

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady III

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

7	PŘÍKLADY III.....	3
7.1	Příklad 10	4
7.2	Příklad 11	10



7 PŘÍKLADY III



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k potočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

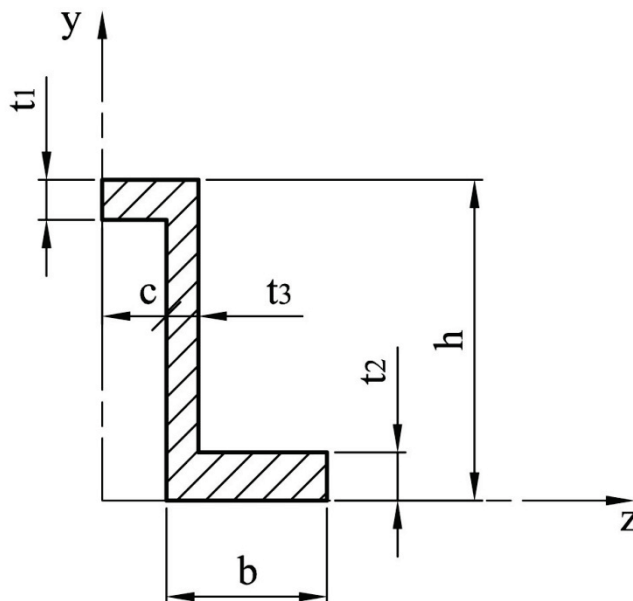
konstrukce Mohrovy kružnice.



7.1 PŘÍKLAD 10

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 7.1).

Zadané hodnoty jsou $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



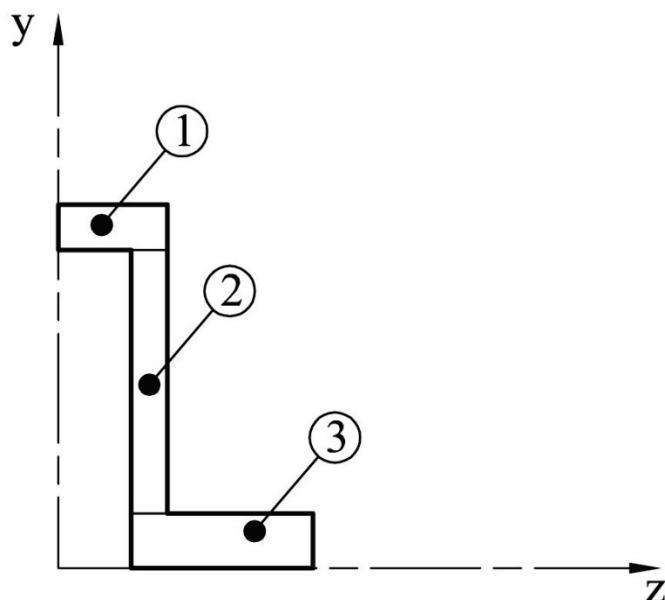
Obr. 7.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 7.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{c+t_3}{2} \cdot (c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c+\frac{t_3}{2}\right) + b \cdot t_2 \cdot \left(c+\frac{b}{2}\right)}{(c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{8+4}{2} \cdot (8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 \cdot \left(8+\frac{4}{2}\right) + 24 \cdot 3 \cdot \left(8+\frac{24}{2}\right)}{(8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 11,61 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h-\frac{t_1}{2}\right) \cdot (c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h-t_1-t_2}{2}+t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{(c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40-\frac{6}{2}\right) \cdot (8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40-6-3}{2}+3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{(8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 18,90 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$





Obr. 7.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

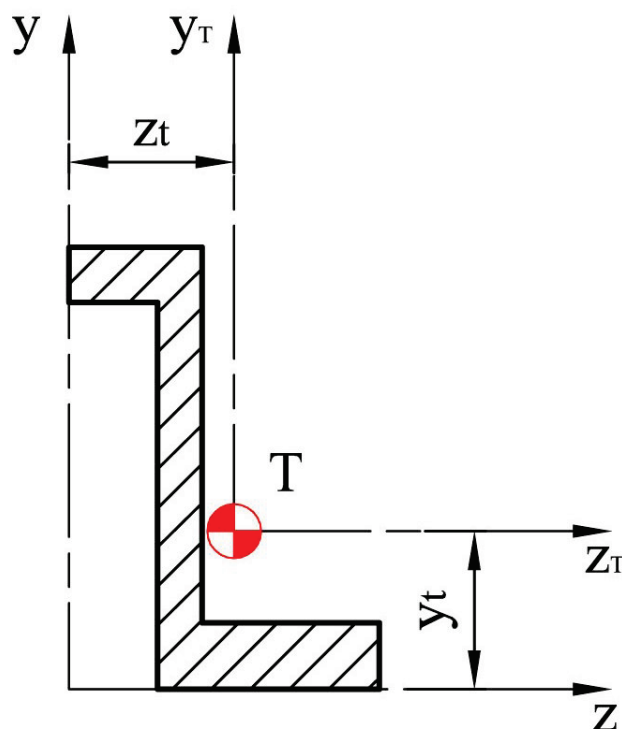
$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{(c + t_3) \cdot t_1^3}{12} + (c + t_3) \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{(8 + 4) \cdot 6^3}{12} + (8 + 4) \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 151\,369 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot (c + t_3)^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c + \frac{t_3}{2}\right)^2 + \frac{t_2 \cdot b^3}{12} + b \cdot t_2 \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right)^2 = \\
 &= \frac{6 \cdot (8 + 4)^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{24}{2}\right)^2 = 48\,277 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= (c + t_3) \cdot t_1 \cdot \frac{(c + t_3)}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c + \frac{t_3}{2}\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= (8 + 4) \cdot 6 \cdot \frac{(8 + 4)}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{24}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = 41\,084 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.





