

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



METODA KONEČNÝCH PRVKŮ I

4. PRUTOVÉ KONSTRUKCE

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Martin Fusek, Ph.D., Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3023-0



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	PRUTOVÉ KONSTRUKCE	3
1.1	Rovinné příhradové konstrukce	4
1.2	Transformace souřadnic	7
1.3	Ukázkový případ	8
1.4	Zobecnění pro prostorové úlohy	13
1.5	Cvičení	16
2	LITERATURA	35



1 PRUTOVÉ KONSTRUKCE



OBSAH KAPITOLY

V této kapitole rozšíříme znalosti z minulé přednášky. Rozšíříme možnosti aplikace odvozených vztahů pro tažený/tlačený prut na případ rovinných a prostorových rámových konstrukcí. Hlavním úkolem bude pochopení transformace z globálního souřadného systému do pootočeného lokálního souřadného systému a zpět.



MOTIVACE:

V předchozí kapitole byla uvedena přímá tuhostní metoda, jako předchůdce, nebo chceme-li jako speciální varianta (podmnožina) metody konečných prvků. V této kapitole aplikujeme základní poznatky na řešení problematiky prutových, chceme-li příhradových, konstrukcí.

Na začátku provedeme úpravu stávajících rovnic pro tažený/tlačený prvek tak, abychom mohli tento použít v případě rovinného prutového problému. Změna se odrazí ve formulaci základní rovnice pro daný prvek. Proto, abychom byli schopni aplikovat tyto rovnice, musíme provést transformace z lokálního souřadného systému prvku do globálního souřadného systému. V předchozí kapitole lokální a globální souřadný systém spolu v podstatě splývaly, tj. osy jednotlivých souřadných systémů ležely na jedné přímce. V případě prutových konstrukcí jsou však jednotlivé pruty umístěny libovolně a je proto nutno najít potřebné transformační vztahy.

Na konci kapitoly bude takovýto prutový prvek zobecněn pro použití v trojrozměrném prutovém problému.



1.1 ROVINNÉ PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE

Prutové (příhradové) konstrukce, např. taková jaká je na Obr. 1 a její možný model je naznačen na Obr. 2. Prutová konstrukce se skládá z prutů, které jsou umístěny libovolně v prostoru vůči sobě a jsou spojeny v kloubech. Klouby se uvažují ideální, takže takto spojené pruty mohou přenášet pouze tahovou či tlakovou sílu.



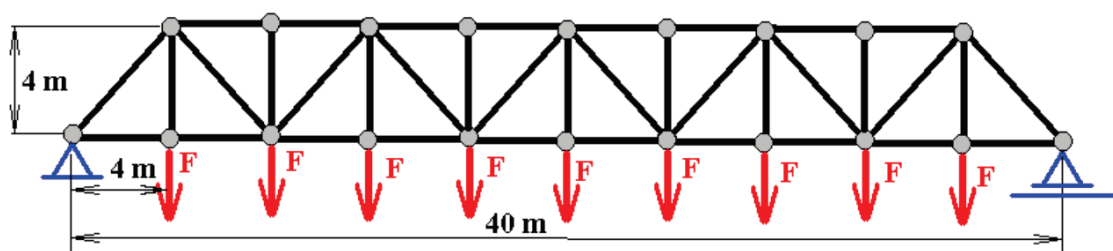
Audio 1.1 Prutová konstrukce



Proto, abychom mohli analyzovat takovouto soustavu je nutno odvodit základní rovnici elementu pro dvoj- či troj- dimenzionální prostor. Pro jednoduchost na začátku budeme uvažovat dvojrozměrný případ.



Obr. 1 - Příklad reálné konstrukce



Obr. 2 - Prutová konstrukce (možný model konstrukce z předchozího obrázku)

Při popisu bude dodržována následující konvence:

$$prom_{ij}^{(e)}, \quad (4.1)$$

kde:

prom ... znamená označení proměnné. Například posuv je značen *u* popř. *U*, síla *f* popř. *F*, atd. Malá písmenka se vztahují k jednomu danému elementu, velká k celému systému.



(e) ... je horní pravý index, označuje číslo elementu, s kterým se pracuje. Index je umístěn do uvozovek z důvodu, aby nedošlo k záměně s mocninou.

