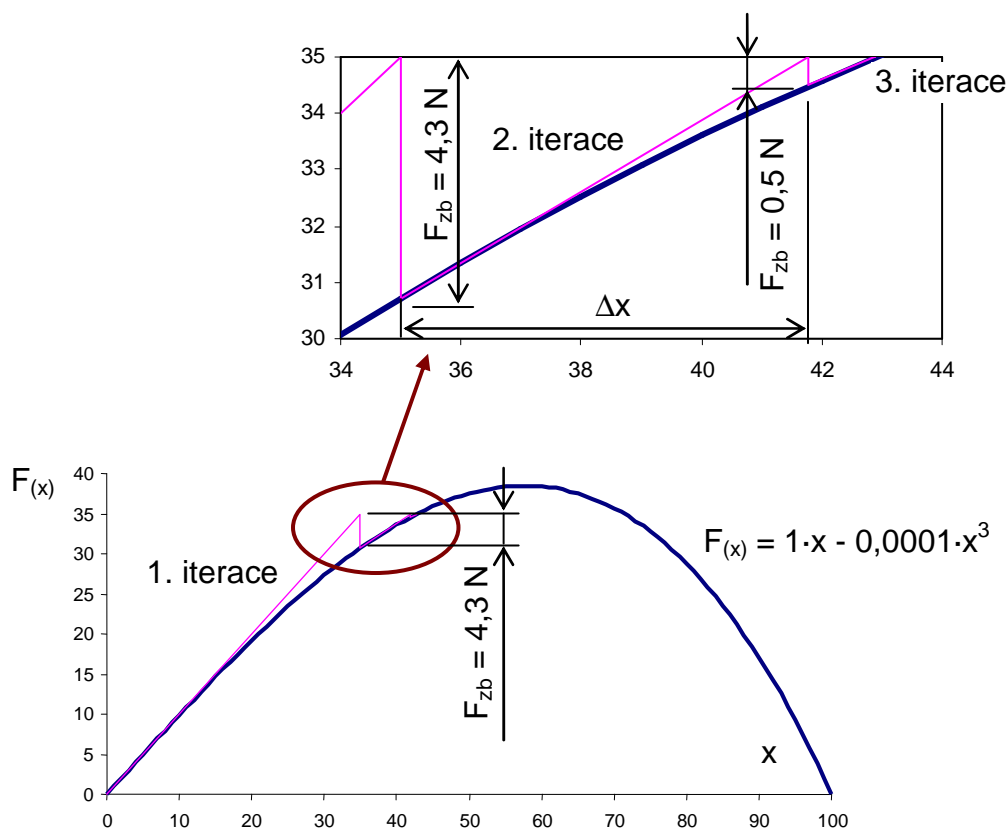
Shrneme nyní charakteristické rysy popsaného postupu.

Matematický popis problému je tzv. charakteristika - závislost síly na deformaci.

Matematický popis problému umožňuje výpočet síly ze zadané deformace, avšak neumožňuje opačný výpočet deformace ze zadané síly.

Derivace charakteristiky určuje tzv. tečnou tuhost - směrnici tečny k charakteristice. Tato tečná tuhost představuje linearizaci problému na malém úseku charakteristiky. Tato tečná tuhost je pro různé hodnoty deformace různá.

Při výpočtu řešíme úlohu „jako by byla lineární“, avšak v iteracích, odpovídajících přibližnému řešení deformace, přepočítáváme hodnotu tečné tuhosti v závislosti na deformaci a počítáme opravy deformace. Iterace pokračují až do stavu kdy je chyba menší než požadovaná přesnost.

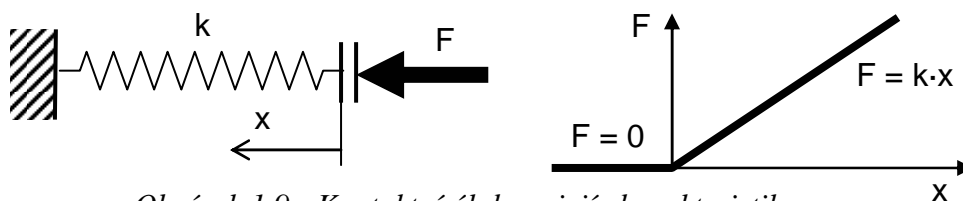


Obrázek 1.8 - Iterační postup Newton - Raphsonovou metodou.

Typy nelinearit

Popsaný typ nelinearity se obvykle nazývá geometrická nelinearita, neboť nelinearita je do matematického modelu zanesena prostřednictvím geometrických vztahů. U lineární úlohy předpokládáme, že posunutí je velmi malé ve srovnání s rozměry konstrukce (viz poznámka pod obrázkem 1.5). V opačném případě, nelze-li předpokládat malá posunutí, počítáme s velkou deformací, srovnatelnou s rozměry konstrukce. To pak způsobí geometrickou nelinearitu.

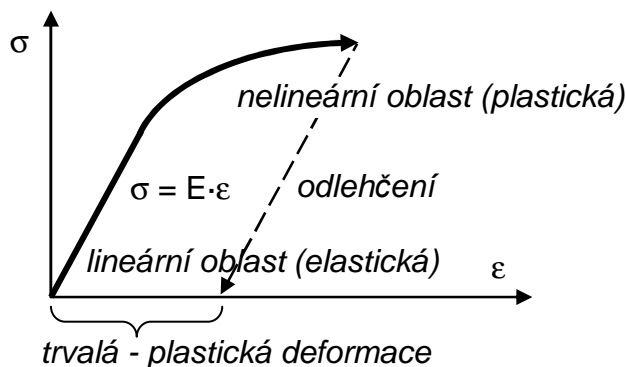
Kontaktní problém je specifickým, v praxi velmi častým, druhem nelinearity. Je-li přenos síly mezi dvěma tělesy zprostředkovan jejich prostým dotykem, takový druh vazby není schopen přenést tahovou sílu, pouze tlakovou. Charakteristika pak je ve směru tlaku lineární, ovšem ve směru tahu je tuhost nulová.



Obrázek 1.9 - Kontaktní úloha a její charakteristika.

Podobně funguje přenos síly přes prvek typu lano - přenáší tah ale nepřenáší tlak.

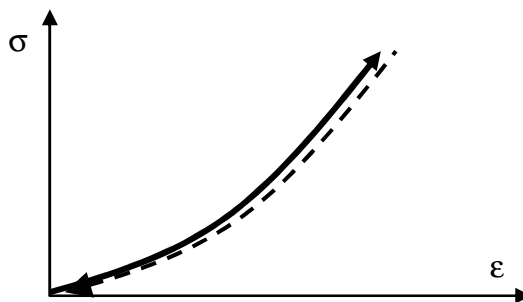
Materiálová nelinearita, nebo též fyzikální nelinearita, je způsobena nelineárním chováním materiálu. Nejběžnějšími typy je plasticita a nelineární elasticita.



Obrázek 1.11 - Materiálová nelinearita - plasticita.

