

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady II

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

6	PŘÍKLADY II	3
6.1	Příklad 8	4
6.2	Příklad 9	9



6 PŘÍKLADY II



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

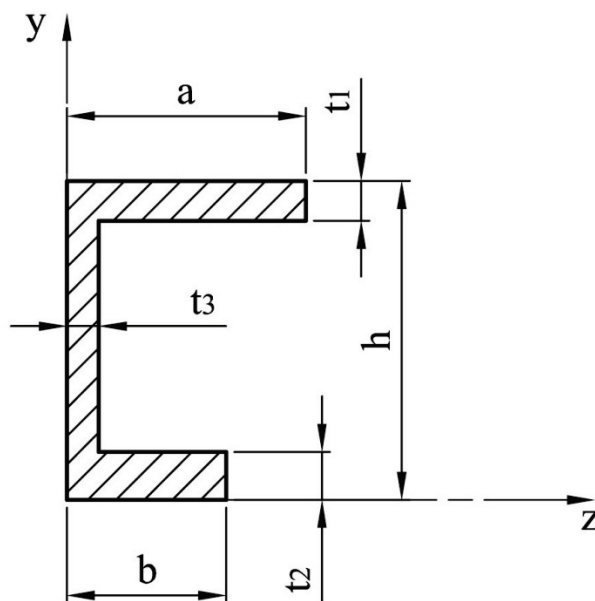
konstrukce Mohrovy kružnice.



6.1 PŘÍKLAD 8

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 6.1).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



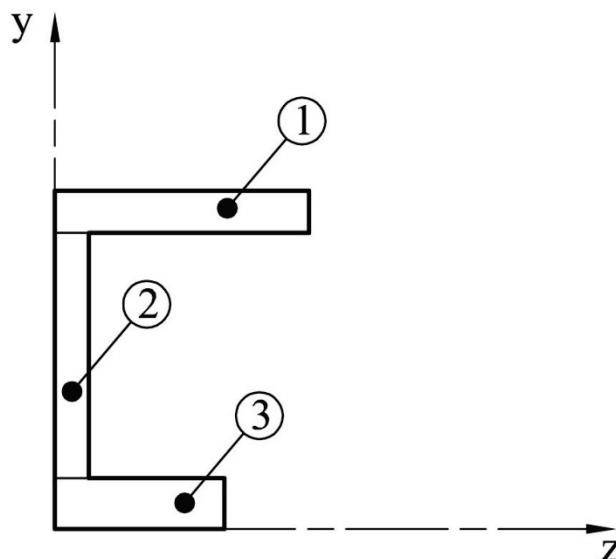
Obr. 6.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 6.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \frac{t_3}{2} + b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 9,52 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 23,68 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$





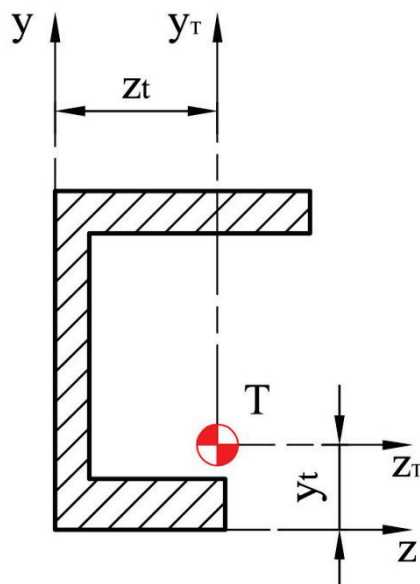
Obr. 6.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{a \cdot t_1^3}{12} + a \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{28 \cdot 6^3}{12} + 28 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 283\,081 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot a^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{3} + \frac{t_2 \cdot b^3}{3} = \\
 &= \frac{6 \cdot 28^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \frac{3 \cdot 24^3}{3} = 58\,389 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= a \cdot t_1 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \frac{t_3}{2} \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= 28 \cdot 6 \cdot \frac{28}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2} \cdot \frac{3}{2} = 92\,908 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.



