

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady I

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

5	PŘÍKLADY I.....	3
5.1	Příklad 7.....	4



5 PŘÍKLADY I



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

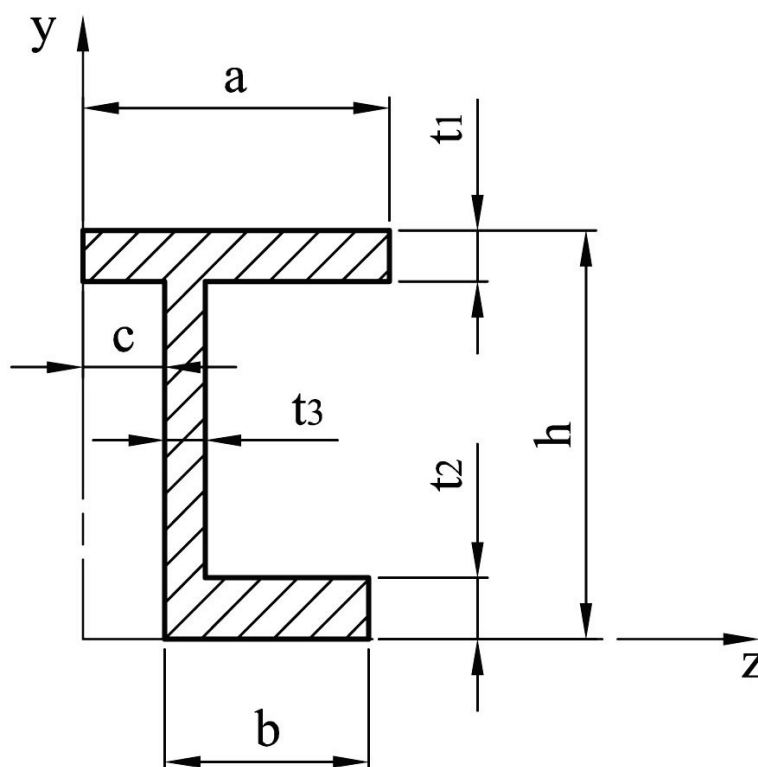
konstrukce Mohrovy kružnice.



5.1 PŘÍKLAD 7

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 5.1).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



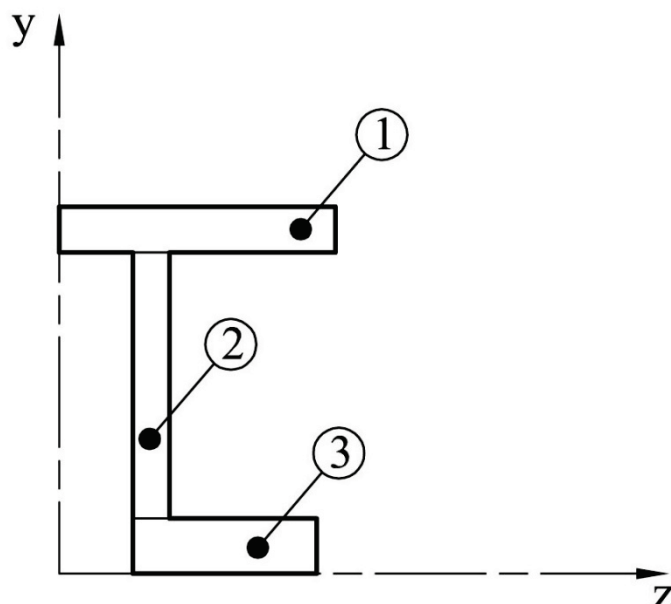
Obr. 5.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 5.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right) + b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right)}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right) + 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right)}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 13,82 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 23,68 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$