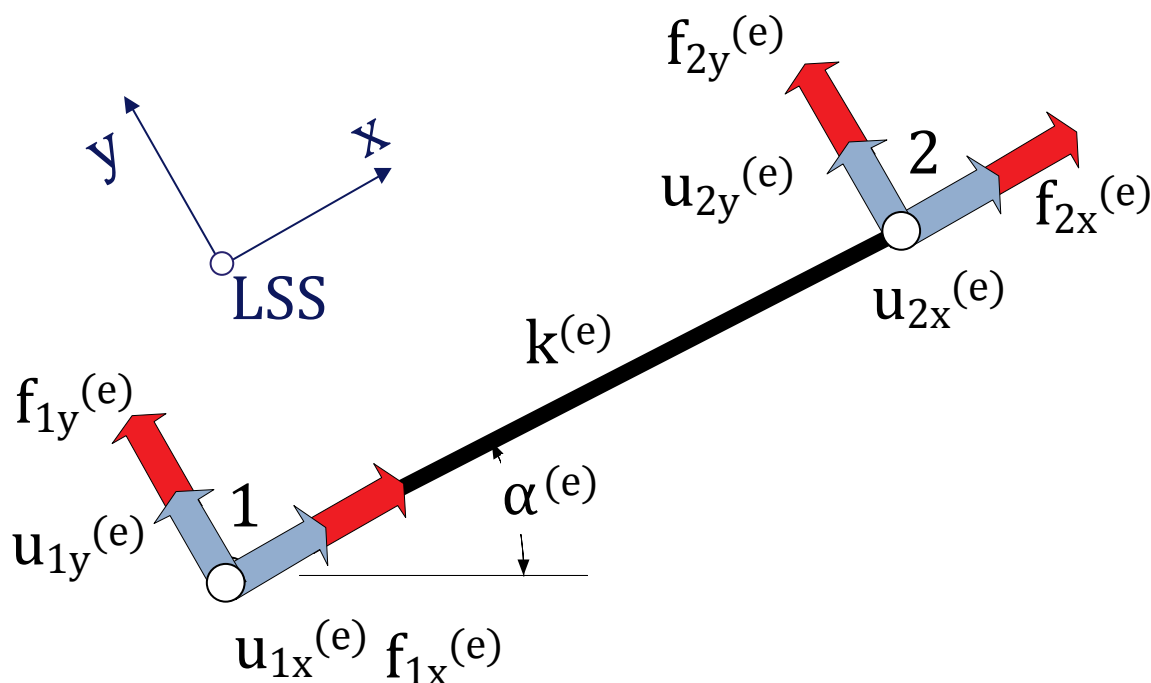
i ... spodní pravý index, který označuje číslo uzlu, ke kterému se veličina vztahuje. V případě, že proměnná představuje parametr elementu (malé písmeno), jedná se o lokální označení uzlu. Naopak v případě použití velkého písmene v proměnné, jedná se o globální číslování uzlu.

j ... spodní pravý index, který určuje směr, ve kterém se daná veličina vyšetřuje. V případě použití malého písmene v indexu, jedná se o lokální souřadnici (LSS) daného elementu. Naopak v případě použití velkého písmene se jedná o globální souřadnici (GSS).

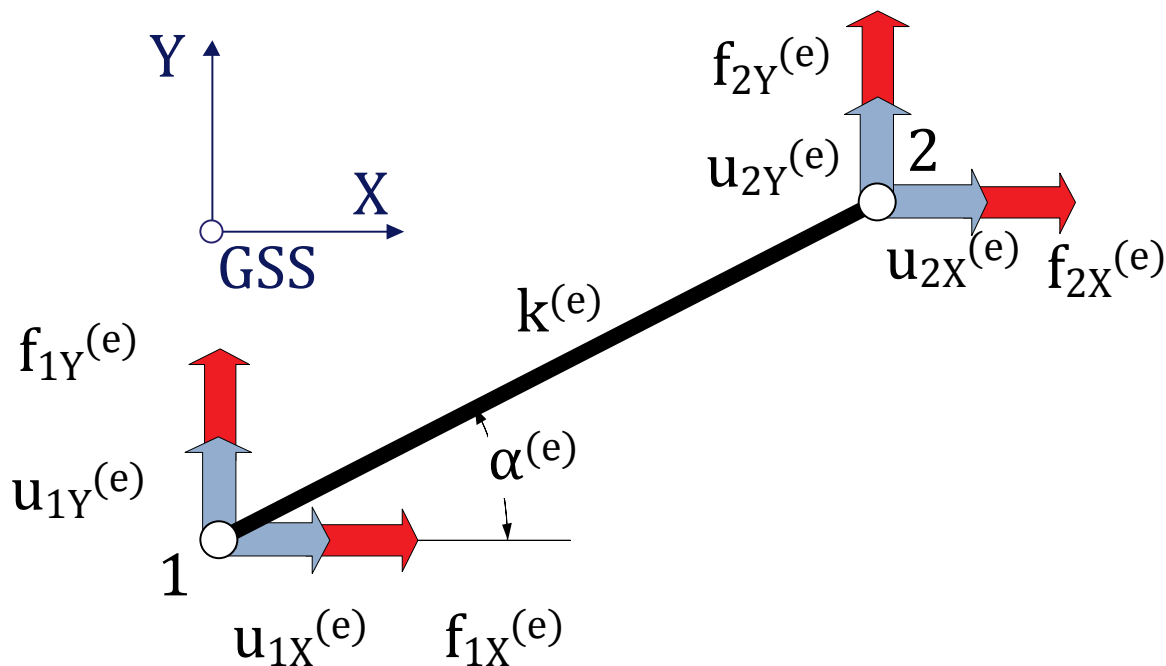
Obdobně pro vektory a matice:

$$\{prom\}_i^{(e)}, \quad (4.2)$$

Zde index i může nabývat hodnot G , který značí, že se veličina vztahuje ke globálnímu souřadnému systému anebo může nabývat hodnoty L pro popis vztahující se k lokálnímu souřadnému systému.