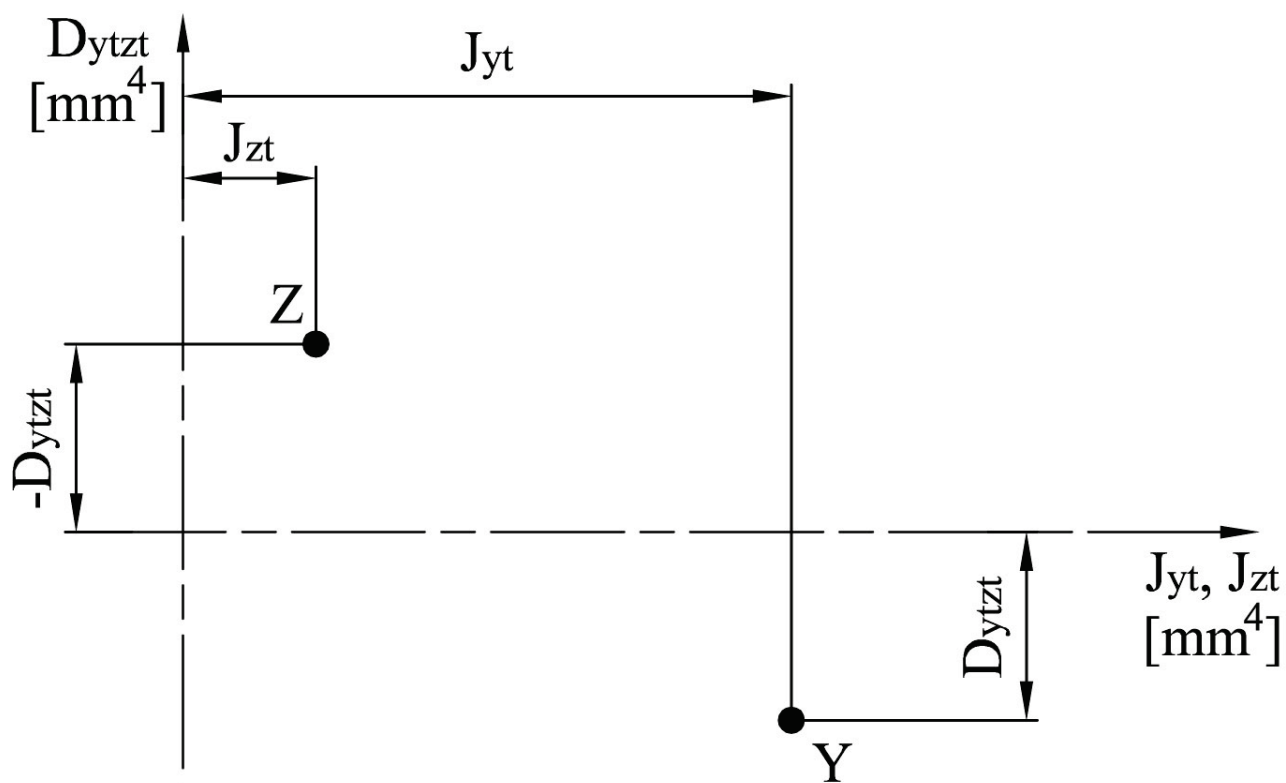
Obr. 7.3 Těžiště dílčích ploch

$$\begin{aligned}
 J_{y_T} &= J_y - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = \\
 &= 151369 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 18,90^2 = \\
 &= 55\,607 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

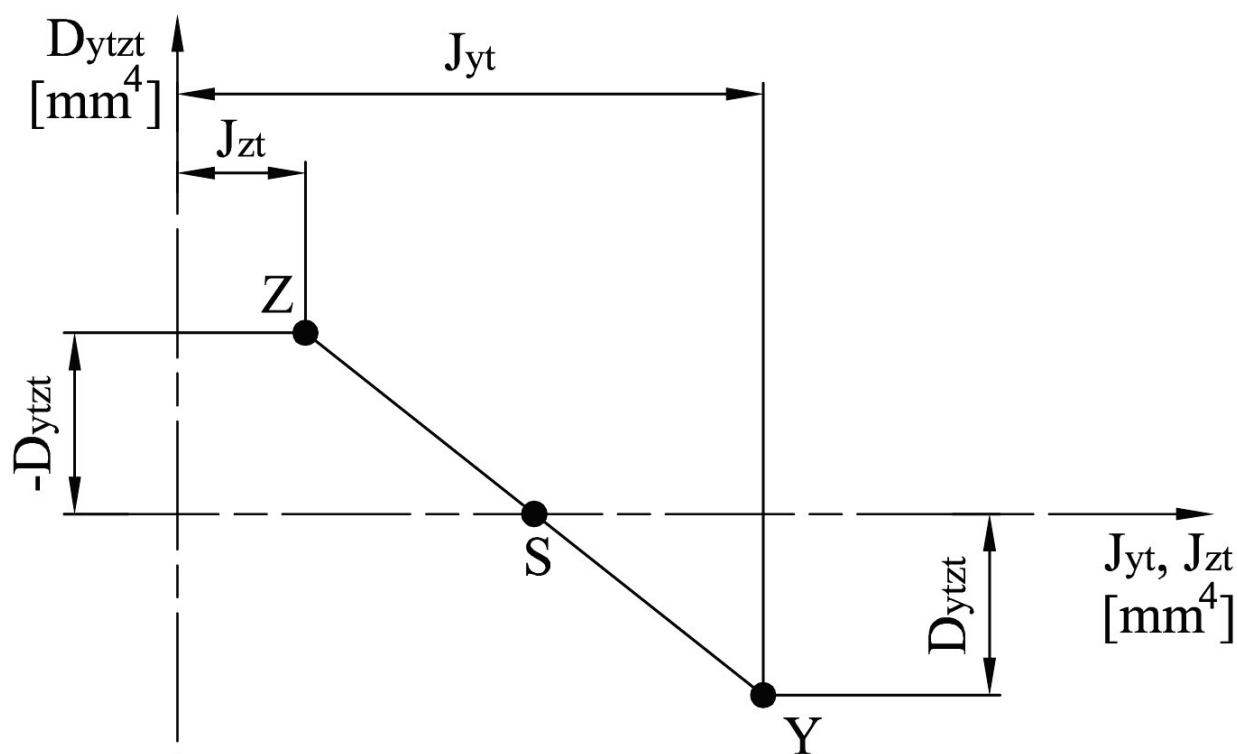
$$\begin{aligned}
 J_{z_T} &= J_z - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = \\
 &= 48277 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 11,61^2 = 12\,141 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
 J_{y_T z_T} &= J_{yz} - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = \\
 &= 41084 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 11,61 \cdot 18,90 = \\
 &= -17\,742 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