Tahová zkouška klasického kovového materiálu, jako např. oceli, obrázek 1.11, ukazuje jasně na lineární, elastickou oblast pod mezí kluzu, kdy platí Hookův zákon $\sigma = E \cdot \varepsilon$, a následuje nelineární plastická oblast. Podstatou plastického chování materiálu je že po odlehčení zatížení zůstává trvalá (plastická) deformace, zatímco elastická deformace po odlehčení zcela vymizí.

Některé materiály, jako např. pryž, vykazují nelineární, avšak elastické chování.



Obrázek 1.12 - Nelineární elasticita.

Při zatěžování je závislost mezi zatížením a deformací nelineární, avšak po odlehčení veškerá deformace vymizí - materiál se chová elasticky.



Shrnutí pojmů

Charakteristika mechanické soustavy je závislost síly na deformaci.

Lineární mechanická soustava se vyznačuje lineární charakteristikou, obvykle definovanou konstantní tuhostí $k = konst.$: $F = k \cdot x$.

Nelineární mechanická soustava se vyznačuje nelineární charakteristikou. To lze interpretovat jako proměnnou tuhost $k_{(x)} \neq konst.$ (Tato interpretace není zcela korektní.)

Iterační postup je postup, založený na opakování jistého algoritmu výpočtu. Cyklus probíhá až do okamžiku, kdy chyba výpočtu je přijatelná. Obecně tento postup nemusí vždy konvergovat ke správnému výsledku.

Newton - Raphsonova metoda je iterační postup, spočívající v opakovaných opravách přibližného řešení, založeného na linearizaci tzv. tečnou tuhostí k_t .

Tečná tuhost je směrnice tečny zatěžovací charakteristiky. Na malém úseku zatěžování (malá změna zatížení ΔF a malá změna deformace Δx) ji lze interpretovat jako tuhost lineární soustavy. Ve větším rozsahu zatěžování se však tato tuhost mění.

Geometrická nelinearita je nelinearita, způsobená geometrickými vztahy v matematickém vyjádření charakteristiky.

Kontaktní problém vzniká tehdy, je-li vazba mezi dvěma tělesy realizována prostým kontaktem. Taková vazba přenáší tlak ale nepřenáší tah - v opačných směrech zatěžování se chová odlišně.

Materiálová nelinearita je dána nelineárním chováním materiálu.

2 GEOMETRICKÁ NELINEARITA - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- ✚ Popsat a vysvětlit podstatu geometrické nelinearity.
- ✚ Definovat geometrickou nelinearitu v programu Ansys - Workbench.
- ✚ Provést řešení úlohy s geometrickou nelinearitou.



Výklad

nastavení režimu výpočtu

automatická změna délky výpočtového kroku

velké deformace

Details of "Analysis Settings"	
Step Controls	
Number Of Steps	1.
Current Step Number	1.
Step End Time	1. s
Auto Time Stepping	Program Controlled
Solver Controls	
Solver Type	Program Controlled
Weak Springs	Program Controlled
Large Deflection	Off
Inertia Relief	Off
Nonlinear Controls	
Output Controls	
Analysis Data Management	
Visibility	

Obrázek 2.1 - Nastavení výpočtu.

Jak bylo ukázáno, podstatou geometrické nelinearity je skutečnost, že nelze předpokládat malá posunutí. Proto bývá také označována jako „velké deformace“ - „Large Deflection“. Pro řešení jsou důležité některé kroky při nastavení výpočtu.

Klíčovým místem nastavení je přepínač „Large Deflection“ On/Off. Ve výchozím nastavení je přepínač v poloze Off, tedy předpokládáme malé deformace, úloha je lineární. Po nastavení přepínače do polohy On je úloha počítána jako nelineární. Řešení se hledá cestou iteračního výpočtu Newton-Raphsonovou metodou, přičemž v každé iteraci se koriguje matice tuhosti, viz obrázek 1.8 a algoritmus, popsáný nad obrázkem.

Základním nástrojem řešení nelineárních úloh je iterační Newton-Raphsonův algoritmus. Konvergenci je však možno podpořit doplňujícím nástrojem. Zatěžování se rozdělí do několika pod-kroků („substeps“). Hloubka nelinearity na jeden pod-krok je pak nižší a úloha spolehlivěji konverguje. Nastavením přepínače „Automatic Time Stepping“ na On si program bude podle potřeby upravovat rozdělení na pod-kroky.



Shrnutí pojmů

Geometrická nelinearita je způsobena změnami v geometrické konfiguraci úlohy v průběhu zatěžování.

„Large deflection“ (velké deformace) je obvyklé anglické označení situace, v níž nelze předpokládat malá posunutí.

Newton-Raphsonův algoritmus je postup iteračního řešení nelineární úlohy.

„Substep“ neboli podkrok - zatížení je rovnoměrně rozděleno do několika kroků, při nichž rovnoměrně narůstá.

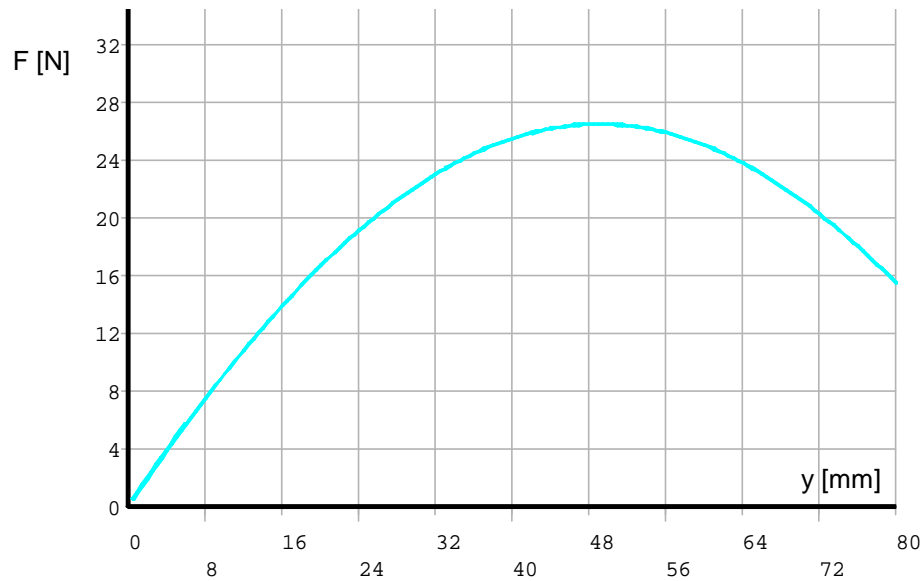
„Automatic time stepping“ je proces, kdy při prudkých změnách výstupních hodnot dochází automaticky k jemnějšímu rozdělení na větší počet menších substepů, naopak při pomalých změnách se délka substepů natáhne a řešení probíhá v menším počtu substepů.