Obr. 3 - Prvek a jeho popis v lokálním souřadném systému (LSS)



Obr. 4 - Prvek a jeho popis v globálním souřadném systému (GSS)

Obecný element, kterým je modelováno chování prutu příhradové konstrukce, je zobrazen i s jednotlivými popisky na obrázcích Obr. 3 a Obr. 4. Element má dva koncové uzly, v každém jsou předepsány dva posuvy (stupně volnosti) a k nim náležící síly. Vektory uzlových posuvů a uzlových sil je možno zapsat ve tvaru:

$$\{u\}_L^{(e)} = \{u_{1x}^{(e)}, u_{1y}^{(e)}, u_{2x}^{(e)}, u_{2y}^{(e)}\}^T, \quad (4.3)$$

$$\{f\}_L^{(e)} = \{f_{1x}^{(e)}, f_{1y}^{(e)}, f_{2x}^{(e)}, f_{2y}^{(e)}\}^T.$$

Index T představuje transpozici.

Na obrázcích Obr. 3 a Obr. 4 jsou rovněž zobrazeny souřadné systémy, lokální souřadný systém (LSS) svázaný s elementem a globální souřadný systém (GSS). Napišme základní rovnici pro prvek v lokálním souřadném systému. Využijeme vztahu (3.7) z předchozí kapitoly a můžeme napsat:

$$\begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(e)} \\ u_{2x}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(e)} \\ f_{2x}^{(e)} \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

Předcházející vztah lze přepsat do expandovaného tvaru přidáním členů $u_{1y}^{(e)}, u_{2y}^{(e)}$ a $f_{1y}^{(e)}, f_{2y}^{(e)}$. Síly kolmé na osu prutu jsou uvažovány nulové a nijak neovlivňují prodloužení prutu. Vycházíme zde s předpokladu, že pruty jsou štíhlé, tím pádem jsou smykové složky na elementu zanedbatelné, a dále se uvažuje teorie malých posunutí. Výsledný vztah má tedy tvar (tuhost byla vytknuta z matice tuhosti ven):

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(e)} \\ u_{1y}^{(e)} \\ u_{2x}^{(e)} \\ u_{2y}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(e)} \\ f_{1y}^{(e)} \\ f_{2x}^{(e)} \\ f_{2y}^{(e)} \end{Bmatrix}. \quad (4.5)$$

Popřípadě v kondenzované formě:



$$[k]_L^{(e)} \{u\}_L^{(e)} = \{f\}_L^{(e)}. \quad (4.6)$$

kde $[k]_L^{(e)}$ je **matice tuhosti elementu** e-tého elementu, $\{u\}_L^{(e)}$ je **vektor uzlových posuvů** e-tého elementu a $\{f\}_L^{(e)}$ **silový vektor** e-tého elementu. Vše vztaženo k lokálnímu souřadnému systému elementu.

1.2 TRANSFORMACE SOUŘADNIC

Transformační vztahy mezi lokálním a globálním souřadným systémem lze zapsat v následujícím tvaru:

$$\{u\}_L^{(e)} = [T]^{(e)} \{u\}_G^{(e)}. \quad (4.7)$$

kde:

$$[T]^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha^{(e)}) & \sin(\alpha^{(e)}) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha^{(e)}) & \cos(\alpha^{(e)}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha^{(e)}) & \sin(\alpha^{(e)}) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha^{(e)}) & \cos(\alpha^{(e)}) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

a

$$\{u\}_G^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{1X}^{(e)} \\ u_{1Y}^{(e)} \\ u_{2X}^{(e)} \\ u_{2Y}^{(e)} \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Matice $[T]^{(e)}$ je tzv. **transformační matice** a je matice ortogonální. Platí, že inverze se rovná transpozici dané matice:

$$[T]^{(e)T} = [T]^{(e)-1}. \quad (4.10)$$

Na základě vztahů (4.7) a (4.10) lze zapsat vztah mezi posuvy v globálním a lokálním souřadném systému následovně:

$$\{u\}_G^{(e)} = [T]^{(e)T} \{u\}_L^{(e)}. \quad (4.11)$$

a silami nad uzly elementu vzhledem ke globálnímu souřadnému systému:

$$\{f\}_G^{(e)} = [T]^{(e)T} \{f\}_L^{(e)}. \quad (4.12)$$

Vyjděme z rovnice (4.12), dosadíme do ní rovnici (4.6) a využijme transformační vztah (4.7) získáme:

$$\begin{aligned} \{f\}_G^{(e)} &= [T]^{(e)T} \{f\}_L^{(e)} = \\ &= [T]^{(e)T} [k]_L^{(e)} \{u\}_L^{(e)} = \\ &= [T]^{(e)T} [k]_L^{(e)} [T]^{(e)} \{u\}_G^{(e)} = \\ &= [k]_G^{(e)} \{u\}_G^{(e)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$



Matice tuhosti elementu v globálním souřadném systému $[k]_G^{(e)}$ je dána výrazem:

$$[k]_G^{(e)} = [T]^{(e)T} [k]_L^{(e)} [T]^{(e)}. \quad (4.14)$$

Dosazením za jednotlivé matice a provedením jednotlivých operací získáme následující tvar:

$$[k]_G^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha^{(e)}) & \cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & -\cos^2(\alpha^{(e)}) & -\cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) \\ \cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & \sin^2(\alpha^{(e)}) & -\cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & -\sin^2(\alpha^{(e)}) \\ -\cos^2(\alpha^{(e)}) & -\cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & \cos^2(\alpha^{(e)}) & \cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) \\ -\cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & -\sin^2(\alpha^{(e)}) & \cos(\alpha^{(e)}) \sin(\alpha^{(e)}) & \sin^2(\alpha^{(e)}) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Připomeňme, že matice tuhosti je symetrická. Pro element můžeme napsat následující vztah:

$$[k]_G^{(e)} \{u\}_G^{(e)} = \{f\}_G^{(e)}. \quad (4.16)$$

kde $[k]_G^{(e)}$ je **matice tuhosti elementu** e-tého elementu, $\{u\}_G^{(e)}$ je **vektor uzlových posuvů** e-tého elementu a $\{f\}_G^{(e)}$ **silový vektor** e-tého elementu. Vše vztaženo ke globálnímu souřadnému systému.