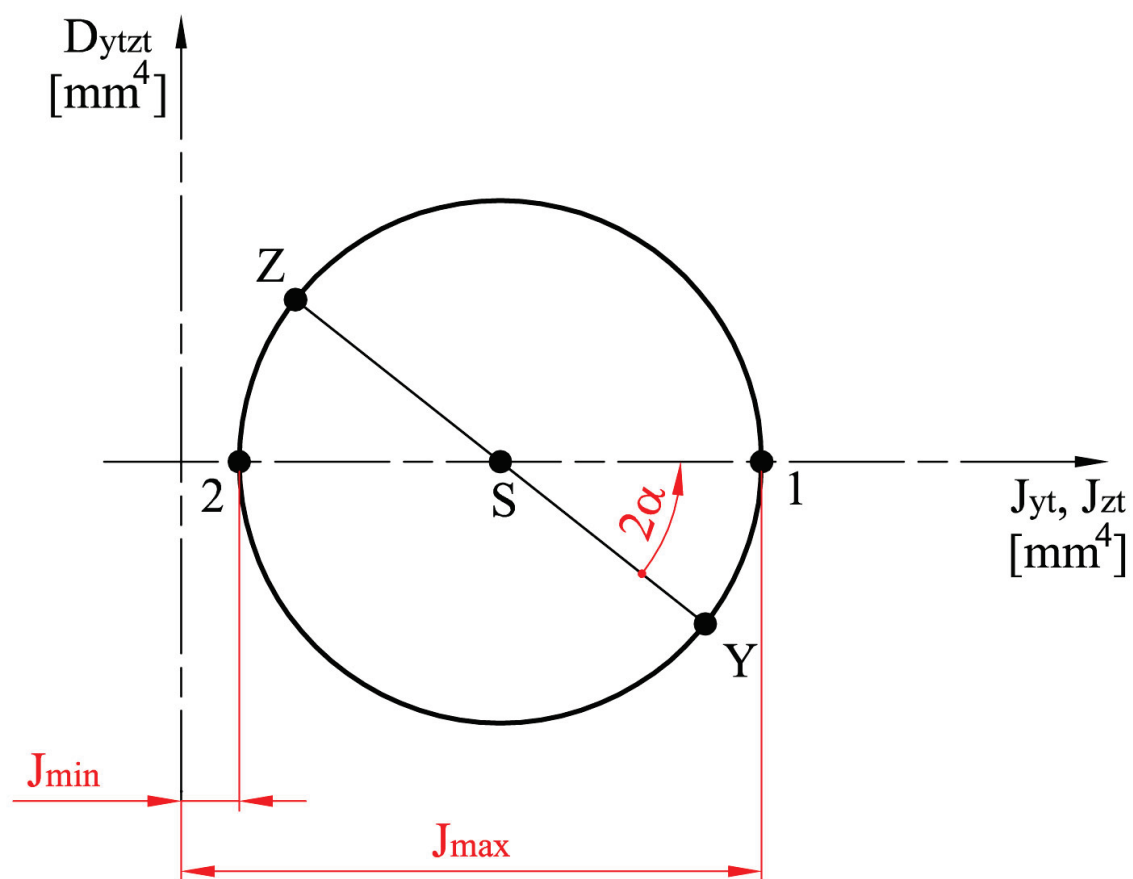
K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 7.4 až Obr. 7.7).



