INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

PRUŽNOST A PEVNOST 2 – V PŘÍKLADECH

Kvadratický moment II

doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3020-9

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

3 KVADRATICKÝ MOMENT II

OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.

CÍL:

Těžiště obecné plochy,

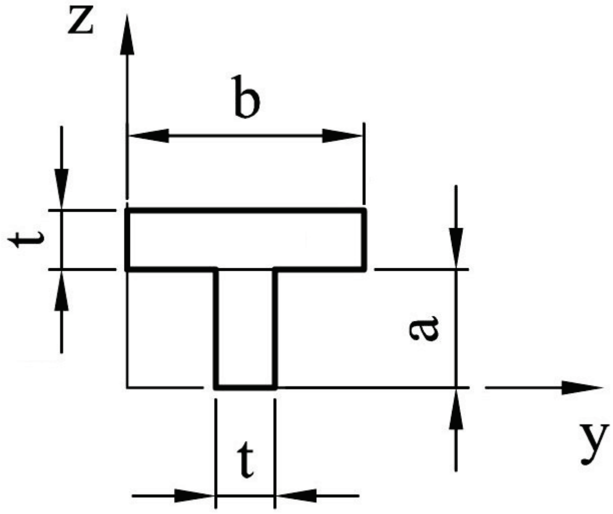
kvadratický moment průžezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

hlavní centrální kvadratický moment průřezu.

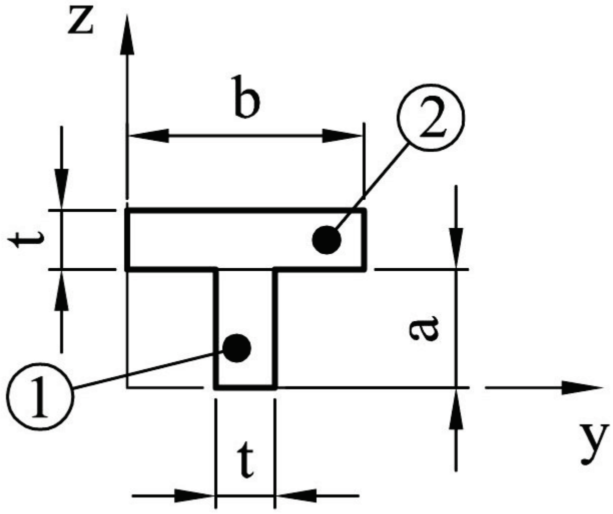
3.1 PŘÍKLAD 5

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného složeného průřezu na Obr. 3.1 s jednou osou symetrie.
Zadané hodnoty jsou $t = 5mm;\ a = 10mm;\ b = 20mm.$

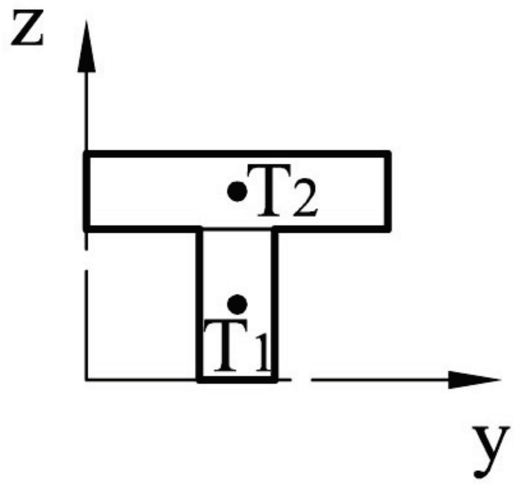


Obr. 3.1 Rozměry průřezu

Nejprve si zvolíme souřadný systém (viz Obr. 3.1) za pomocí něhož vypočítáme těžiště obrazce. Složený obrazec si rozdělíme na základní tvary, u nichž známe momenty setrvačnosti (obdélník, čtverec, kruh,…). Pomocí nám může být zapis souřadnic těžišť a ploch jednotlivých elementárních útvarů do tabulky. Rozdělení složeného obrazce na jednotlivé základní tvary a těžiště dílčích ploch je naznačeno na Obr. 3.2 Obr. 3.3.