Příklad 2.1

Soustava dvou pružin dle obr. 1.4, každá o tuhosti $k = 1 \text{ N/mm}$, rozteč uložení $2 \cdot b = 200 \text{ mm}$ a výška v nezatíženém stavu $h = 100 \text{ mm}$ (volná délka $\ell_0 = 141 \text{ mm}$), je zatížena silou F . Stanovte charakteristiku soustavy pro posunutí působící síly svisle dolů v rozsahu $y \in \langle 0, 80 \text{ mm} \rangle$.

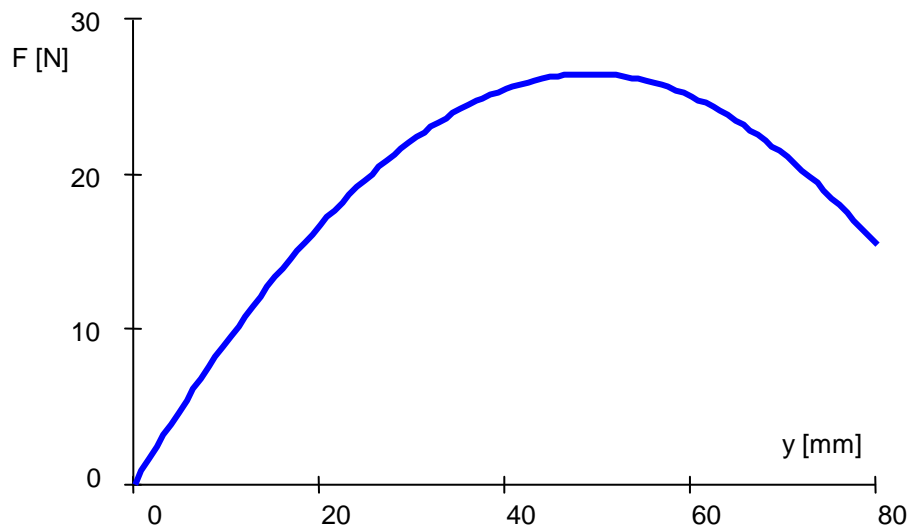
Model je tvořen dvěma prvky typu Link11, jimž je přiřazena příslušná tuhost. Nastavení výpočtu dle obr. 2.1. Výstupem je charakteristika nelineární soustavy, tedy závislost síly F na posunutí působící síly y (viz obr. 2.2).



Obrázek 2.2 Charakteristika nelineární soustavy - Workbench.

Charakteristika ukazuje jednoznačně samotnou nelinearitu úlohy. Dalším důležitým rysem mechanického chování je ztráta stability tvaru. Maximum křivky, odpovídající posunutí $y = 50$ mm a síle $F = 26,5$ N, představuje tzv. „bod zvratu“. Pro další průhyb již stačí menší velikost síly. Bude-li síla rovnoměrně narůstat, dojde po dosažení tohoto bodu k nekontrolovatelné změně geometrie soustavy až po dosažení dalšího rovnovážného bodu (což bude zřejmě odpovídat posunutí $y > h$).

Exaktní řešení, popsané v kapitole 1., dává charakteristiku :



Obrázek 2.3 Charakteristika nelineární soustavy - exaktní.

Je zřejmé, že má stejný tvar, jako charakteristika, vypočtená iteračním výpočtem.

3 KONTAKT - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH



Čas ke studiu: 1 hodina



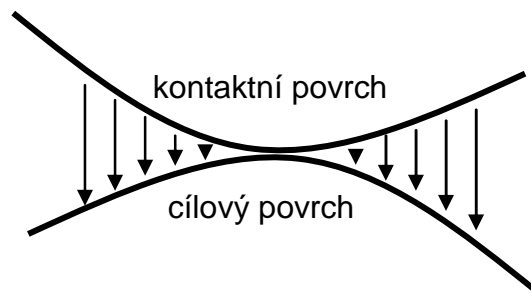
Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- ✚ Popsat a vysvětlit podstatu kontaktního problému.
- ✚ Definovat kontaktní úlohu v programu Ansys - Workbench.
- ✚ Provést řešení úlohy s kontaktem.



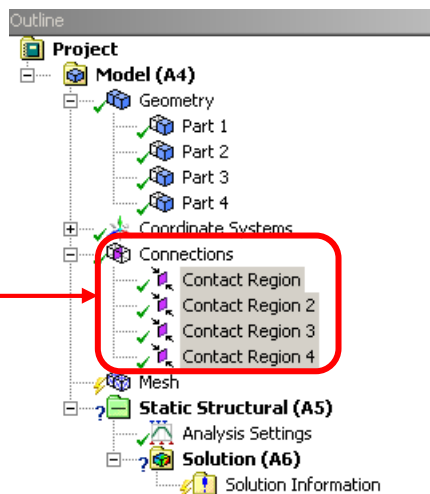
Výklad

Při řešení kontaktního problému je třeba definovat kontaktní oblast - „Contact Region“, tzv. „kontaktní pár“ - „contact pair“, dva povrchy, které jsou ve vzájemném kontaktu. Nazývají se „kontaktní povrch“ - „contact surface“ a „cílový povrch“ - „target surface“.

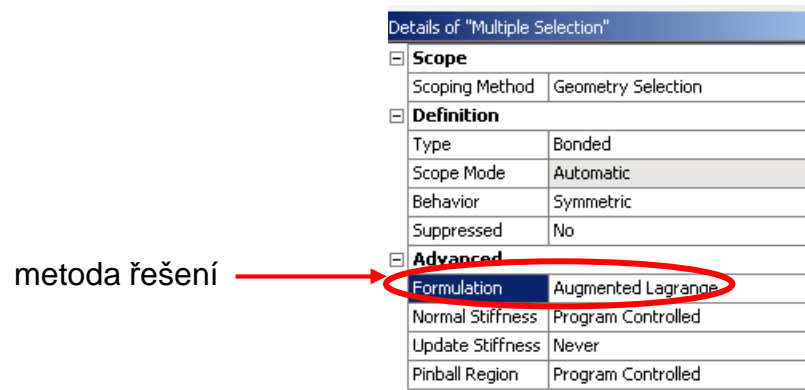


Obrázek 3.1 - Kontaktní a cílový povrch.