Obr. 7.4 - Konstrukce Mohrovy kružnice

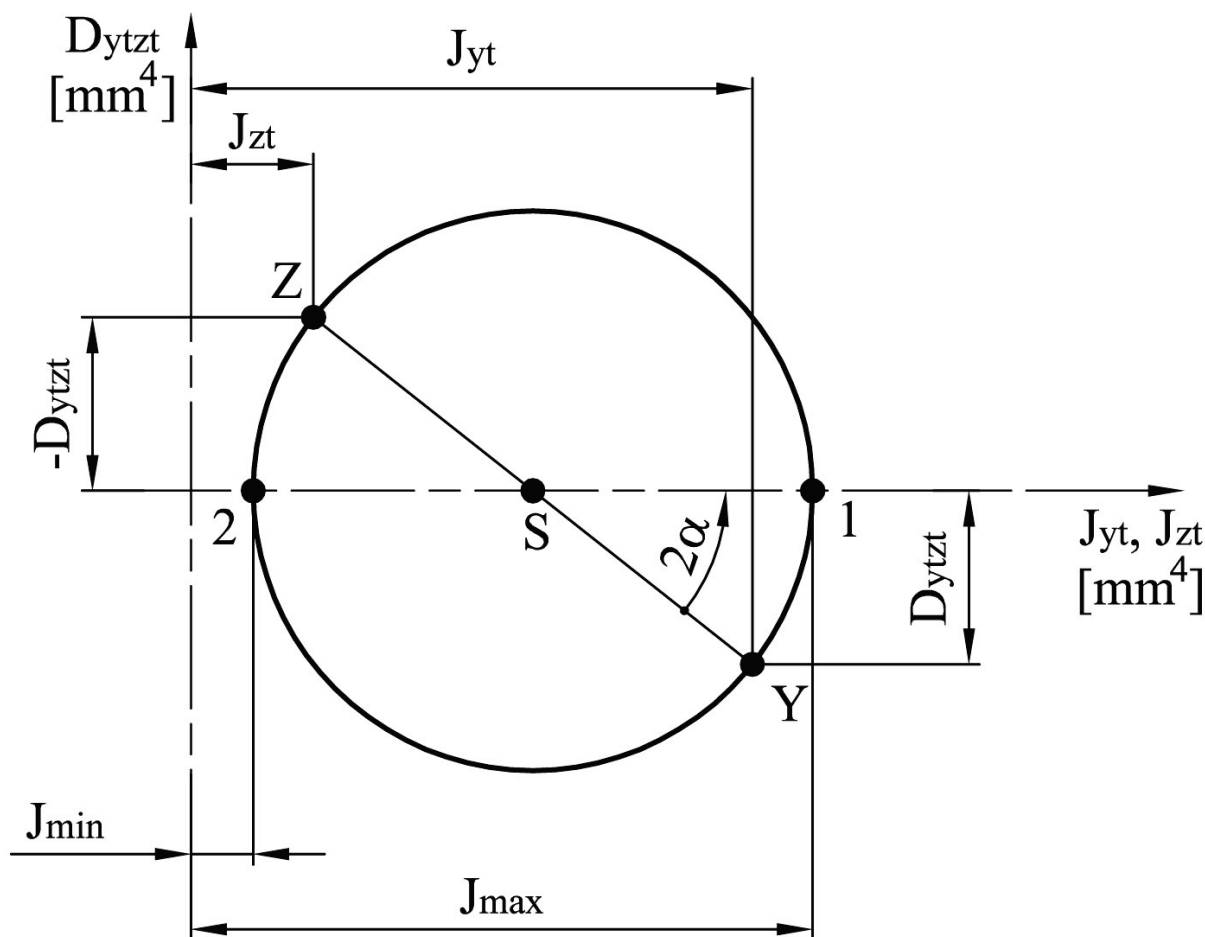


Obr. 7.5 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 7.6 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 7.7 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (7.9)$$

$$= \frac{55607 + 12141}{2} + \sqrt{\left(\frac{55607 - 12141}{2}\right)^2 + (-17742)^2} = \mathbf{61\,929\,mm^4},$$

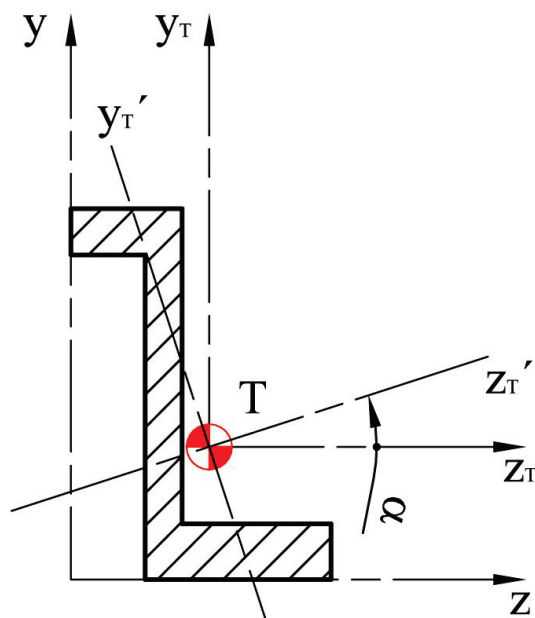
$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (7.10)$$

$$= \frac{55607 + 12141}{2} - \sqrt{\left(\frac{55607 - 12141}{2}\right)^2 + (-17742)^2} = \mathbf{5\,819\,mm^4},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-17742)}{55607 - 12141} \right) \right| = \mathbf{19,61^\circ}. \quad (7.11)$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = +19,61^\circ$.