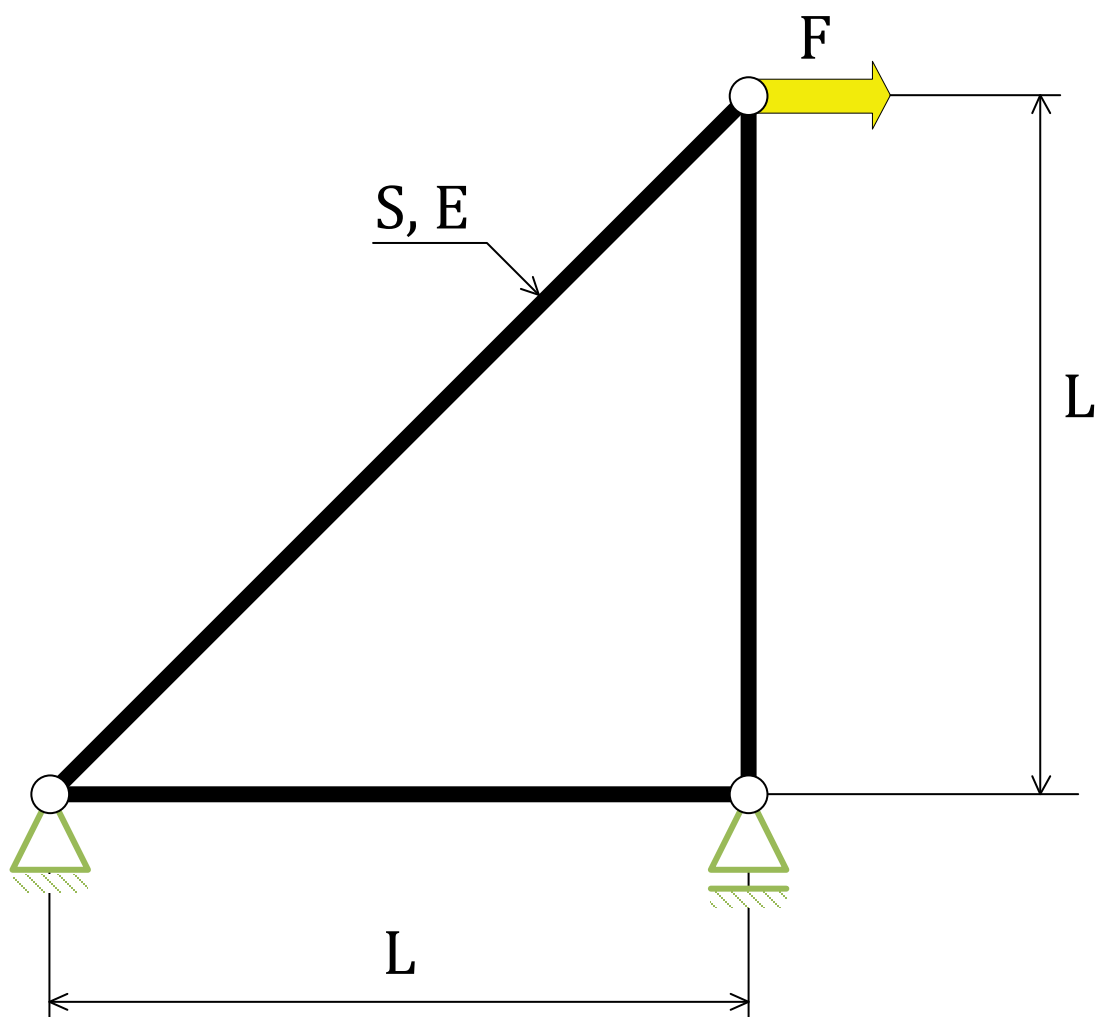
Pokud máme vše vztaženo ke globálnímu souřadnému systému, můžeme provést složení stejným způsobem jako v předchozí přednášce a provést potřebné výpočty. Z tohoto důvodu nebude tento krok probíráno detailněji.

1.3 UKÁZKOVÝ PŘÍPAD

V této kapitole ukážeme použití odvozených vztahů na jednoduché příhradové konstrukci, viz obrázek Obr. 5.

Vše potřebné pro aplikaci metody konečných prvků na základě přímého přístupu bylo ukázáno v předcházející kapitole. Tento postup obohatíme pouze o poznatky transformace z lokálního do globálního souřadného systému. Jinak postup zůstává stále stejný!



