INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

PRUŽNOST A PEVNOST 2 – V PŘÍKLADECH

Kvadratický moment I

doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3020-9

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

2 KVADRATICKÝ MOMENT I

OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.

CÍL:

Kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

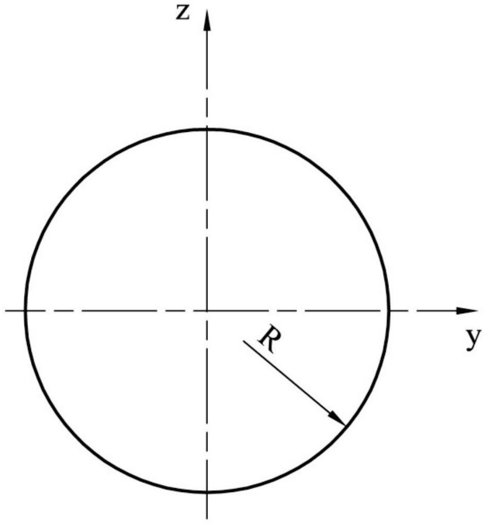
kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment průřezu,

hlavní centrální kvadratický moment průřezu.

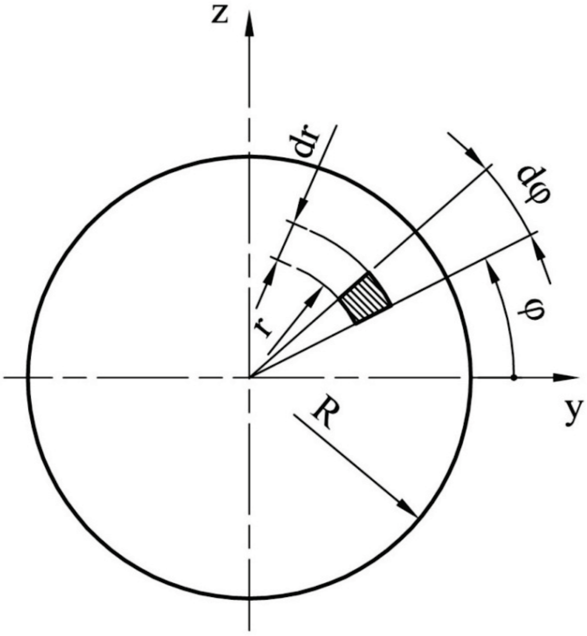
2.1 PŘÍKLAD 2

Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty kruhového průřezu.



Obr. 2.1 Rozměry průřezu

Jedná se o kruhový průřez o poloměru R. Souřadný systém si opět zvolíme do těžiště průřezu, tudíž do středu kruhu. Kvadratický moment průřezu určíme z elementu (Obr. 2.2), který vyjmeme ve vzdálenosti r od středu o tloušťce dr a v úhlové vzdálenosti φ a úhlovém výseku $d\varphi$. Kvadratické momenty průřezu J_y a J_z lze spočítat pomocí transformace do polárních souřadnic. Transformační rovnice mají následující tvar



Obr. 2.2 Vyjmutí elementu

$$\begin{gathered} y = r \cdot cos\ \varphi, \\ z = r \cdot sin\ \varphi, \\ J = r. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Kde J je jakobián transformace

$$J_{yT} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cdot sin\varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \tag{2.2}$$

$$= \int_0^{2\pi} (sin\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64},$$

$$J_{zT} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cdot cos\varphi)^2 \cdot r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \qquad (2.3)$$

Pro integraci výrazu $(sin\varphi)^2$ a $(cos\varphi)^2$ jsou využity následující vztahy a integrace pomocí substituce

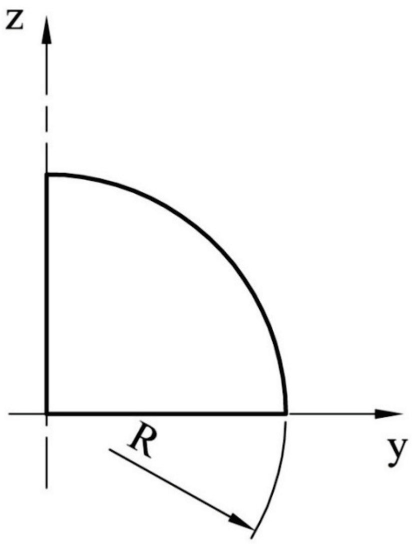
$$(sin\varphi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\,,(cos\varphi)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi). \qquad (2.4)$$

Polární kvadratický moment setrvačnosti je pak prostým součtem kvadratických momentů průřezu J_y a J_z

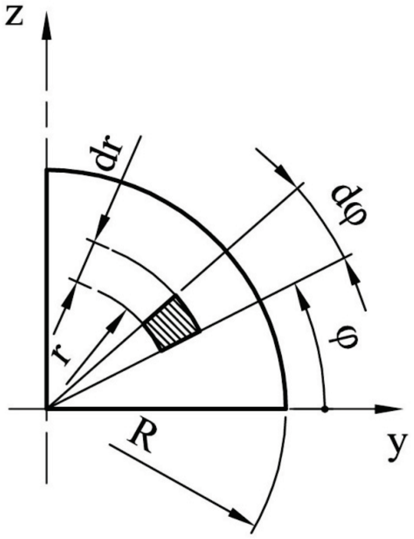
$$J_p = J_{yT} + J_{zT} = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}. \qquad (2.5)$$

2.2 PŘÍKLAD 3

Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty čtvrtkruhového průřezu.