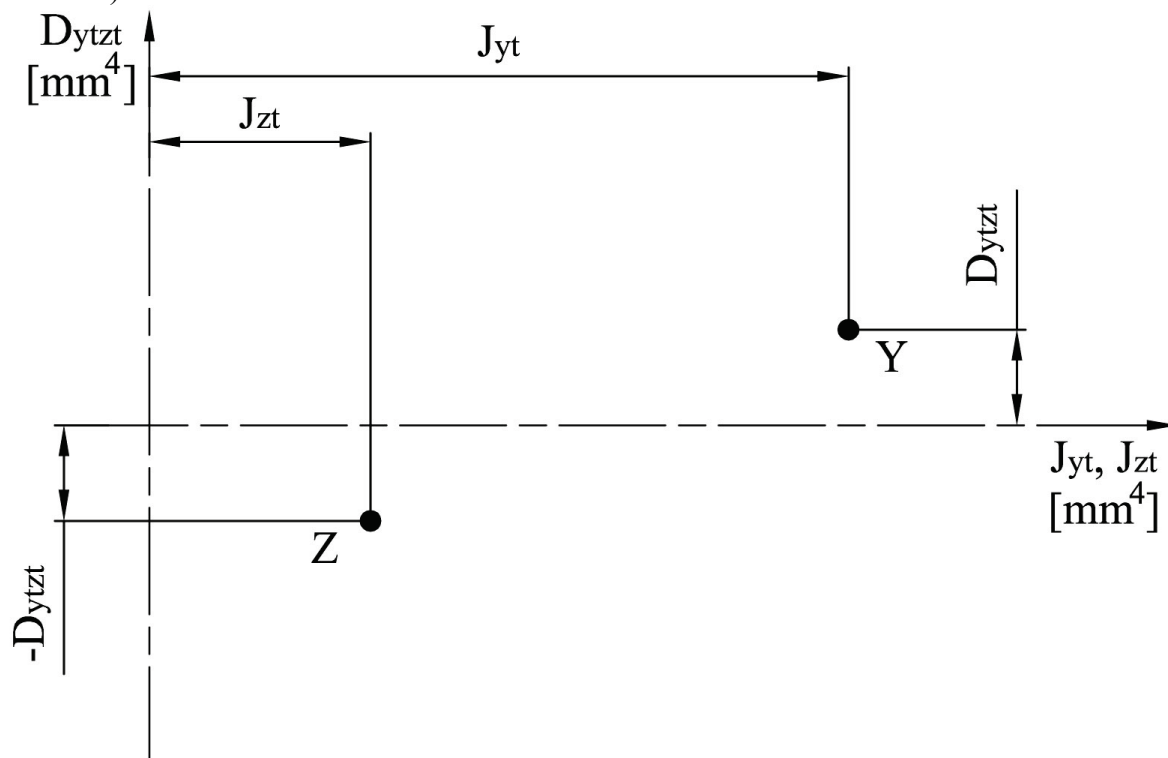
Obr. 6.3 Poloha těžiště složeného obrazce

$$J_{y_T} = J_y - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = 283081 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68^2 = 79\,043 \text{ mm}^4, \quad (6.6)$$

$$J_{z_T} = J_z - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = 58389 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 9,52^2 = 25\,424 \text{ mm}^4, \quad (6.7)$$

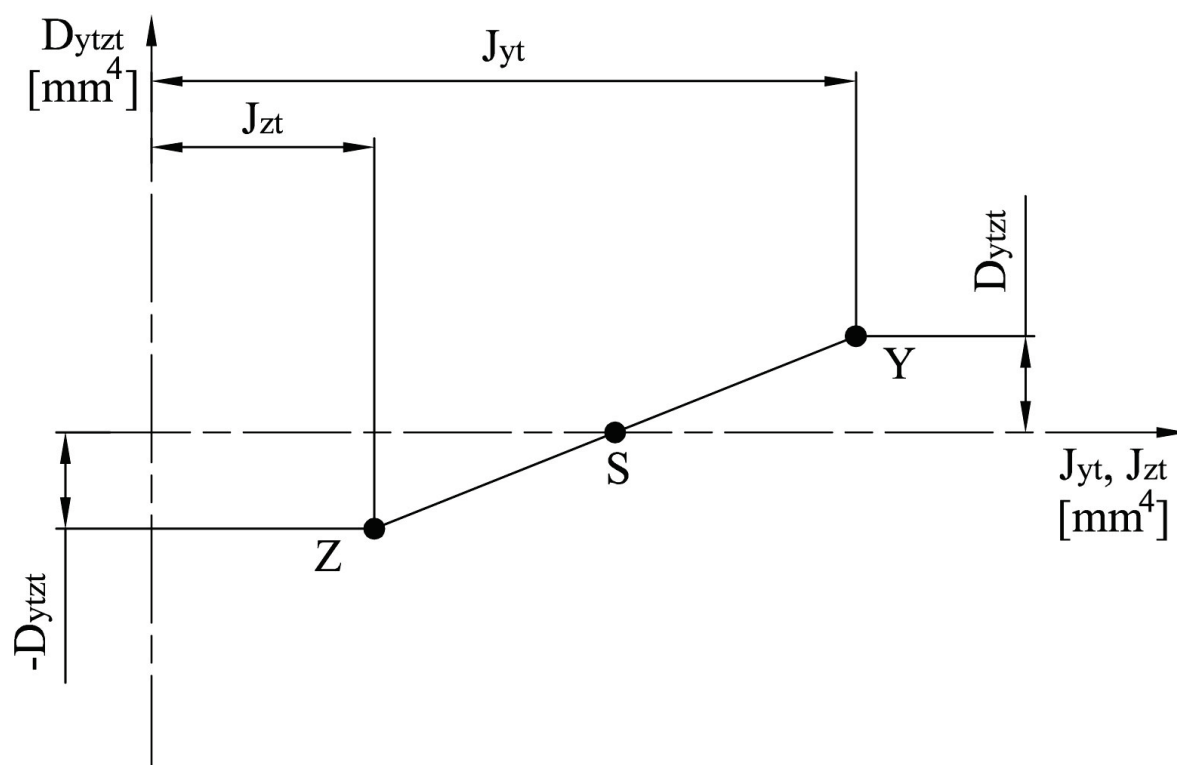
$$J_{y_T z_T} = J_{yz} - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = 92908 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 9,52 \cdot 23,68 = 10\,895 \text{ mm}^4. \quad (6.8)$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 6.4 až Obr. 6.7).