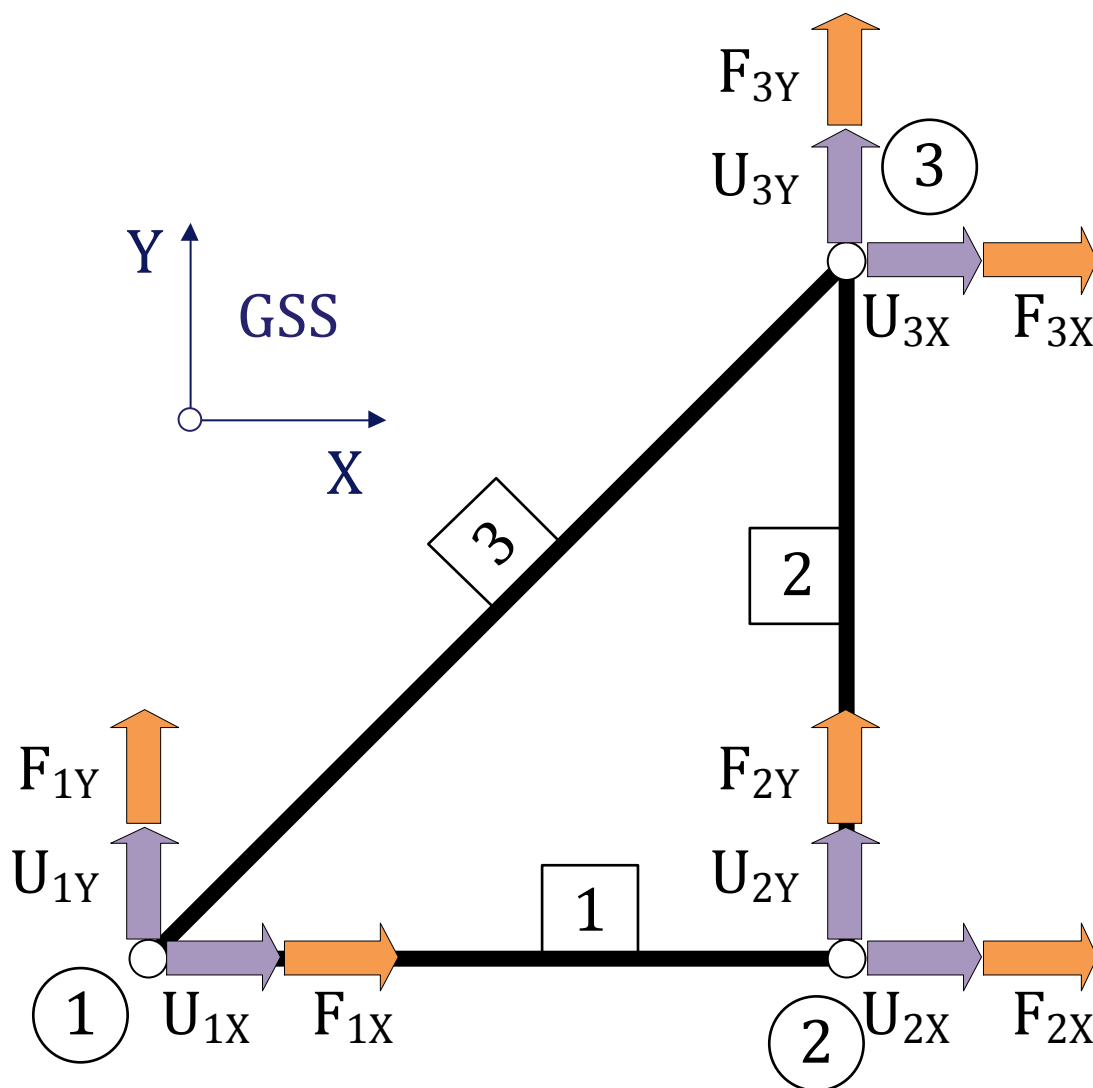


Obr. 5 - Jednoduchá prutová konstrukce (zadání)

Naším úkolem je vyřešit problém znázorněný na Obr. 5. Jedná se o jednoduchou prutovou konstrukci. Průřezy prutů a materiál všech prutů je stejný. Zadané hodnoty jsou:

L ... délka, S ... průřezy všech prutů, E ... modul pružnosti, F ... zatěžující síla.

Prvním krokem je diskretizace úlohy. V našem případě je to jednoduché, číslování uzlů a elementů je znázorněno, spolu s globálním souřadným systémem na obrázku Obr. 6.



Obr. 6 - Konečno-prvkový model prutové konstrukce

Dále platí, že:

$$L^{(1)} = L^{(2)} = L \quad (4.17)$$

$$L^{(3)} = \sqrt{2} \cdot L$$

$$S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = S$$

$$E^{(1)} = E^{(2)} = E^{(3)} = E$$

Pro tuhost jednotlivých prutů, s užitím vztahu (3.32), platí:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{ES}{L} \quad (4.18)$$

$$k^{(3)} = \frac{ES}{\sqrt{2} \cdot L}$$

Pro matice tuhostí jednotlivých prutů (transformovaných do GSS) použijme vztah (4.15), platí tedy:

Element č. 1, úhel $\alpha^{(1)} = 0^\circ$, pak:



$$[k]_G^{(1)} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Element č. 2, úhel $\alpha^{(2)} = 90^\circ$, pak:

$$[k]_G^{(2)} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Element č. 3, úhel $\alpha^{(3)} = 45^\circ$, pak:

$$[k]_G^{(3)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Provedením „expanze“ předchozích matic do rozměru globálního a využitím vztahu (3.22) můžeme získat výslednou matici tuhosti celé konstrukce:

$$[K] = \begin{bmatrix} k^{(1)} + 0,5k^{(3)} & 0,5k^{(3)} & -k^{(1)} & 0 & -0,5k^{(3)} & -0,5k^{(3)} \\ 0,5k^{(3)} & 0,5k^{(3)} & 0 & 0 & -0,5k^{(3)} & -0,5k^{(3)} \\ -k^{(1)} & 0 & k^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{(2)} & 0 & -k^{(2)} \\ -0,5k^{(3)} & -0,5k^{(3)} & 0 & 0 & 0,5k^{(3)} & 0,5k^{(3)} \\ -0,5k^{(3)} & -0,5k^{(3)} & 0 & -k^{(2)} & 0,5k^{(3)} & k^{(2)} + 0,5k^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Pro vektory posuvů jednotlivých elementů můžeme napsat, pro lepší orientaci, následující tabulku:

Číslo elementu	Uzly - GSS	Uzly - LSS	Stupně volnosti elementu vůči GSS	Stupně volnosti konstrukce vůči GSS	Silové parametry elementu vůči GSS	Silové parametry konstrukce vůči GSS
1	1	1	$u_{1X}^{(1)}$	U_{1X}	$f_{1X}^{(1)}$	F_{1X}
			$u_{1Y}^{(1)}$	U_{1Y}	$f_{1Y}^{(1)}$	F_{1Y}
	2	2	$u_{2X}^{(1)}$	U_{2X}	$f_{2X}^{(1)}$	F_{2X}
			$u_{2Y}^{(1)}$	U_{2Y}	$f_{2Y}^{(1)}$	F_{2Y}
2	2	1	$u_{1X}^{(2)}$	U_{2X}	$f_{1X}^{(2)}$	F_{2X}
			$u_{1Y}^{(2)}$	U_{2Y}	$f_{1Y}^{(2)}$	F_{2Y}
	3	2	$u_{2X}^{(2)}$	U_{3X}	$f_{2X}^{(2)}$	F_{3X}
			$u_{2Y}^{(2)}$	U_{3Y}	$f_{2Y}^{(2)}$	F_{3Y}
3	1	1	$u_{1X}^{(3)}$	U_{1X}	$f_{1X}^{(3)}$	F_{1X}
			$u_{1Y}^{(3)}$	U_{1Y}	$f_{1Y}^{(3)}$	F_{1Y}
	3	2	$u_{2X}^{(3)}$	U_{3X}	$f_{2X}^{(3)}$	F_{3X}
			$u_{2Y}^{(3)}$	U_{3Y}	$f_{2Y}^{(3)}$	F_{3Y}



Tab. 1 - Lokalizační tabulka daného případu

Vazební (kinematické) okrajové podmínky jsou dány, viz obrázky Obr. 5 a Obr. 6, takto:

$$U_{1X} = 0, U_{1Y} = 0, U_{2Y} = 0. \quad (4.23)$$

Výsledný vektor posunutí konstrukce (globální) má tedy tvar:

$$\{U\} = \{0, 0, U_{2X}, 0, U_{3X}, U_{3Y}\}^T. \quad (4.24)$$

Silové okrajové podmínky jsou dány, viz Obr. 5 a Obr. 6, takto:

$$F_{2X} = 0, F_{3X} = F, F_{3Y} = 0. \quad (4.25)$$

Výsledný vektor zatížení konstrukce (globální) má tedy tvar:

$$\{F\} = \{F_{1X}, F_{1Y}, 0, F_{2Y}, F, 0\}^T. \quad (4.26)$$

Řešením získáme pro posuvy, tj. primární proměnné, takto:

$$U_{2X} = 0, U_{3X} = F \frac{2k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}}, U_{3Y} = -\frac{F}{k^{(2)}} \quad (4.27)$$

Na základě těchto výsledků je možno dořešit další (sekundární) výsledky, jako jsou zkrácení tyčí, napětí, apod., viz příklad s osazenou tyčí.

Prvním krokem je provést zpětnou transformaci výsledku z globálního souřadného systému do systému lokálního každého elementu, viz Tab. 1. Užitím vztahů (4.7) lze provést transformaci z globálního souřadného systému do lokálního, získá se:

$$\{u\}_L^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(1)} \\ u_{1y}^{(1)} \\ u_{2x}^{(1)} \\ u_{2y}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\{u\}_L^{(2)} = \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(2)} \\ u_{1y}^{(2)} \\ u_{2x}^{(2)} \\ u_{2y}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{2X} \\ U_{2Y} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \frac{2k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}} \\ -\frac{F}{k^{(2)}} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\{u\}_L^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(3)} \\ u_{1y}^{(3)} \\ u_{2x}^{(3)} \\ u_{2y}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(U_{3X} + U_{3Y}) \\ \frac{1}{2}(U_{3Y} - U_{3X}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{k^{(3)}} \\ -F \frac{k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Prodloužení elementu lze dopočítat na základě vztahu (3.33) z minulé kapitoly. Upravme ho do podoby použitelné pro rovinný problém:

$$\Delta L^{(e)} = u_{2x}^{(e)} - u_{1x}^{(e)}. \quad (4.31)$$

Dále tedy platí, že:

$$\Delta L^{(1)} = u_{2x}^{(1)} - u_{1x}^{(1)} = 0, \quad (4.32)$$

$$\Delta L^{(2)} = u_{2x}^{(2)} - u_{1x}^{(2)} = F \frac{2k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}}, \quad (4.33)$$



$$\Delta L^{(3)} = u_{2x}^{(3)} - u_{1x}^{(3)} = \frac{F}{k^{(3)}}. \quad (4.34)$$