Obr. 3.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary



Obr. 3.3 Těžiště dílčích ploch

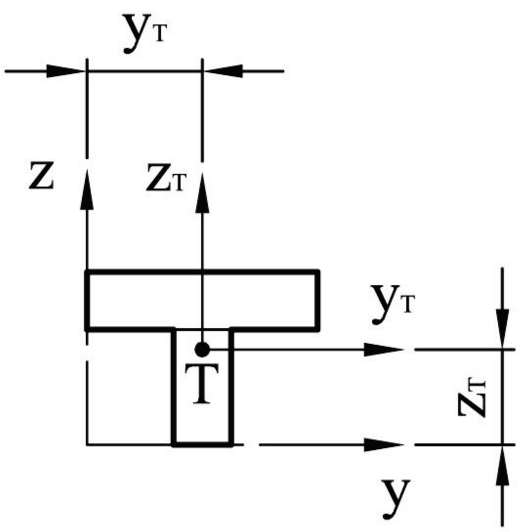
Tab. 1 Polohy těžiště dílčích ploch

$i[-]$	$y_{Ti}[mm]$	$z_{Ti}[mm]$	$S_i[mm^2]$
1	10	5	50
2	10	12,5	100

Těžiště složeného obrazce

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{\frac{b}{2} \cdot a \cdot t + \frac{b}{2} \cdot b \cdot t}{a \cdot t + b \cdot t} = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 100}{10 \cdot 5 + 20 \cdot 5} = 10\ mm, \tag{3.1}$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t + \left(\frac{t}{2} + a\right) \cdot b \cdot t}{a \cdot t + b \cdot t} = \frac{5 \cdot 50 + 12{,}5 \cdot 100}{10 \cdot 5 + 20 \cdot 5} = \\ = 10\ mm. \tag{3.2}$$



Obr. 3.4 Poloha těžiště složeného obrazce

Do tohoto těžiště (Obr. 3.4) pak rovnoběžně posuneme souřadný systém a počítáme kvadratické momenty setrvačnosti

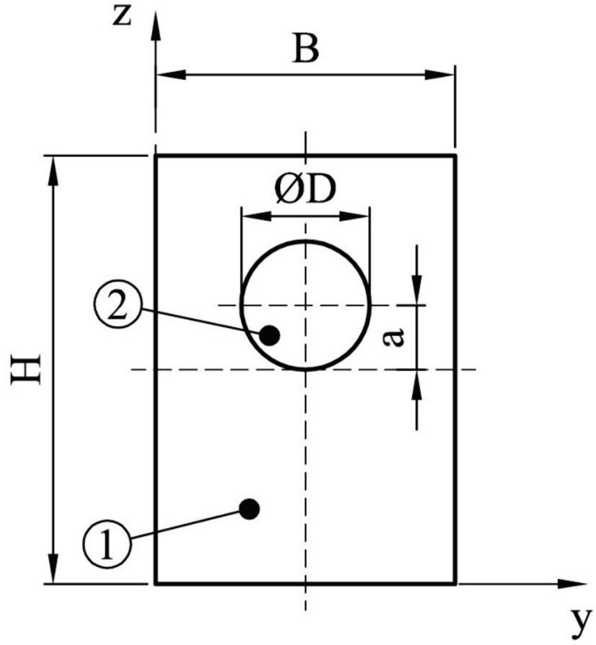
$$J_{yT} = \frac{t \cdot a^3}{12} + a \cdot t \cdot \left(z_T - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot \left(z_T + \frac{t}{2}\right)^2 = \\ = \frac{5 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 5 \cdot \left(10 - \frac{10}{2}\right)^2 + \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot \left(10 + \frac{5}{2}\right)^2 = \\ = \mathbf{17\ 500\ mm^4}, \tag{3.3}$$

$$J_{zT} = \frac{t \cdot b^3}{12} + \frac{a \cdot t^3}{12} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} + \frac{10 \cdot 5^3}{12} = \mathbf{3\,437{,}5\ mm^4}.$$

Zadaný průřez má jednu osu symetrie, která je zároveň i těžištní osou, proto pro výpočet kvadratického momentu setrvačnosti kolem osy z - J_{zT} není potřeba použití Steinerovy věty.
První a třetí člen ve výpočtu kvadratických momentů setrvačnosti J_{yT} je moment setrvačnosti základního tvaru, tudíž obdélníku vůči jeho vlastnímu souřadnému systému procházejícím těžištěm základního obrazce označenému na Obr. 3.3 T_1 a T_2. Druhý a čtvrtý člen jsou pak důsledkem Steinerovy věty a jsou součinem obsahu dané elementární plochy a kvadrátu vzdálenosti těžištní osy elementárního souřadného systému od souřadného systému celého složeného obrazce.
Průřez má jednu osu symetrie, kterou tvoří těžištní souřadný systém, proto je deviačmí moment setrvačnosti nulový.