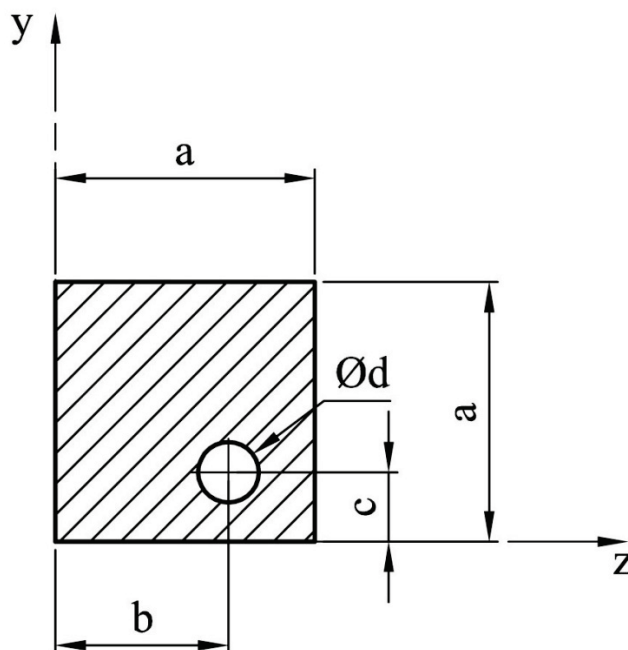


Obr. 7.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

7.2 PŘÍKLAD 11

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 7.9).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $d = 7 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$;



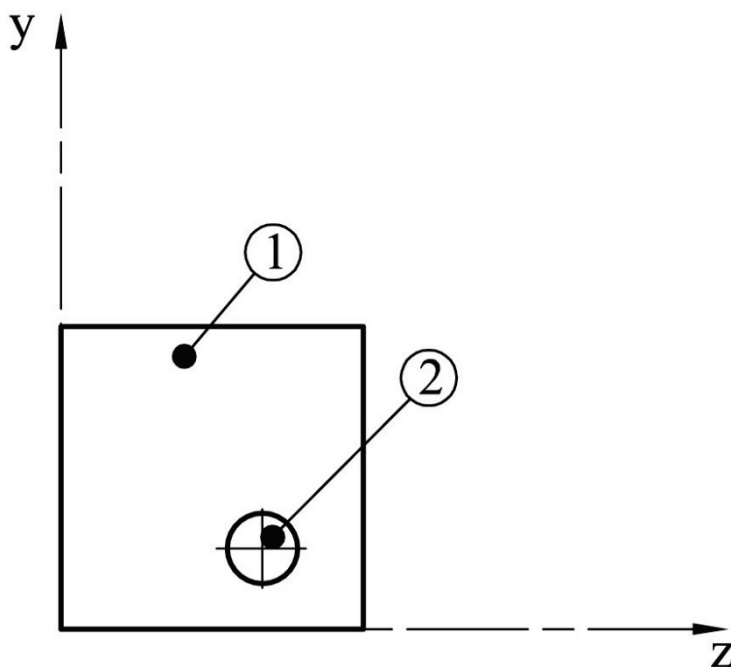
Obr. 7.9 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 7.9). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot a - b \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{a \cdot a - \frac{\pi d^2}{4}} = \quad (7.12)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 28 - 24 \cdot \frac{\pi \cdot 7^2}{4}}{28 \cdot 28 - \frac{\pi \cdot 7^2}{4}} = 13,48 \text{ mm}, \\
z_T &= \frac{\sum_{i=1}^2 z_{Ti} S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot a - c \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{a \cdot a - \frac{\pi d^2}{4}} = \\
&= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 28 - 8 \cdot \frac{\pi \cdot 7^2}{4}}{28 \cdot 28 - \frac{\pi \cdot 7^2}{4}} = 14,31 \text{ mm}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$



Obr. 7.10 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

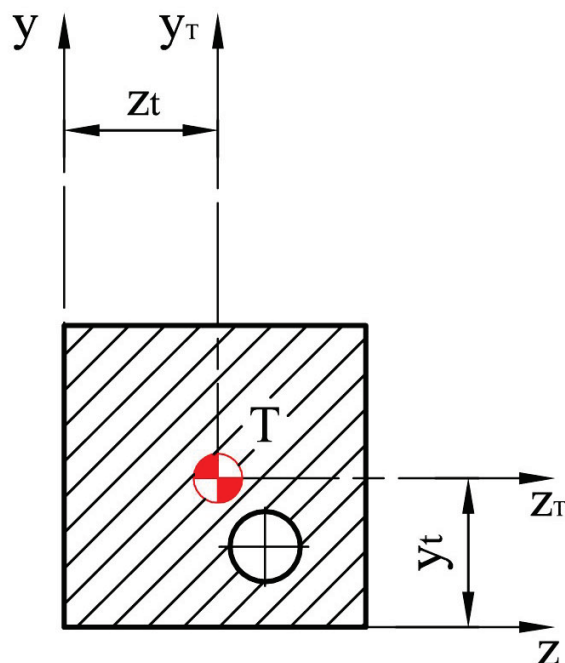
$$\begin{aligned}
J_y &= \frac{a^4}{3} - \left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot c^2 \right) = \\
&= \frac{28^4}{3} - \left(\frac{\pi \cdot 7^4}{64} + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 8^2 \right) = 202\,304 \text{ mm}^4,
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
J_z &= \frac{a^4}{3} - \left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot b^2 \right) = \\
&= \frac{28^4}{3} - \left(\frac{\pi \cdot 7^4}{64} + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 24^2 \right) = 182\,600 \text{ mm}^4,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
J_{yz} &= a \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{\pi d^2}{4} \cdot b \cdot c = \\
&= 28 \cdot 28 \cdot \frac{28}{2} \cdot \frac{28}{2} - \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 24 \cdot 8 = 146\,275 \text{ mm}^4.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.