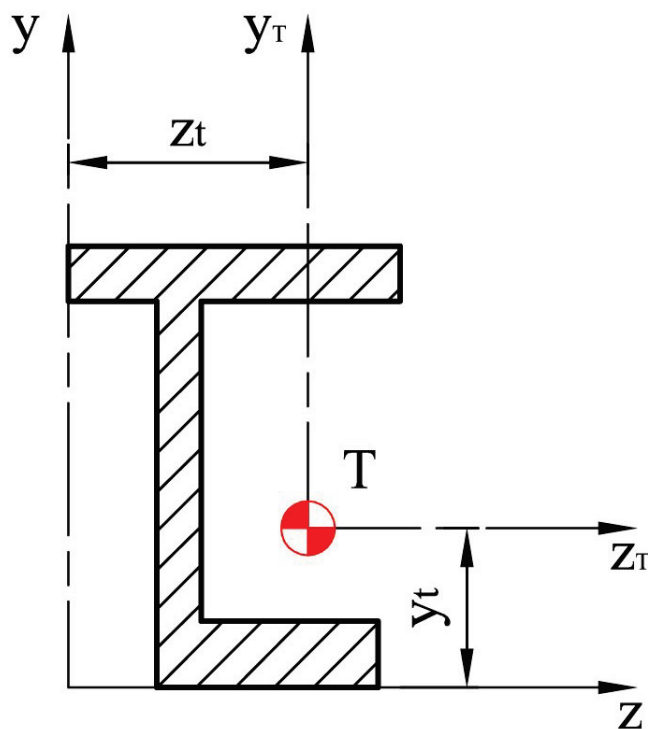


Obr. 5.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{a \cdot t_1^3}{12} + a \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{28 \cdot 6^3}{12} + 28 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 283\,081 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot a^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right)^2 + \\
 &+ \frac{t_2 \cdot b^3}{12} + b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 = \\
 &= \frac{6 \cdot 28^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right)^2 + \\
 &+ \frac{3 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right)^2 = 88\,725 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= a \cdot t_1 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) \cdot \frac{t_2}{2} \\
 &= 28 \cdot 6 \cdot \frac{28}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right) \cdot \frac{3}{2} = 112\,124 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



Obr. 5.3 Poloha těžiště složeného obrazce

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.

$$J_{y_T} = J_y - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 =$$

$$= 283081 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68^2 = 79\,043 \text{ mm}^4, \quad (5.6)$$

$$J_{z_T} = J_z - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 =$$

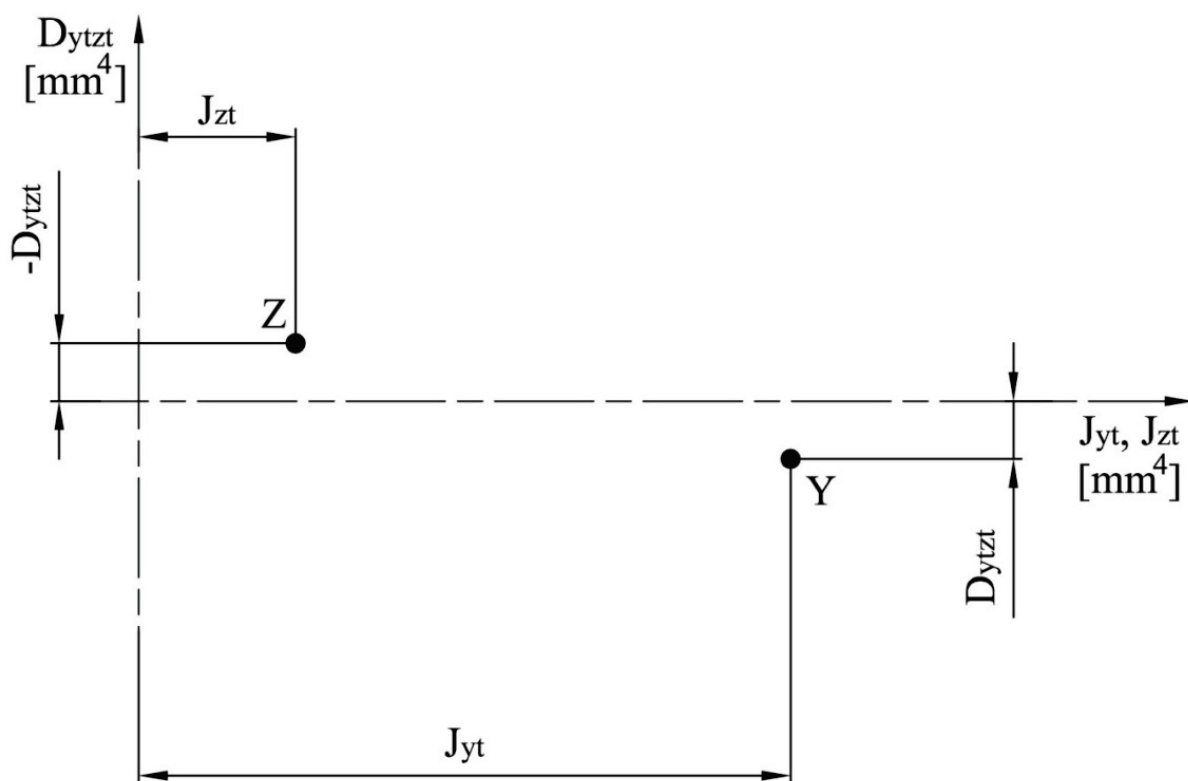
$$= 88725 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 13,82^2 = 19\,162 \text{ mm}^4, \quad (5.7)$$