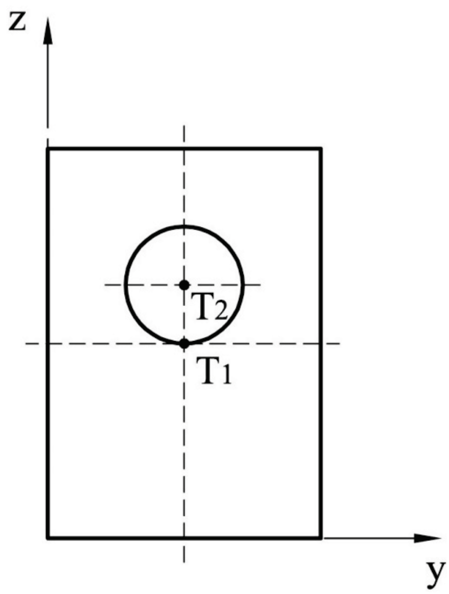
3.2 PŘÍKLAD 6

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného složeného průřezu na Obr. 3.5 s jednou osou symetrie.
Zadané hodnoty jsou $B = 70mm;\ H = 100mm;\ D = 30mm;\ a = 15mm.$



Obr. 3.5 Rozměry průřezu a rozdělení na jednotlivé základní tvary

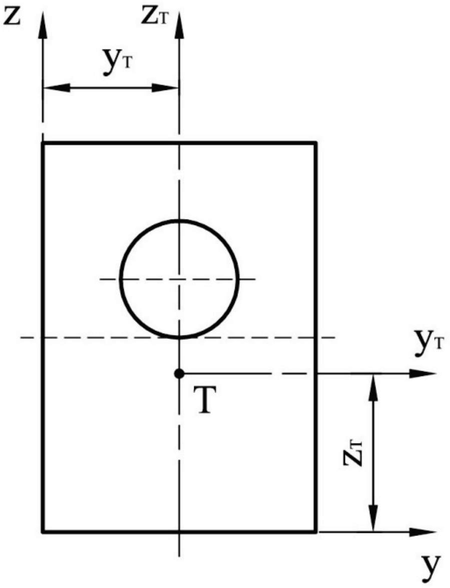
Opět si zvolíme souřadný systém, jehož počátek je tentokrát umístěn v levém dolním rohu průřezu. Tentokrát máme obdélník, který má uvnitř vyřezanou kruhovou díru, tudíž při výpočtu těžiště i kvadratických momentů setrvačnosti budeme kruhovou plochu odečítat. Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště



Obr. 3.6 Těžiště dílčích ploch

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{\frac{B}{2} \cdot B \cdot H - \frac{B}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{B \cdot H - \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{70}{2} \cdot 70100 - \frac{70}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}}{70 \cdot 100 - \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = = 35\,mm, \tag{3.4}$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} z_{Ti} S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{\frac{H}{2} \cdot B \cdot H - \left(\frac{H}{2} + a\right) \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{B \cdot H - \frac{\pi D^2}{4}} = = \frac{\frac{100}{2} \cdot 70 \cdot 100 - \left(\frac{100}{2} + 15\right) \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}}{70 \cdot 100 - \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = 48{,}3\,mm. \tag{3.5}$$



Obr. 3.7 Poloha těžiště složeného obrazce

$$J_{yT} = \frac{B \cdot H^3}{12} + B \cdot H \cdot \left(z_T - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4} \cdot \left(a + \frac{H}{2} - z_T\right)^2 = \tag{3.6}$$

$$= \frac{70 \cdot 100^3}{12} + 70 \cdot 100 \cdot \left(48{,}3 - \frac{100}{2}\right)^2 + \frac{\pi . 30^4}{64} +$$

$$+ \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot \left(15 + \frac{100}{2} - 48{,}3\right)^2 = \mathbf{6\,090\,460}\ \boldsymbol{mm^4},$$

$$J_{zT} = \frac{H \cdot B^3}{12} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{100 \cdot 70^3}{12} + \frac{\pi \cdot 30^4}{64} = \mathbf{2\,898\,094}\ \boldsymbol{mm^4}. \tag{3.7}$$

Zadaný průřez má jednu osu symetrie, která je zároveň i těžištní osou, proto pro výpočet kvadratického momentu setrvačnosti kolem osy z - J_{zT} není potřeba použití Steinerovy věty. Průřez má jednu osu symetrie, kterou tvoří těžištní souřadný systém, proto je deviačmí moment setrvačnosti nulový.