Obr. 7.11 Poloha těžiště složeného obrazce

$$J_{yT} = J_y - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot z_T^2 =$$

$$= 202304 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 14,31^2 = 49\,647 \text{ mm}^4, \quad (7.17)$$

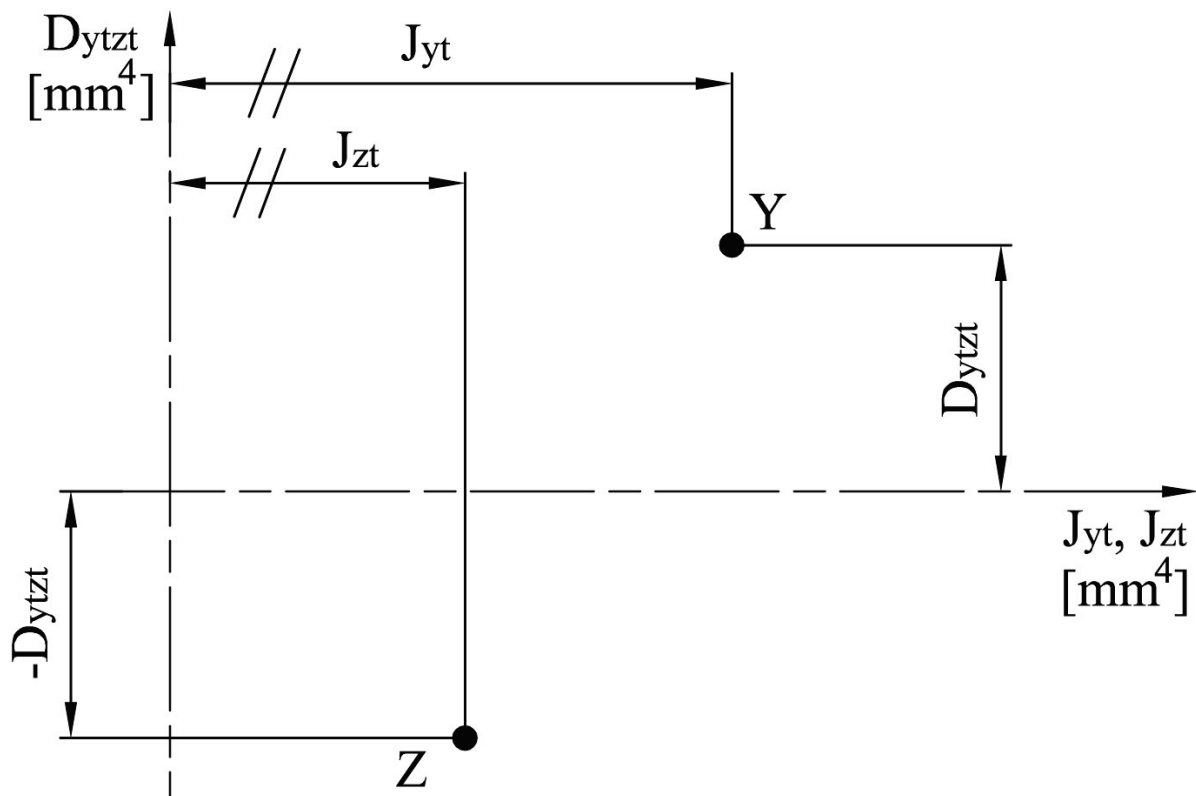
$$J_{zT} = J_z - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot y_T^2 =$$

$$= 182600 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 13,48^2 = 47\,056 \text{ mm}^4, \quad (7.18)$$

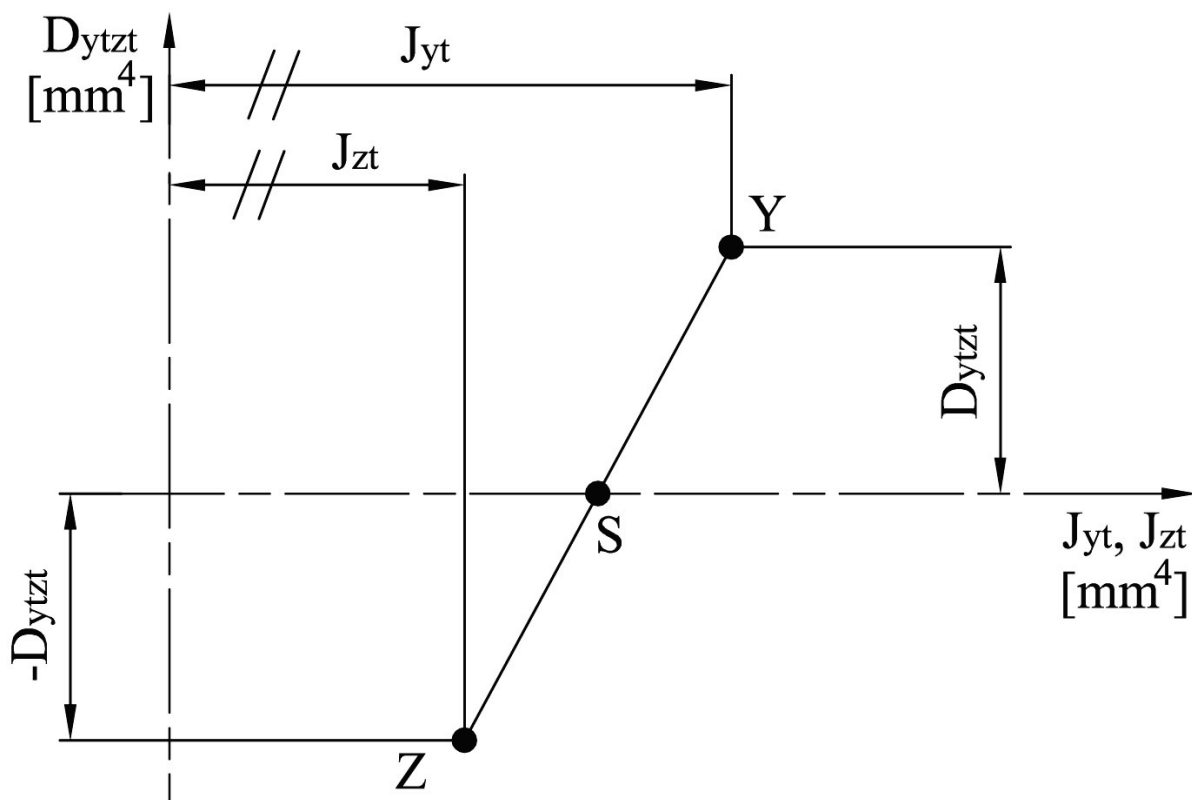
$$J_{yTzT} = J_{yz} - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot y_T \cdot z_T =$$