$$J_{y_T z_T} = J_{yz} - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T \cdot y_T =$$

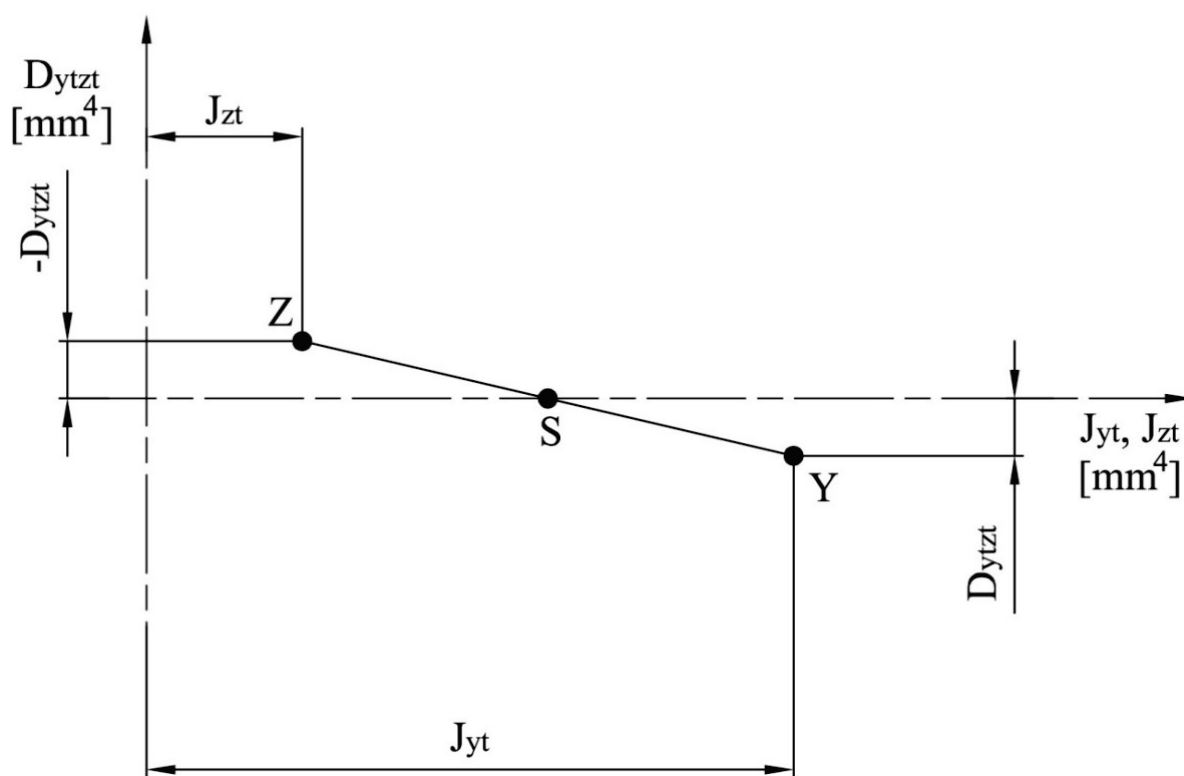
$$= 112124 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68 \cdot 13,82 =$$

$$= -7\,013 \text{ mm}^4. \quad (5.8)$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 5.4).