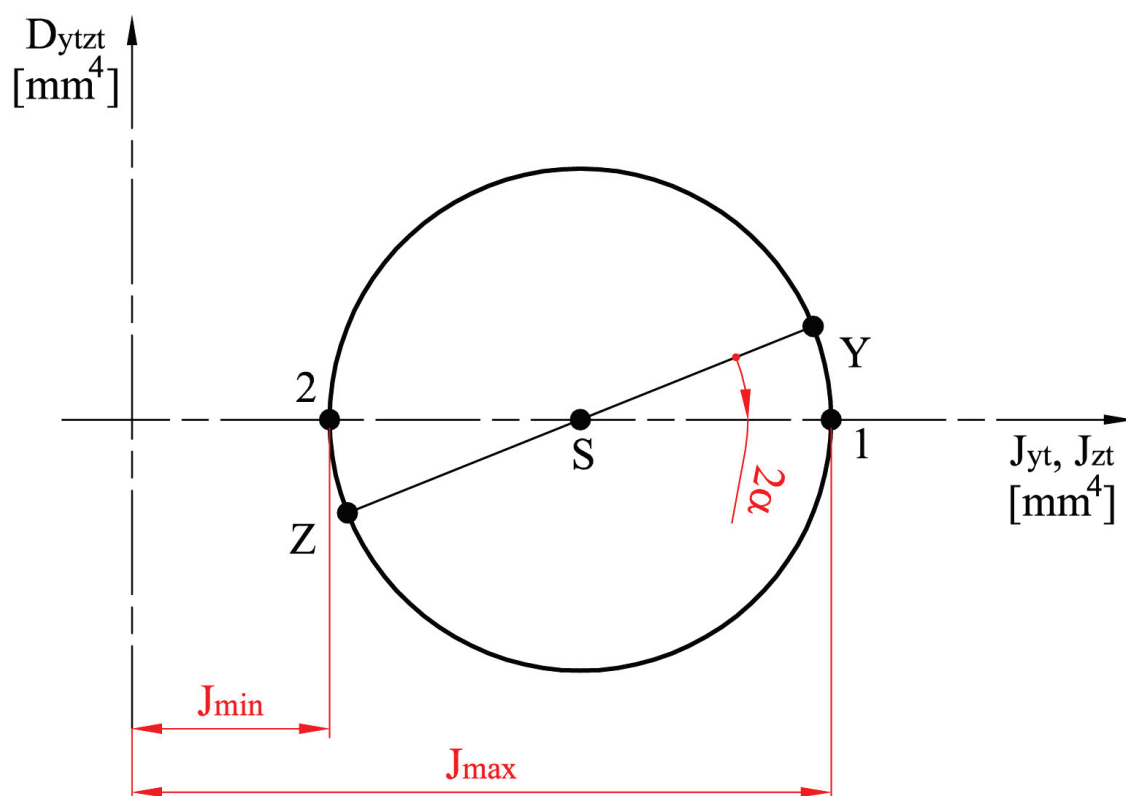


Obr. 6.4 - Konstrukce Mohrovy kružnice



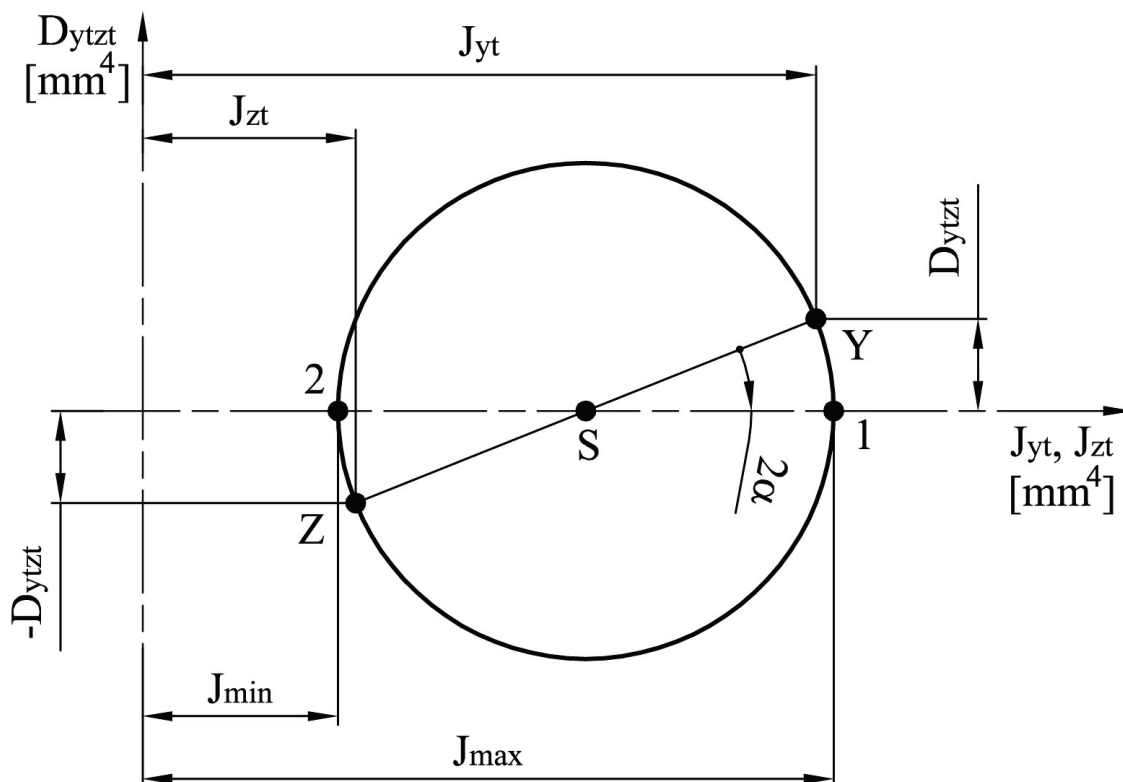


Obr. 6.5 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 6.6 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 6.7 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

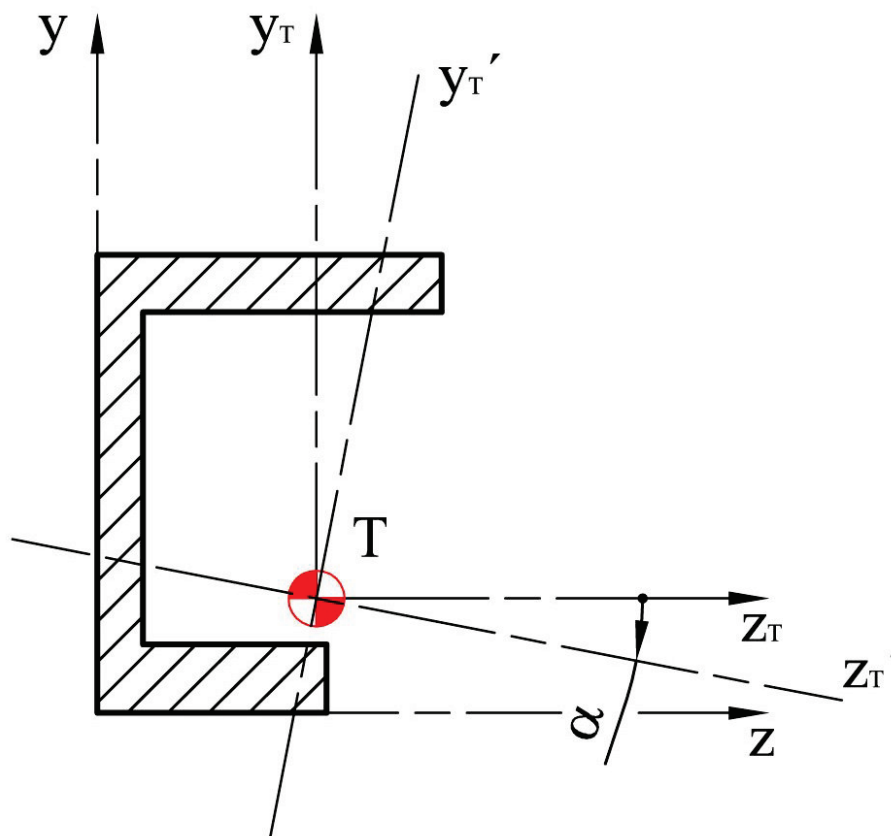
$$= \frac{79043 + 25424}{2} + \sqrt{\left(\frac{79043 - 25424}{2}\right)^2 + 10895^2} = \mathbf{81\,172\,mm^4}, \quad (6.9)$$

$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

$$= \frac{79043 + 25424}{2} - \sqrt{\left(\frac{79043 - 25424}{2}\right)^2 + 10895^2} = \mathbf{23\,295\,mm^4}, \quad (6.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot 10895}{79043 - 25424} \right) \right| = \mathbf{11,06^\circ}. \quad (6.11)$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = -11,06^\circ$.