$$= 146275 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 13,48 \cdot 14,31 = 2\,428 \text{ mm}^4. \quad (7.19)$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 7.12 až Obr. 7.15).

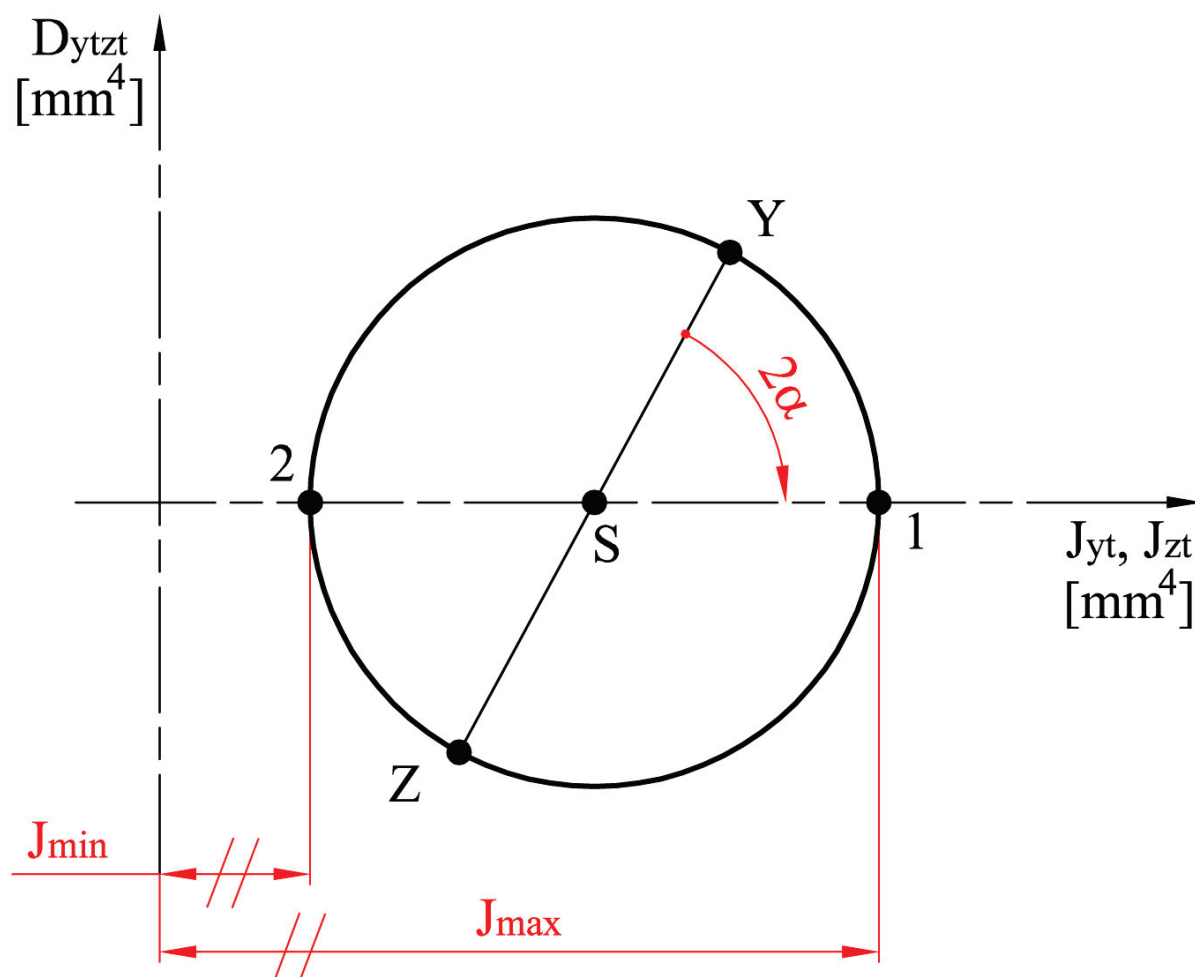


Obr. 7.12 - Konstrukce Mohrovy kružnice

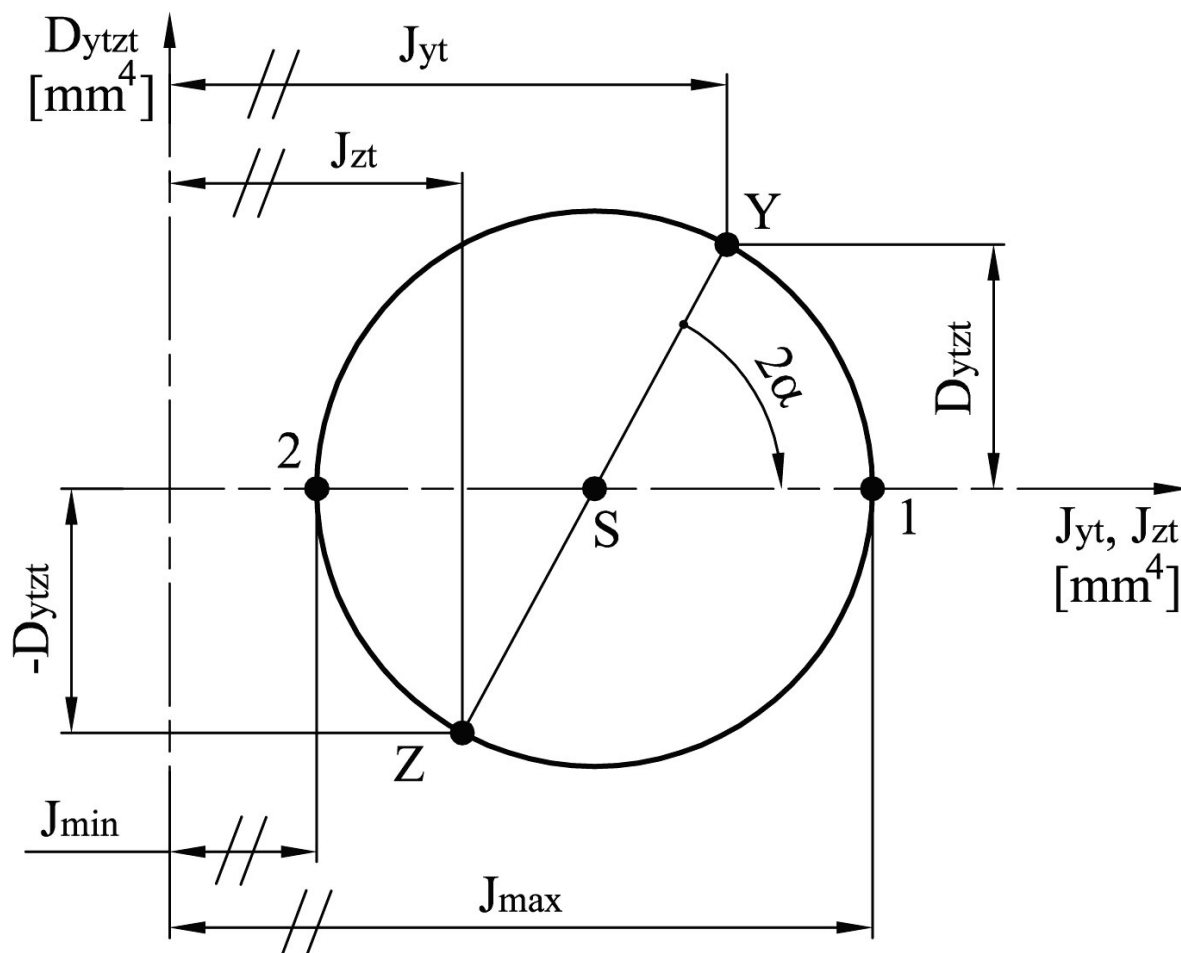


Obr. 7.13 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 7.14 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 7.15 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