seznam
kontaktních párů -
kontaktních
oblastí

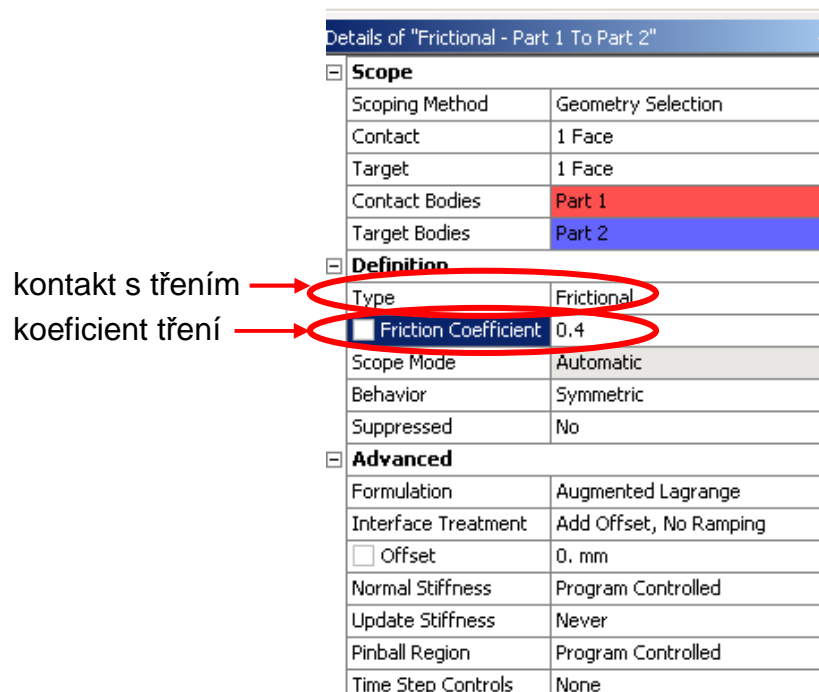
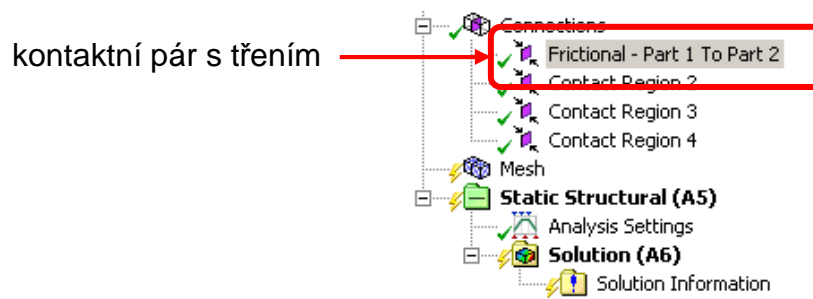


Obrázek 3.2a - Nastavení kontaktního páru.



Obrázek 3.2b - Nastavení kontaktního páru.

Chceme-li do výpočtu zahrnout tření v kontaktu, je třeba kontakt nadefinovat jako kontakt s třením a zadat koeficient tření.



Obrázek 3.3 - Definování kontaktního páru s třením.



Shrnutí pojmů

Kontaktní oblast, angl. „contact region“, je oblast dotyku dvou povrchů, charakteristická tím, že přenáší pouze tlakovou, nikoliv tahovou sílu a dále není známa velikost plochy, na níž dochází ke kontaktu.

Kontaktní pár, angl. „contact pair“, je dvojice povrchů v kontaktu.

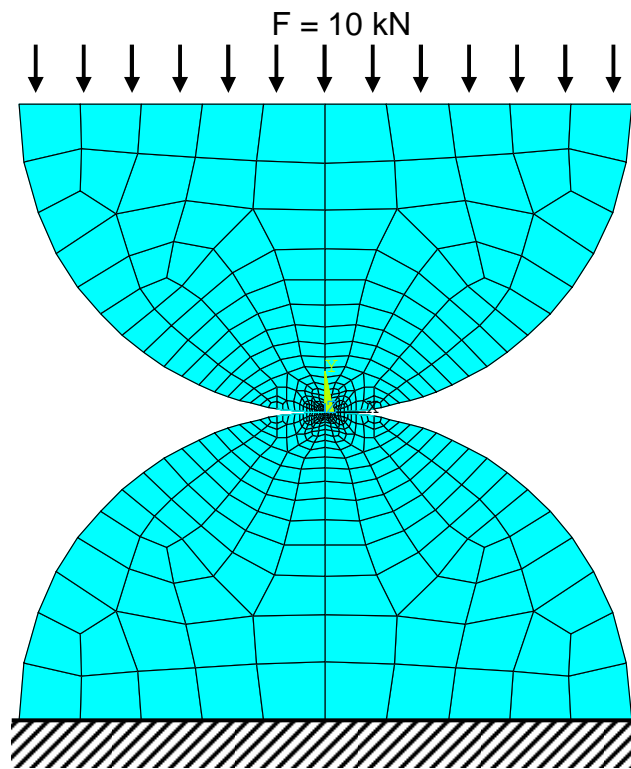
Kontaktní povrch, angl. „contact surface“, je povrch, pro jehož uzly se v každém výpočtovém kroku kontroluje proniknutí (penetrace, angl. „penetration“) do cílového povrchu.

Cílový povrch, angl. „target surface“, je povrch, do něhož potenciálně mohou proniknout uzly kontaktního povrchu.



Příklad 3.1

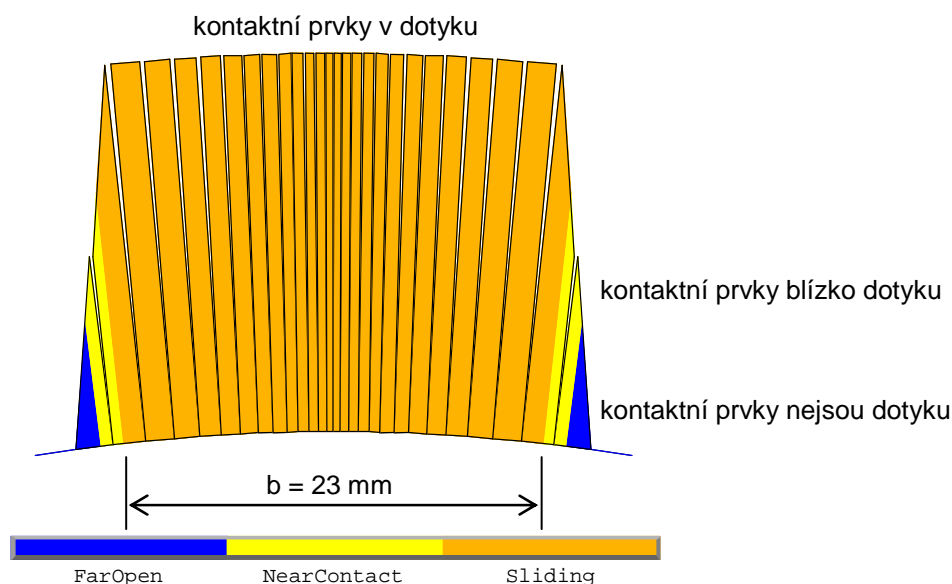
Dva půlválcové povrchy o poloměrech $R = 100$ mm jsou k sobě přitlačovány silou $F = 10$ kN. Materiál má modul pružnosti v tahu $E = 10\,000$ MPa. Vyšetřete velikost stykové plochy po deformaci a rozložení měrného tlaku na stykové ploše.



Obrázek 3.4 Dvě válcová tělesa, tzv. „konečnoprvkový“ model.