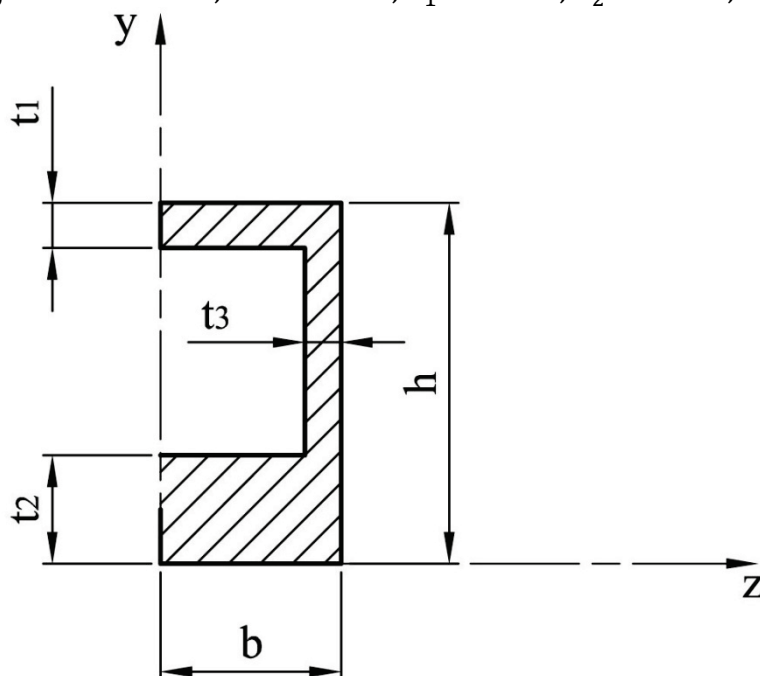


Obr. 6.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

6.2 PŘÍKLAD 9

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 6.9).

Zadané hodnoty jsou $b = 24 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



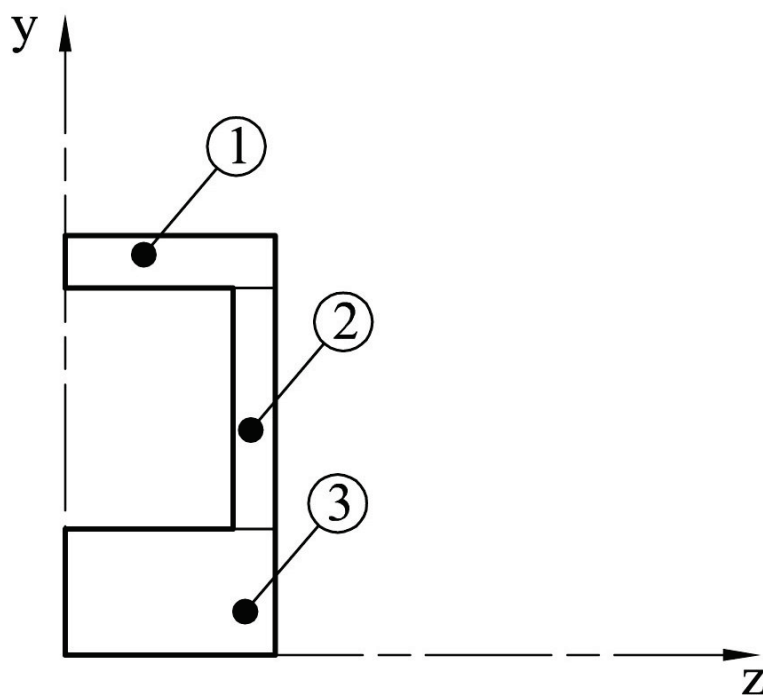
Obr. 6.9 Rozměry průřezu



Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 6.9). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{b}{2} \cdot b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + b - t_3\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2}}{b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{24}{2} \cdot 24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 24 - 4\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2}}{24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 15,65 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 22,74 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$



Obr. 6.10 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

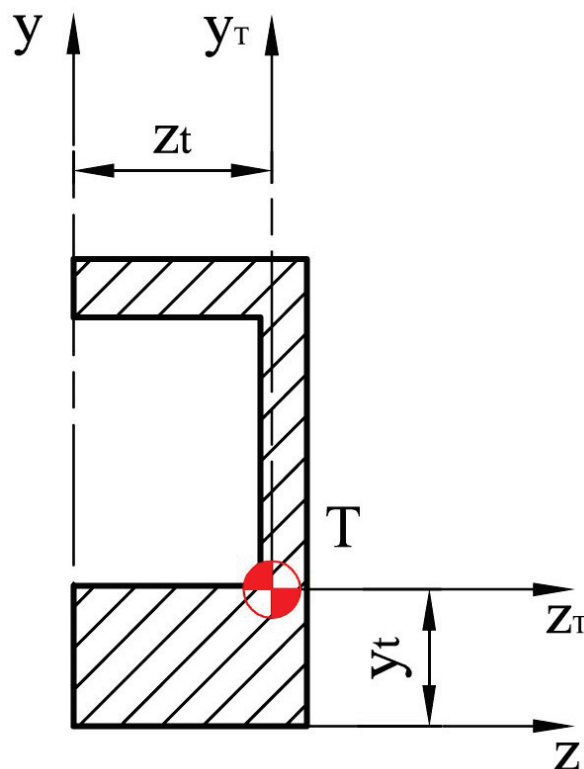
$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{b \cdot t_1^3}{12} + b \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{24 \cdot 6^3}{12} + 24 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 250\,153 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.14}$$



$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot b^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(b - \frac{t_3}{2}\right)^2 + \frac{t_2 \cdot b^3}{3} = \\
 &= \frac{6 \cdot 24^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \\
 &(40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(24 - \frac{4}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 24^3}{3} = 101\,653 \text{ mm}^4,
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= b \cdot t_1 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(b - \frac{t_3}{2}\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= 24 \cdot 6 \cdot \frac{24}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(24 - \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2} \cdot \frac{3}{2} = 115\,700 \text{ mm}^4.
 \end{aligned}
 \tag{6.16}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.