Dle vztahů (3.34) a (3.35) z minulé kapitoly lze dopočítat jednak přetvoření, jednak napětí:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\Delta L^{(1)}}{L} = 0, \quad (4.35)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\Delta L^{(2)}}{L} = \frac{F}{L} \frac{2k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}}, \quad (4.36)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{\Delta L^{(3)}}{\sqrt{2} L} = \frac{F}{\sqrt{2} L} \frac{F}{k^{(3)}}. \quad (4.37)$$

$$\sigma^{(1)} = E\varepsilon^{(1)} = 0, \quad (4.38)$$

$$\sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = \frac{FE}{L} \frac{2k^{(2)} + k^{(3)}}{k^{(2)}k^{(3)}}, \quad (4.39)$$

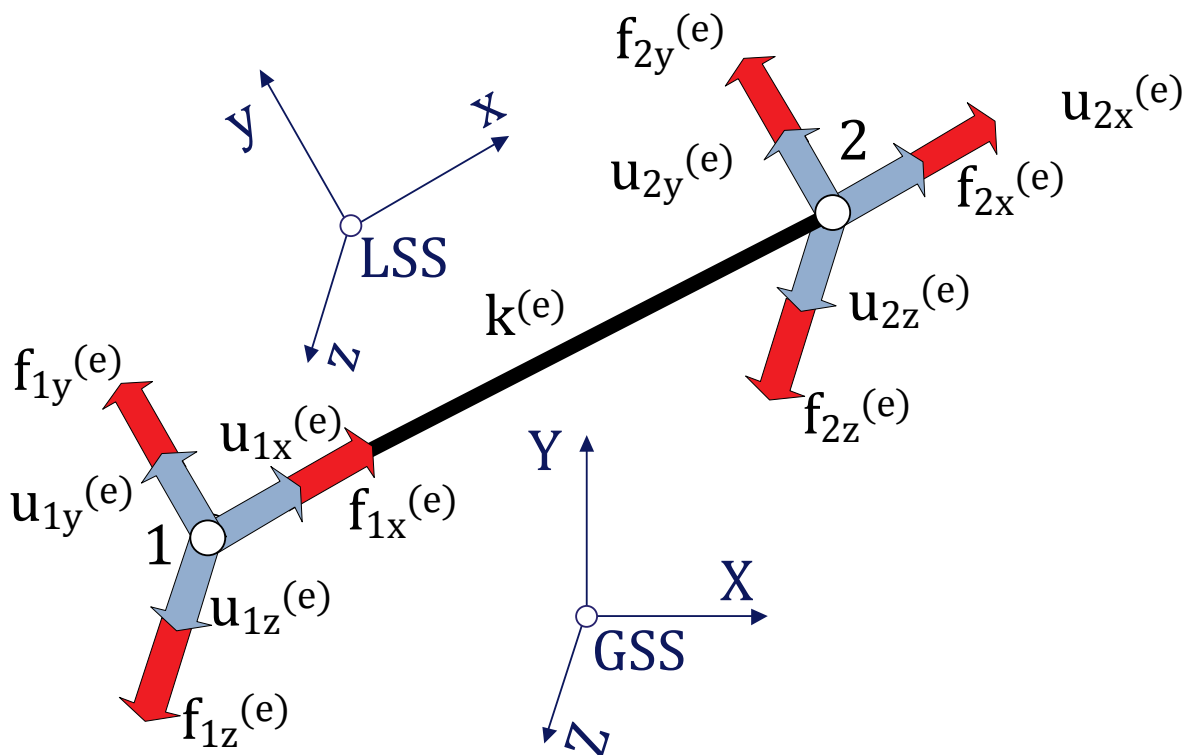
$$\sigma^{(3)} = E\varepsilon^{(3)} = \frac{FE}{\sqrt{2} L} \frac{F}{k^{(3)}}. \quad (4.40)$$

Těmito kroky jsme dořešili náš příklad.

1.4 ZOBECNĚNÍ PRO PROSTOROVÉ ÚLOHY

Uvažme tyčový element, který je umístěný v trojrozměrném prostoru, dle Obr. 7.





Obr. 7 - Prostorový tyčový prvek

Element má dva koncové uzly, v každém jsou předepsány tři posuvy (stupně volnosti) a k nim náležící síly. Vektory uzlových posuvů je:

$$\{u\}^{(e)} = \{u_{1x}^{(e)}, u_{1y}^{(e)}, u_{1z}^{(e)}, u_{2x}^{(e)}, u_{2y}^{(e)}, u_{2z}^{(e)}\}^T, \quad (4.41)$$

a vektor uzlových sil je možno zapsat ve tvaru:

$$\{f\}^{(e)} = \{f_{1x}^{(e)}, f_{1y}^{(e)}, f_{1z}^{(e)}, f_{2x}^{(e)}, f_{2y}^{(e)}, f_{2z}^{(e)}\}^T. \quad (4.42)$$