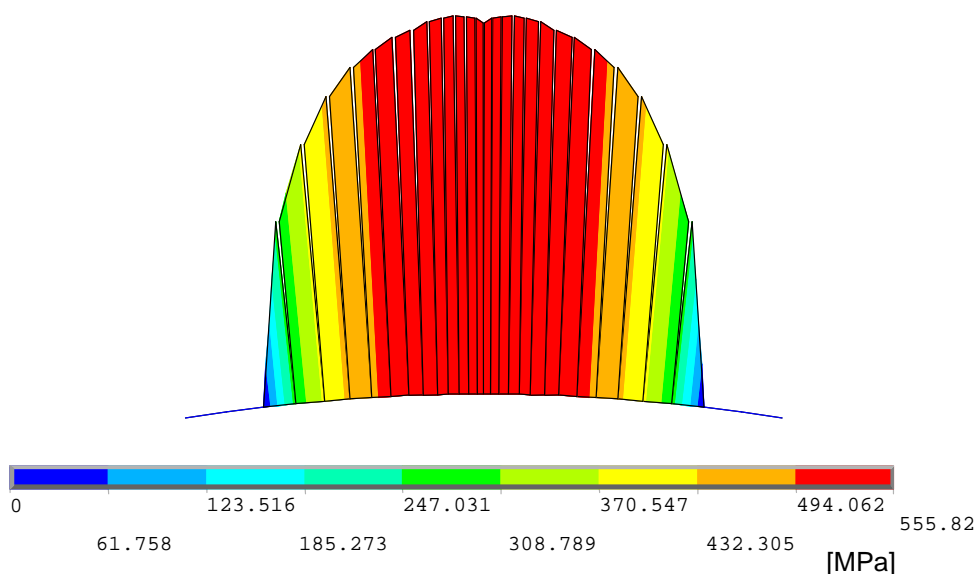
Model je vytvořen plošnými prvky typu 2D solid. Na půlválcových plochách jsou kontaktní prvky. Model je doplněn o okrajové podmínky (pevné uložení dole) a zatížení (rovnoměrně rozložená síla $F = 10$ kN nahore). V modelu je uvažována jednotková tloušťka. V místě použití kontaktních prvků musí být síť výrazně zjemněna. Nastavení výpočtu odpovídá výše uvedenému popisu.

Výstupem je například tzv. status každého kontaktního prvku, tedy informace o tom, zda kontaktní pár je v dotyku nebo nikoliv, dále velikost kontaktního tlaku.



Obrázek 3.5 Status kontaktních prvků.

Analýzou rozložení statusu kontaktních prvků lze například zjistit šířku kontaktní plochy, v tomto příkladu je to $b = 23$ mm. Rozložení kontaktního tlaku ukazuje jeho maximální hodnotu $p_{\max} = 556$ MPa.



Obrázek 3.6 Rozložení kontaktního tlaku.

Pro kontakt dvou válců je známo přesné řešení tzv. Hertzova tlaku. Přesné řešení uvádí šířku kontaktní plochy :

$$b = 3.04 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{E} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = 3.04 \cdot \sqrt{\frac{10^4}{10^4} \cdot \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}} = 21.5 \text{ mm}$$

a maximální napětí v dotykové ploše :

$$\sigma_{\max} = 0.418 \cdot \sqrt{F_1 \cdot E \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}} = 0.418 \cdot \sqrt{10^4 \cdot 10^4 \cdot \frac{100 + 100}{100 \cdot 100}} = 591 \text{ MPa}$$

V těchto výrazech je :

b - šířka kontaktní plochy [mm],

F_1 - zatěžující síla na jednotku délky válců [N/mm],

E - modul pružnosti v tahu [MPa],

r_1, r_2 - poloměry obou válců [mm],

σ_{\max} - maximální napětí v materiálu [MPa].

Poznámka : měrný tlak v kontaktní ploše p a napětí v materiálu σ nejsou zcela totožné veličiny. Napětí v materiálu je však dominantně dáno měrným tlakem.

Je zřejmé, že hodnoty, vypočtené modelováním a dané exaktním řešením, jsou si velmi blízké.

4 MATERIÁLOVÁ NELINEARITA - ŘEŠENÍ VE WORKBENCH



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- ✚ Popsat a vysvětlit podstatu materiálové nelinearity.
- ✚ Definovat materiálovou nelinearitu v programu Ansys - Workbench.
- ✚ Provést řešení úlohy s materiálovou nelinearitou.



Výklad

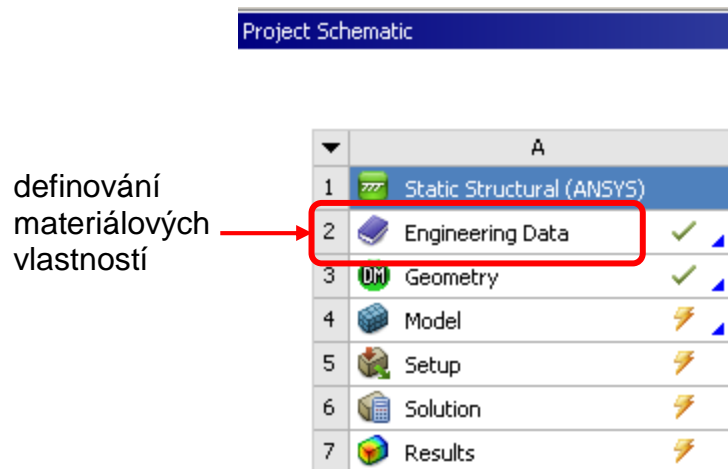
Podstatou materiálové nelinearity je samo chování materiálu, jenž se pod zatěžováním deformuje. Vztah mezi deformací a zatížením je nelineární. Kromě toho rozlišujeme ještě elastické a plastické chování materiálu.

Elastické chování materiálu znamená, že po odlehčení deformace zcela vymizí.

Plastické chování materiálu znamená, že po odlehčení část deformace zůstává.

Plastický materiálový model.

Nejprve je třeba definovat základní materiálové vlastnosti pro lineární materiálový model, tedy modul pružnosti v tahu E (Young's Modulus) a Poissonovo číslo (Poisson's ratio), popřípadě hustotu (density).



Obrázek 4.1a - Definování materiálových vlastností.

Properties of Outline Row 3: Structural Steel			
	A	B	C
1	Property	Value	Unit
2	Density	7.85E-09	tonne m
3	Coefficient of Thermal Expansion		
4	Coefficient of Thermal Expansion	1.2E-05	C^-1
5	Reference Temperature	22	C
6	Isotropic Elasticity		
7	Young's Modulus	2E+05	MPa
8	Poisson's Ratio	0.3	
9	Alternating Stress Mean Stress	Tabular	
10	Scale	1	

Obrázek 4.1b - Definování materiálových vlastností.

Při zadávání materiálových vlastností je třeba vkládat hodnoty ve správných jednotkách. Při zadávání v základních jednotkách je např. délka v metrech. Ovšem ve strojařské praxi je obvyklé zadávat délky v milimetrech. Pak lze použít technické jednotky, viz tabulka 4.1.