Obr. 6.11 Poloha těžiště složeného obrazce

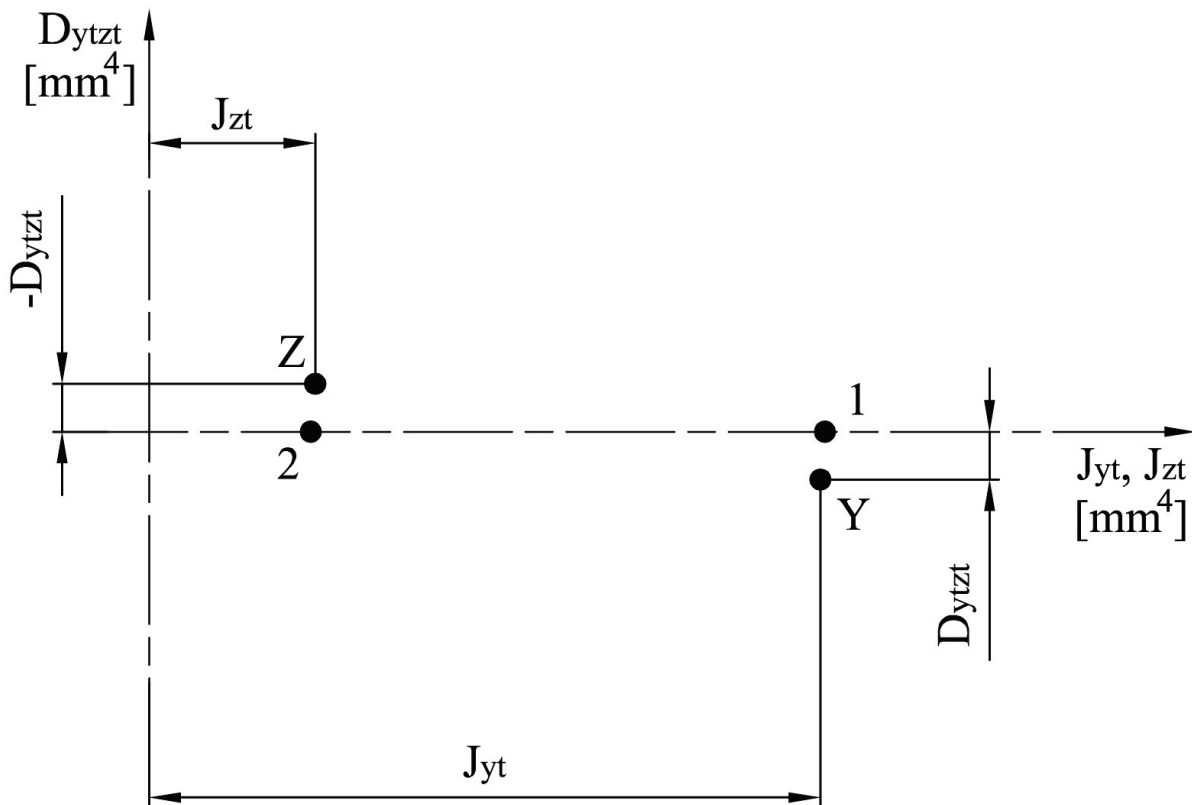
$$\begin{aligned}
 J_{yT} &= J_y - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = \\
 &= 250153 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 22,74^2 = 74\,410 \text{ mm}^4,
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
 J_{zT} &= J_z - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = \\
 &= 101653 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 15,65^2 = 18\,411 \text{ mm}^4,
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