Obr. 2.3 Rozměry průřezu



Obr. 2.4 Vyjmutí elementu

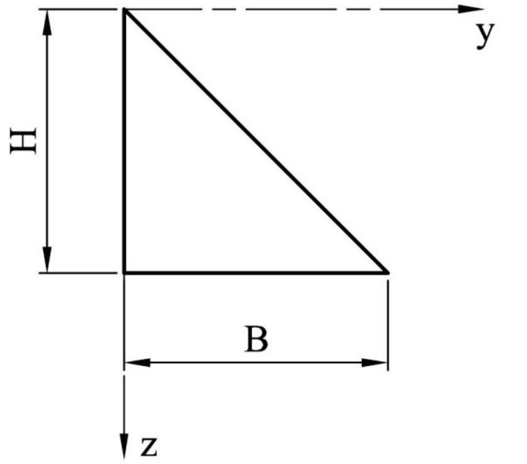
Podobně jako v předchozím příkladě se jedná o kruhový průřez, nyní ale pouze v rozmezí $0 - 90°$, jde tedy o čtvrtkruh o poloměru R. Souřadný systém zde není zaveden to těžiště, ale je orientován podél spodní a levé hrany průřezu. K odvození vztahů pro kvadratický moment průřezu plochy použijeme opět element o rozměrech dφ a dr vyjmutý ve vzdálenosti r od středu a φ od osy y (Obr. 2.4). K odvození využijeme opět transformaci do polárních souřadnic rovnice (2.1) a vztahy pro výpočet kvadratických momentů průřezu (rovnice (1.4))

$$J_{yT} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cdot sin\varphi)^2 \cdot rdrd\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{R^4}{4} = \tag{2.6}$$
$$= \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}.$$

$$J_{zT} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cdot cos\varphi)^2 \cdot rdrd\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}sin(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{R^4}{4} = \tag{2.7}$$
$$= \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}.$$

2.3 PŘÍKLAD 4

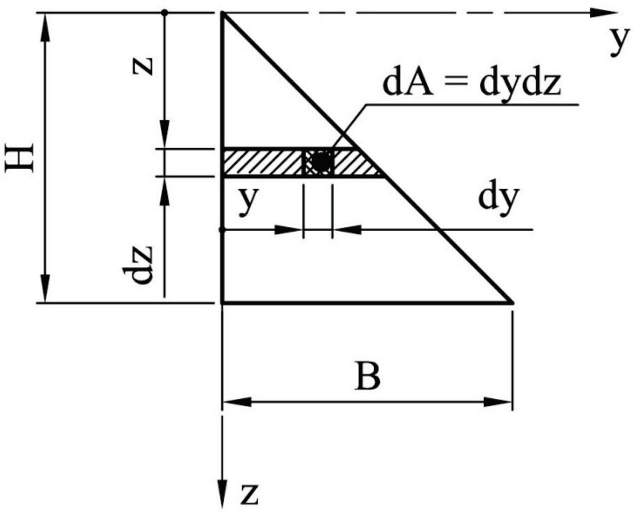
Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty trojúhelníkového průřezu.



Obr. 2.5 Rozměry průřezu

V tomto příkladě je nutné nejprve upozonit na jinou orientaci zvoleného souřadného systému. Kladná osa z směřuje podél levé hrany dolů, osa y pak doprava od vrcholu trojúhelníku. Z trojúhelníku opět vyjmeme element ve vzdálenosti z od osy y výšky dz a ve vzdálenosti y od osy z šířky dy (viz Obr. 2.5). Elementární plocha pak je $dA = dy \cdot dz$. Horní integrační mez pro souřadnici y je nutné určit z podobnosti trojúhelníků, a to

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{H} \rightarrow y = \frac{B \cdot z}{H}. \tag{2.8}$$



Obr. 2.6 Vyjmutí elementu

Pro výpočet kvadratických momentů setrvačnosti použijeme opět vztahy (1.4.), v tomto případě se jedná o průřez, který nemá osu symetrie, tudíž musíme vypočítat i deviační moment setrvačnosti

$$J_{yT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B\cdot z}{H}} z^2 dydz = \int_0^H z^2 \cdot [y]_0^{\frac{B\cdot z}{H}} dz = \frac{B}{H} \cdot \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \frac{BH^3}{4}, \tag{2.9}$$

$$J_{zT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B\cdot z}{H}} y^2 dydz = \int_0^H \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{B\cdot z}{H}} dz = \frac{B^3}{3 \cdot H^3} \cdot \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \frac{HB^3}{12}, \tag{2.10}$$

$$J_{yTzT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B\cdot z}{H}} yzdydz = \int_0^H z \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{B\cdot z}{H}} dz = \frac{B^2}{2.H^2} \cdot \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \frac{B^2H^2}{8}. \tag{2.11}$$