Tab. 4.1 – Základní a technické jednotky fyzikálních veličin - materiálových vlastností

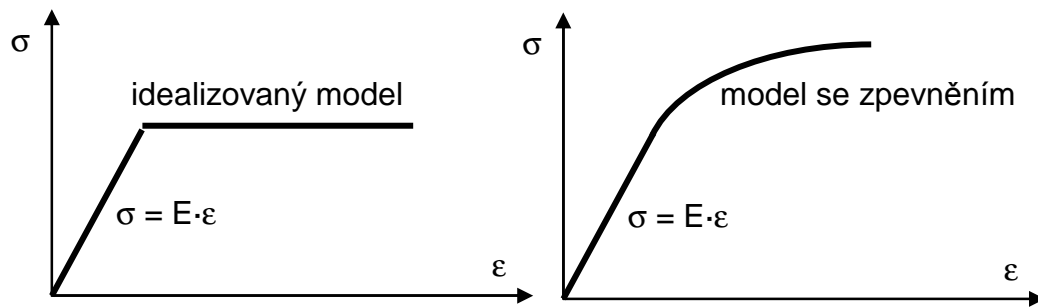
l délka	m hmotnost	t čas	F síla	E, p, σ modul pružnosti, tlak, napětí	ρ hustota
m (metr)	kg (kilogram)	s (sekunda)	N (newton) $\left(N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$	Pa (pascal) $\left(\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$	kg/m³ (kilogram na metr krychlový)
mm (milimetr) 1 mm = 0,001 m	t (tuna) 1 t = 1000 kg	s (sekunda)	N $\left(N = \frac{\text{t} \cdot \text{mm}}{\text{s}^2}\right)$ (newton)	MPa (megapascal) $\left(\text{MPa} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)$ 1 MPa = 10 ⁶ Pa	t/mm³ (tuna na milimetr krychlový) 1 t/mm ³ = 10 ¹² kg/m ³

Např. pro běžnou ocel je v základní jednotkách : $E = 210 \cdot 10^9$ Pa, $\rho = 7\,850$ kg/m³,
v technických jednotkách : $E = 210\,000$ MPa, $\rho = 7,85 \cdot 10^{-9}$ t/mm³.

Dále je třeba definovat typ plasticity a průběh tahové křivky. Existuje několik materiálových modelů plasticity. Liší se od sebe chováním modelu při opakovaném zatěžování a při zatěžování v různém smyslu (tah × tlak). Každý materiálový model je vhodný pro jiný typ zatěžování.

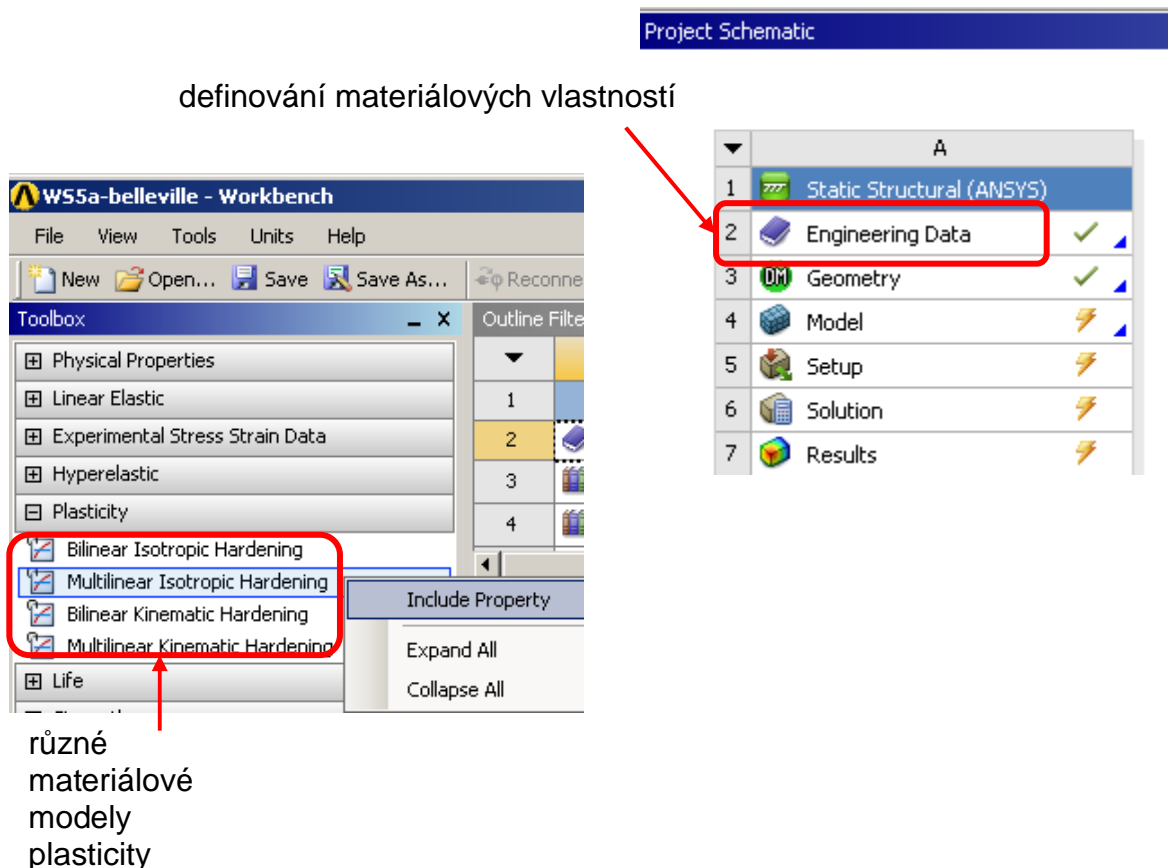
Idealizovaný model plasticity znamená, že po dosažení jisté hodnoty napětí (meze kluzu) dojde k plastizování, což se projeví tím, že deformace narůstá aniž by došlo k nárůstu

napětí. Ve skutečnosti ovšem i po překročení meze kluzu dochází k nárůstu napětí, ovšem pomaleji a nelineárně. Hovoříme o zpevnění.



Obrázek 4.2 - Idealizovaný model plasticity a model se zpevněním.

Nejběžnější je isotropní zpevnění (Isotropic Hardening) a kinematické zpevnění (Kinematic Hardening). První je vhodné pro jednorázově zatížený objekt, druhý pro zatížení s odlehčením.



Obrázek 4.3 - Definování materiálového modelu plasticity.