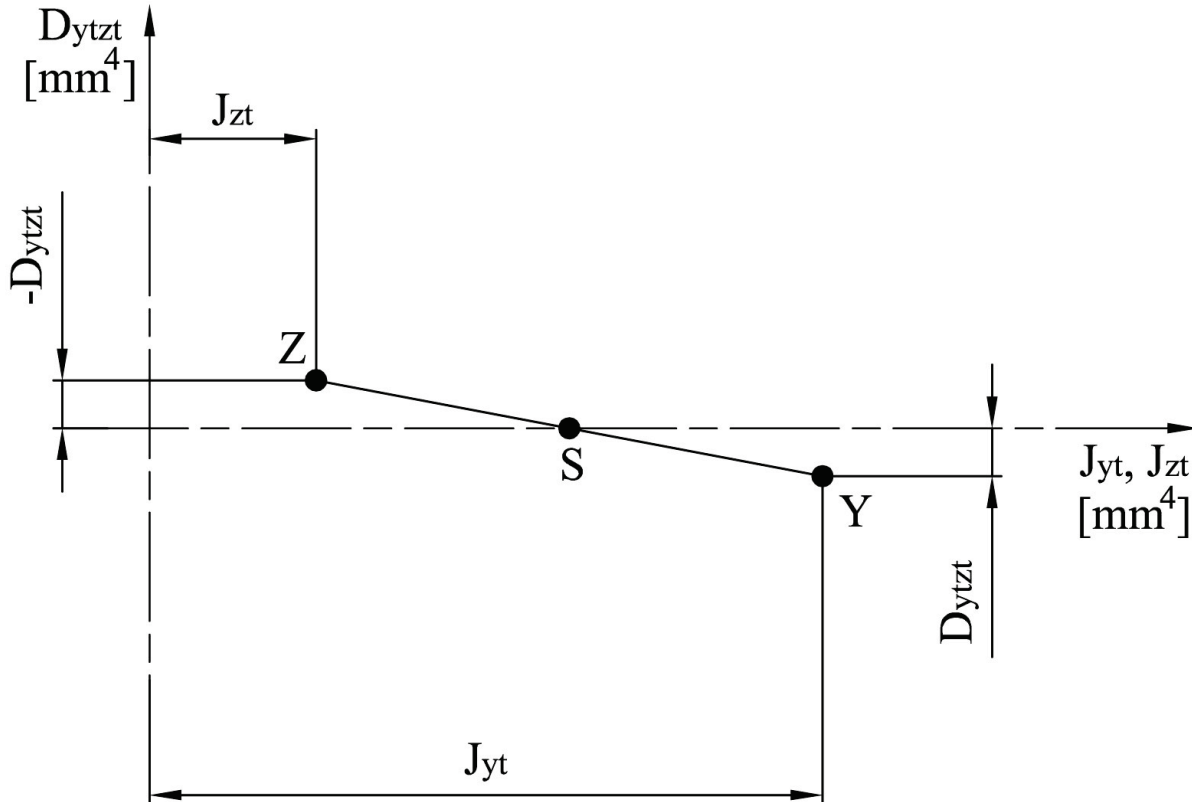
$$\begin{aligned}
 J_{yTzT} &= J_{yz} - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = \\
 &= 115700 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 15,65 \cdot 22,74 \\
 &= -5\,252 \text{ mm}^4.
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$



K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 6.12 až Obr. 6.15).