$$= \frac{49647 + 47056}{2} + \sqrt{\left(\frac{49647 - 47056}{2}\right)^2 + 2428^2} = \mathbf{51\,103\,mm^4}, \quad (7.20)$$

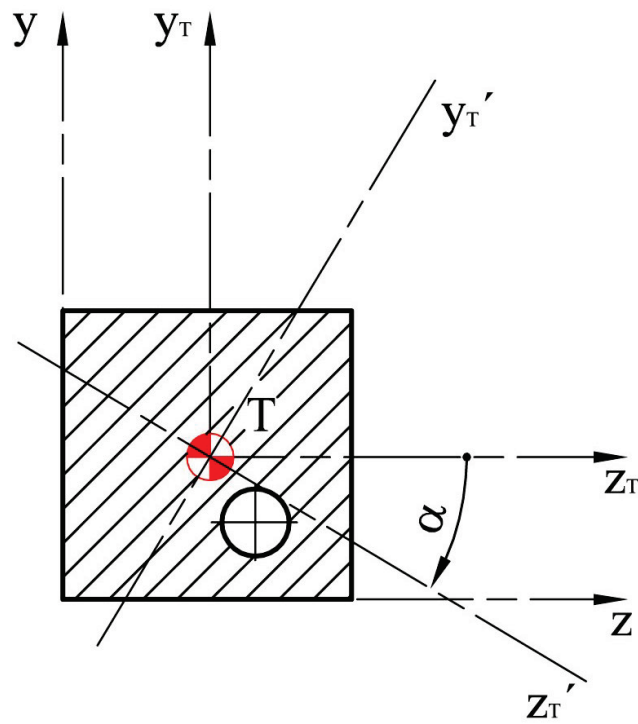
$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

$$= \frac{49647 + 47056}{2} - \sqrt{\left(\frac{49647 - 47056}{2}\right)^2 + 2428^2} = \mathbf{45\,599\,mm^4}, \quad (7.21)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot 2428}{49647 - 47056} \right) \right| = \mathbf{30,96^\circ}. \quad (7.22)$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = -30,96^\circ$.





Obr. 7.16 Zobrazení polohy hlavních centrálních os