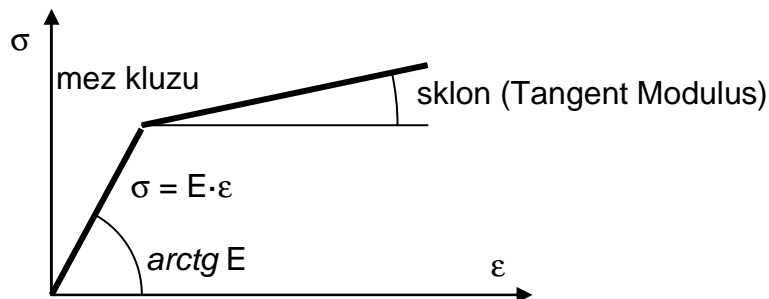
definování tahové křivky

	A	B	C	D
1	Property	Value	Unit	
2	Density	7.85E-09	tonne mm ⁻³	
3	Coefficient of Thermal Expansion			
6	Isotropic Elasticity			
9	Multilinear Isotropic Hardening	Tabular		
10	Alternating Stress Mean Stress	Tabular		
14	Strain-Life Parameters			
22	Tensile Yield Strength	250	MPa	
23	Compressive Yield Strength	250	MPa	
24	Tensile Ultimate Strength	460	MPa	
25	Compressive Ultimate Strength	0	MPa	

Obrázek 4.4 - Definování materiálového modelu plasticity.

Dále se modely liší tím, jak je definována zatěžovací křivka.

Bilineární definice je jednodušší. Křivka je nahrazena jednou zalomenou přímkou. Kromě modulu pružnosti E , definujícího sklon přímky v elastické oblasti, se definuje ještě mez kluzu (Yield Strength) a sklon přímky nad mezí kluzu, tzv. „Tangent Modulus“.



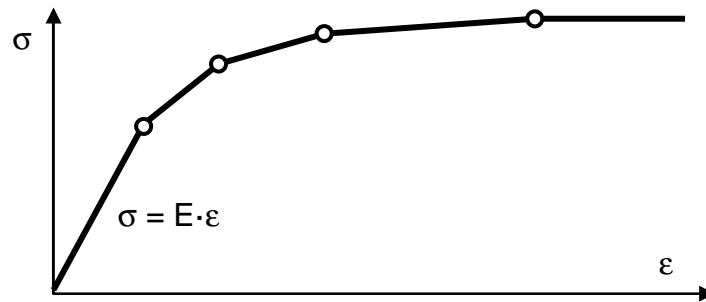
Obrázek 4.5 - Bilineární definice zatěžovací křivky.

	A	B	C
1	Property	Value	Unit
2	Density	8.3E-09	tonne mm ⁻³
3	Coefficient of Thermal Expansion		
6	Isotropic Elasticity		
7	Young's Modulus	1.1E+05	MPa
8	Poisson's Ratio	0.34	
9	Bilinear Isotropic Hardening		
10	Yield Strength	280	MPa
11	Tangent Modulus	1150	MPa
12	Isotropic Thermal Conductivity	0.401	W mm ⁻¹ C

mez kluzu
sklon

Obrázek 4.6 - Definování zatěžovací křivky - bilineární definice.

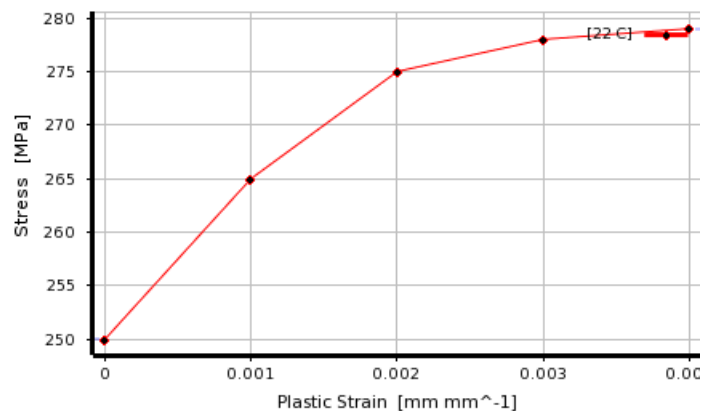
Multilineární definice je dokonalejší. Křivka je definována jako několikrát zalomená přímka. Formou tabulky se zadávají jednotlivé body lomené přímky.



Obrázek 4.7 - Multilineární definice zatěžovací křivky.

Table of Properties Row 9: Multilinear Isotropic Hardening			
	A	B	C
1	Temperature (C)	Plastic Strain (mm mm ⁻¹)	Stress (MPa)
2	22	0	250
3	22	0.001	265
4	22	0.002	275
5	22	0.003	278
6	22	0.004	279
*			

Engineering Data Ch ϵ - poměrná deformace σ - napětí



Obrázek 4.8 - Definování zatěžovací křivky - multilineární definice.



Shrnutí pojmů

Elastické chování materiálu znamená, že po odlehčení deformace zcela vymizí.

Plastické chování materiálu znamená, že po odlehčení část deformace zůstává.

Materiálový model je matematický popis chování materiálu.

Lineární materiálové vlastnosti jsou ty, jež nevybočují z rámce lineárních úloh. Obvykle to je modul pružnosti v tahu, poissonovo číslo a hustota materiálu.

Nelineární materiálové vlastnosti jsou ty, jež definují a popisují nelineární chování materiálu.

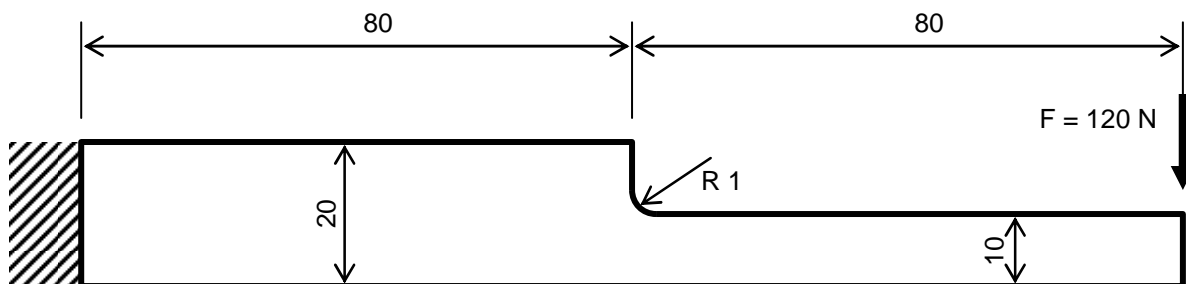
Bilineární definice je model, pro nějž je zatěžovací křivka rozdělena na dva přímé úseky. První představuje elastickou oblast, druhá plastickou.

Multilineární definice je model, pro nějž je zatěžovací křivka rozdělena na více přímých úseků. První představuje elastickou oblast, všechny následující pak plastickou.



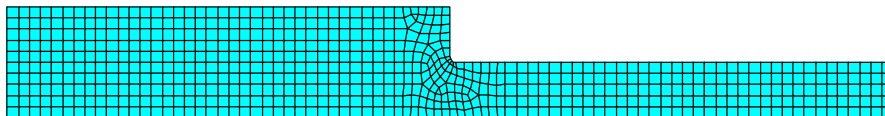
Příklad 4.1

Tvar konzoly je tvořen dvěma obdélníky 20×80 mm a 10×80 mm, se zaoblením v rohu $R 1$ mm. Konzola je na levé straně dokonale vetknuta, na pravé straně je zatížena svislou silou $F = 120$ N.