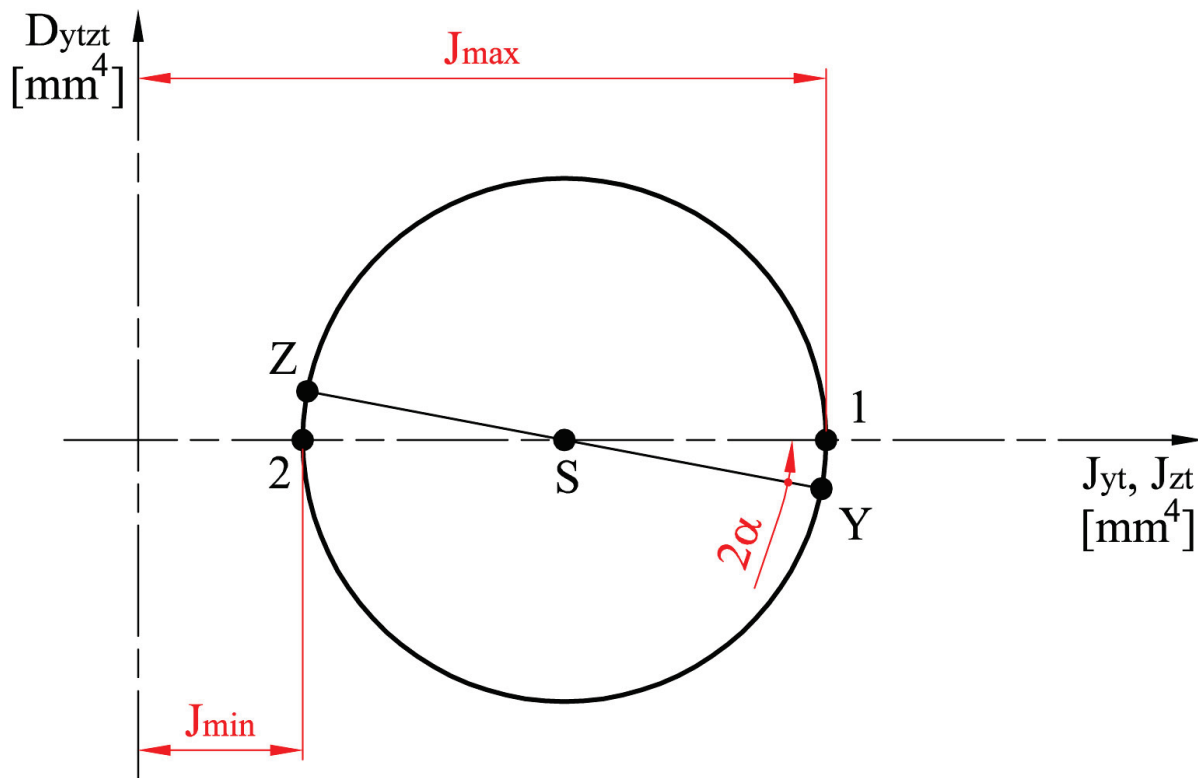


Obr. 6.12 - Konstrukce Mohrovy kružnice

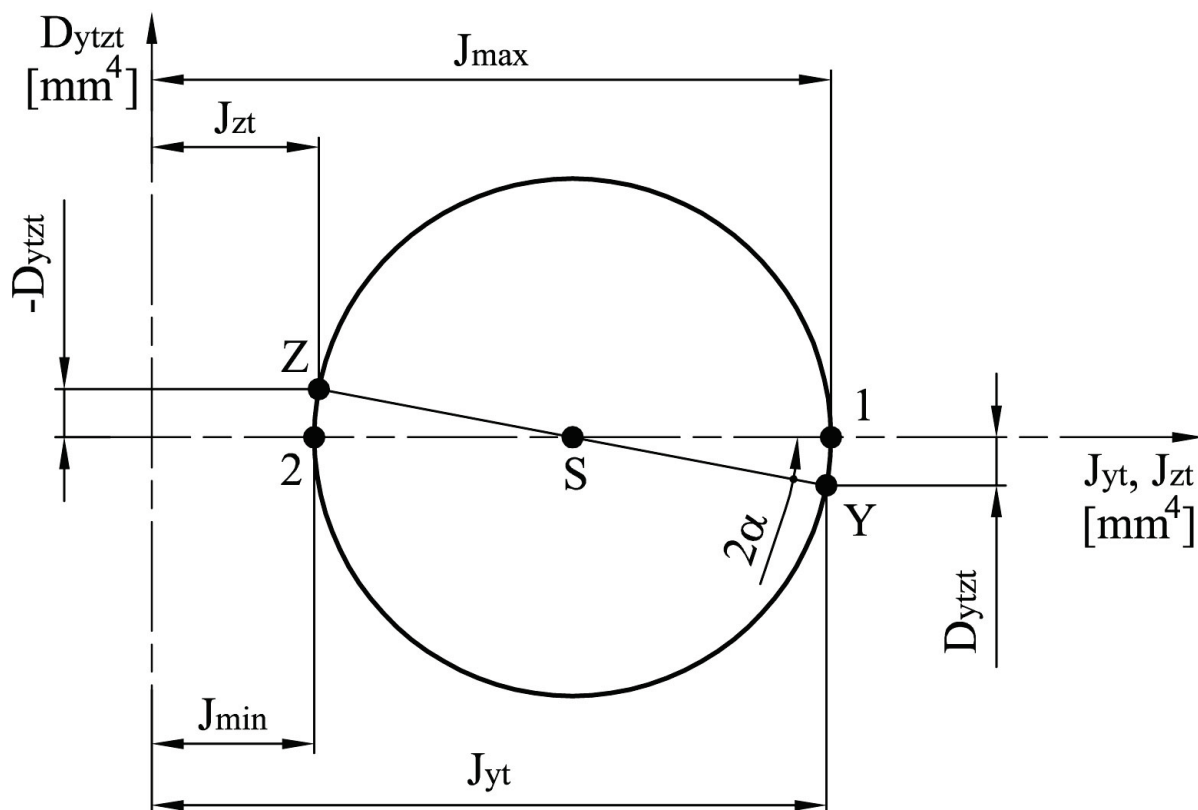


Obr. 6.13 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 6.14 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 6.15 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

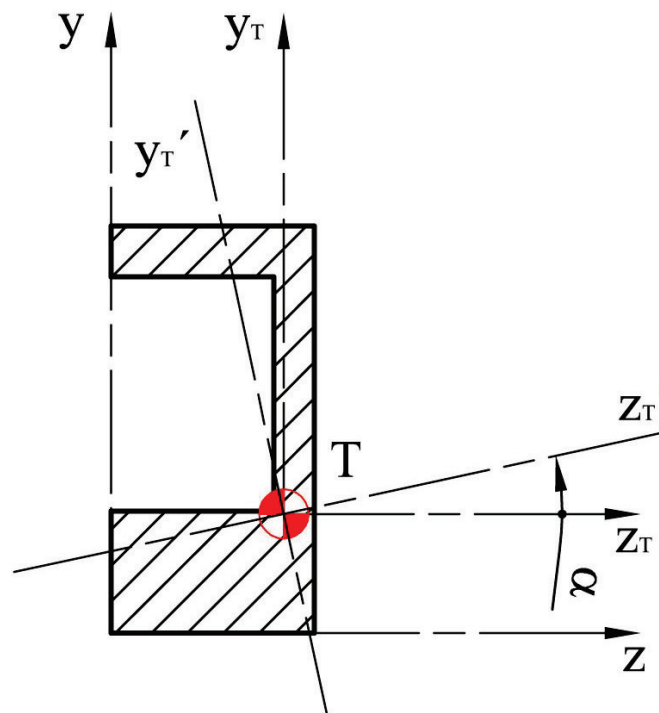
$$J_{\max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (6.20)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{74410 + 18411}{2} + \sqrt{\left(\frac{74410 - 18411}{2}\right)^2 + (-5252)^2} = \mathbf{74\,898\,mm^4}, \\
 J_{min} &= \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \\
 &= \frac{74410 + 18411}{2} - \sqrt{\left(\frac{74410 - 18411}{2}\right)^2 + (-5252)^2} = \mathbf{17\,923\,mm^4},
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-5252)}{74410 - 18411} \right) \right| = \mathbf{5,31^\circ}. \tag{6.22}$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = +5,31^\circ$.



Obr. 6.16 Zobrazení polohy hlavních centrálních os