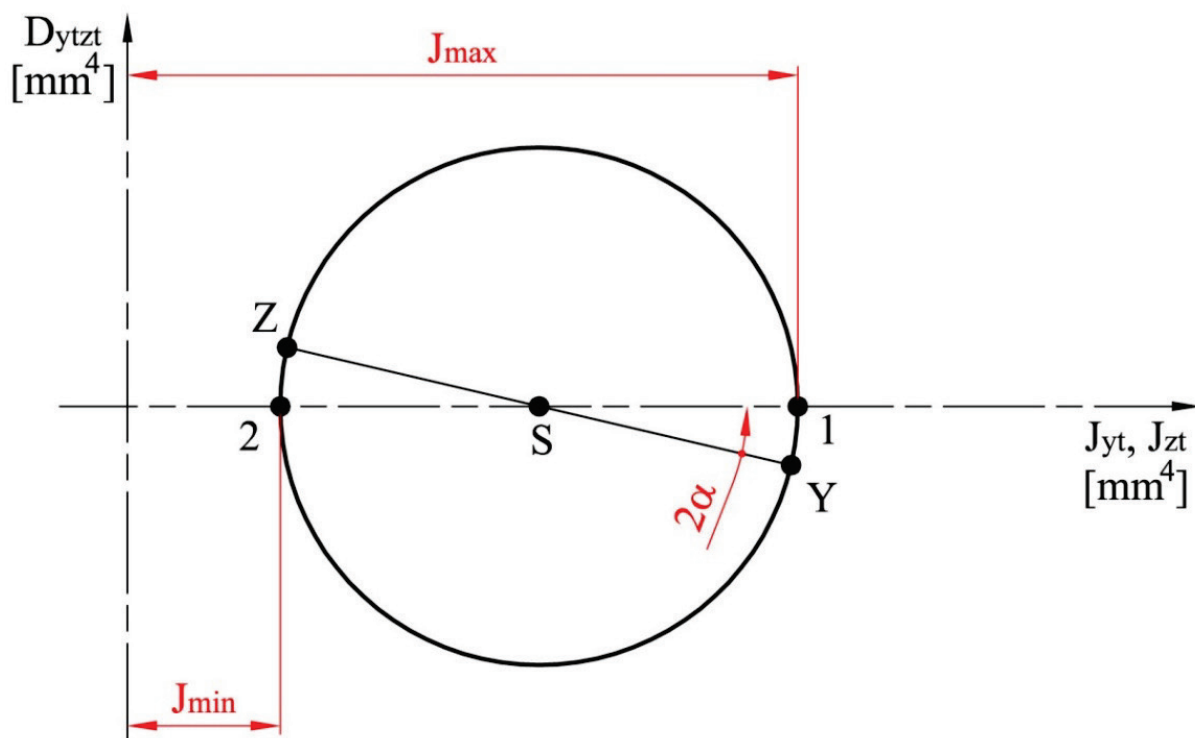


Obr. 5.4 Konstrukce Mohrovy kružnice

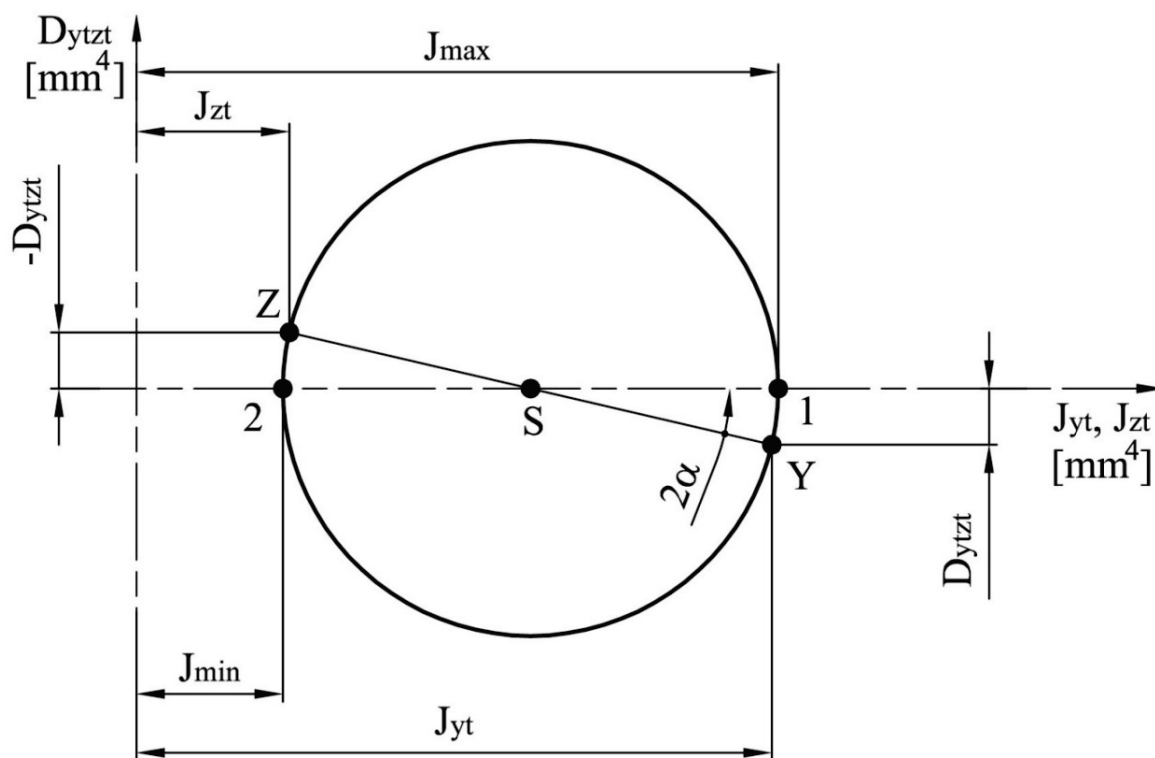


Obr. 5.5 Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 5.6 Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 5.7 Výsledná Mohrova kružnice

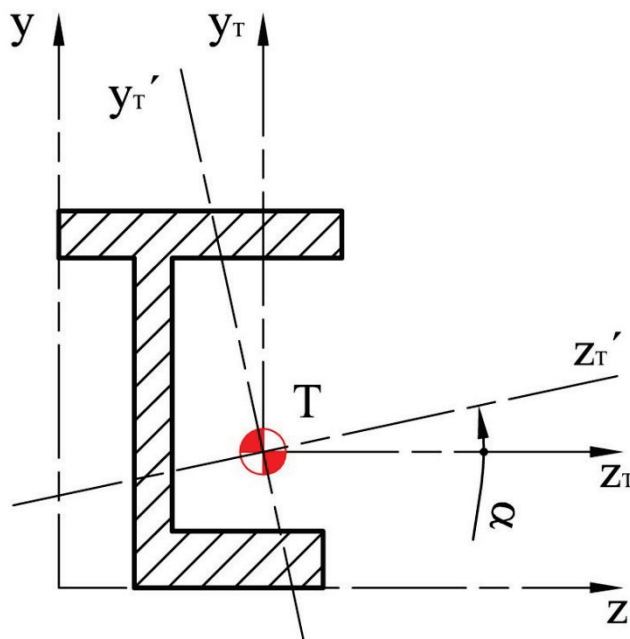
Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (5.9)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{79043 + 19162}{2} + \sqrt{\left(\frac{79043 - 19162}{2}\right)^2 + (-7013)^2} = \mathbf{79\,853\,mm^4}, \\
 J_{min} &= \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \\
 &= \frac{79043 + 19162}{2} - \sqrt{\left(\frac{79043 - 19162}{2}\right)^2 + (-7013)^2} = \mathbf{18\,352\,mm^4},
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-7013)}{79043 - 19162} \right) \right| = \mathbf{6,59^\circ}. \tag{5.11}$$



Obr. 5.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os