Obrázek 4.9 Tvar konzoly.

Tzv. „konečnoprvkový“ model (obr. 4.10) je tvořen 8 uzlovými plošnými prvky typu 2D solid. Obsahuje dále okrajové podmínky (dokonalé vetknutí na levé straně) a zatížení (síla $F = 120$ N), jež nejsou na obrázku vidět.

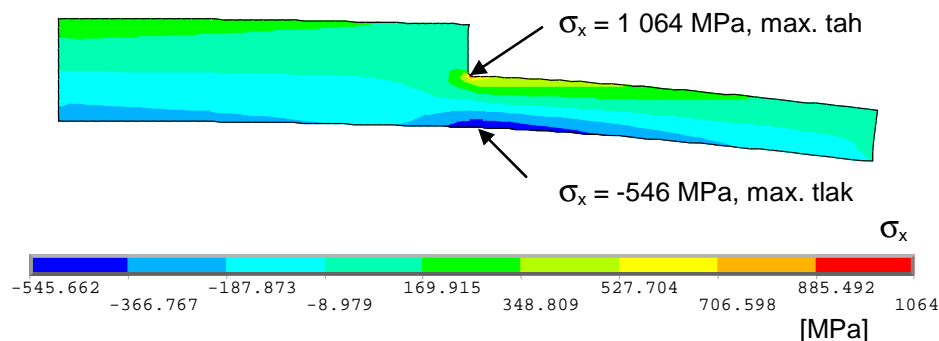


Obrázek 4.10 Model konzoly.

Pro první výpočet byl definován lineární materiálový model o modulu pružnosti $E = 200\,000$ MPa, předpokládejme mez pevnosti $R_m = 500$ MPa. V modelu je dále uvažována jednotková tloušťka.

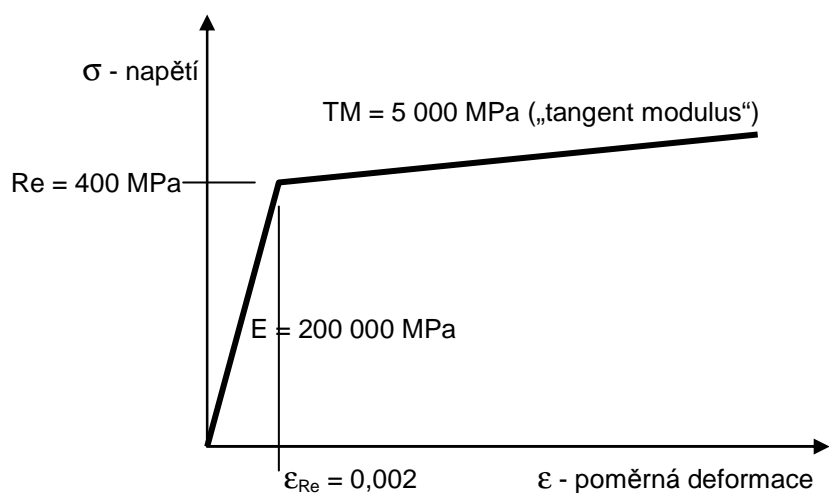
Výsledkem řešení je deformace a rozložení napětí (obr. 4.11). Vidíme, že v místě zaoblení podélné normálové napětí dosahuje na velmi malé plošce hodnoty $\sigma_{\max} = 1\,064$ MPa,

jež zásadně přesahuje mez pevnosti. Výpočet s použitím lineárního materiálového modelu signalizuje porušení materiálu.



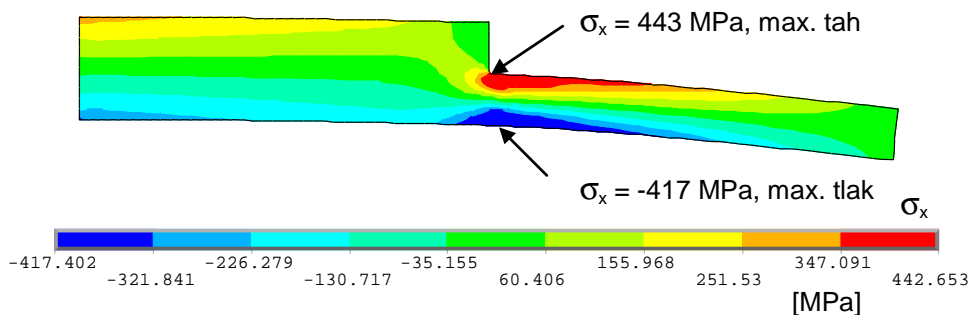
Obrázek 4.11 Rozložení podélného napětí..

Pro výpočet s uvažováním vlivu plasticity použijeme velmi jednoduchý bilineární materiálový model (charakteristika viz obr. 4.12). Kromě modulu pružnosti $E = 200\,000$ MPa model obsahuje mez kluzu $Re = 400$ MPa a hodnotu $TM = 5\,000$ MPa, tzv. „tangent modulus“, tedy sklon charakteristiky nad mezí kluzu.



Obrázek 4.12 Charakteristika bilineárního materiálového modelu.

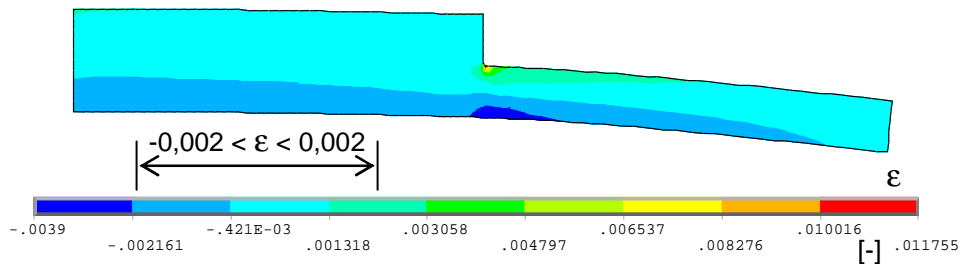
Charakter rozložení podélného normálového napětí se výrazně změní.



Obrázek 4.13 Rozložení podélného napětí.

Maximální hodnota $\sigma_{\max} = 443$ MPa je podstatně menší, než u lineárního materiálového modelu, ovšem na podstatně větší ploše. Napětí jako by se „rozlilo“ do větší šířky a kleslo. Toto je typický projev použití plastického materiálového modelu.

Přitom rozsah „zplastizování“ není nikterak velký. Jak je zřejmé z charakteristiky na obr. 4.12, plastická deformace se objevuje při poměrné deformaci $\varepsilon > 0,002$ (0,2%). Na obr. 4.14 je rozložení poměrné deformace. Je zřejmé, že na většině oblasti je poměrná deformace menší, než tato mezní hodnota.



Obrázek 4.14 Rozložení poměrné deformace v podélném směru.



Další zdroje

Wokbench - Mechanical Simulations, Structural Non-linearities