Využitím obdobného postupu, jako v případě rovinné prutové úlohy, lze získat následující matici tuhosti taženého nebo tlačného elementu ve tvaru:

$$[k]_G^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

V předcházející rovnici byly použity následující substituce:

$$c_x = \cos(\alpha_x^{(e)}) \quad (4.44)$$

$$c_y = \cos(\alpha_y^{(e)})$$

$$c_z = \cos(\alpha_z^{(e)})$$



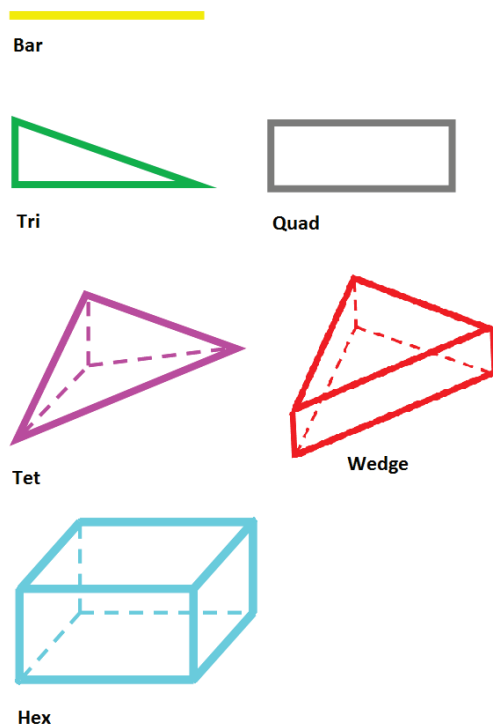
kde úhly $\alpha_x^{(e)}, \alpha_y^{(e)}, \alpha_z^{(e)}$ jsou úhly mezi osami globálního a lokálního souřadného systému. Použití předchozích vztahů, je formálně úplně stejné jako v případě rovinné úlohy prutových konstrukcí.



1.5 CVIČENÍ

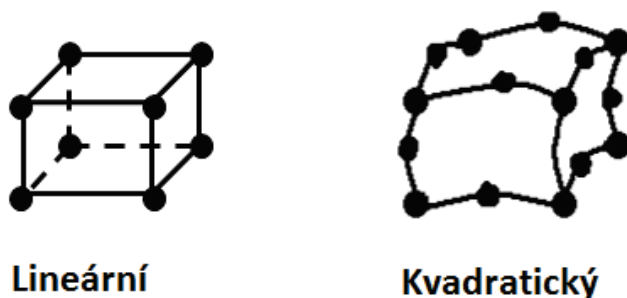
Možnosti síťování základní – mesh seed, 1D, 2D 3D síť

Přístup k funkcím pro vytváření a editaci sítě konečných prvků jsou skryty v aplikačním menu v záložce „Meshing“. Konečnoprvkový model součásti či systému je matematická reprezentace, která reprezentuje součást či systém pomocí malých, jednoduše tvarovaných entit, které jsou nazývány konečné prvky. Obecněji o MKP viz úvodní kapitoly. Konečné prvky mohou mít různý tvar, podle toho na jakou reprezentaci se mají použít. Základní tvary a názvy používané v Patranu jsou znázorněny na obrázku Obrázek 5.1.



Obrázek 5.1 - Základní tvary prvků

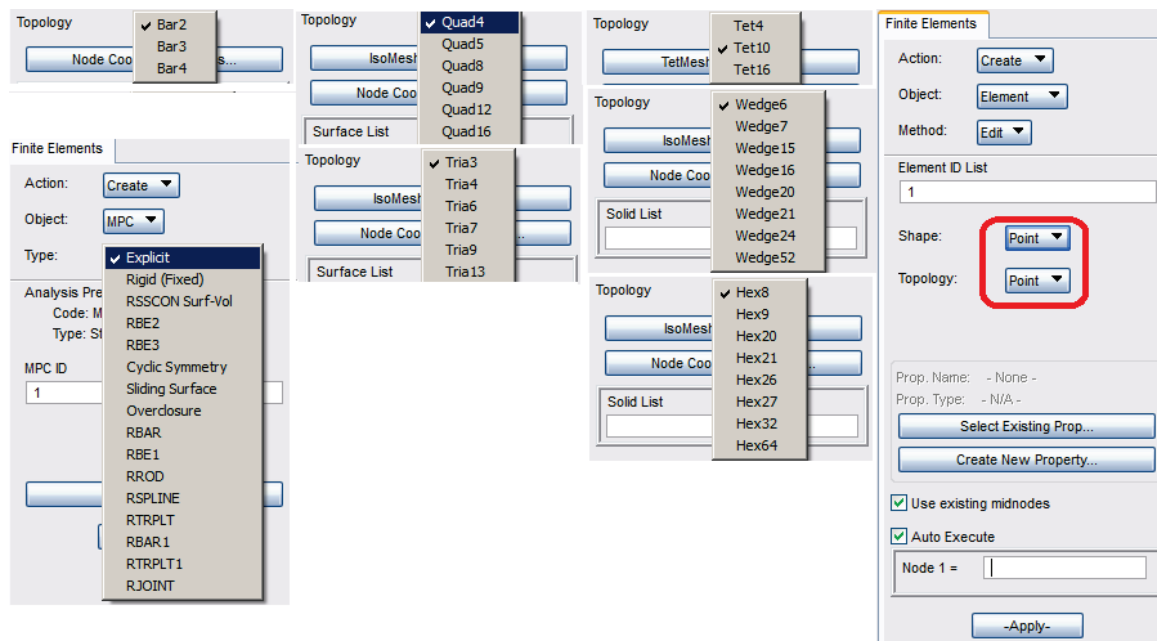
Kromě tvaru se ještě rozeznávají prvky s lineární či kvadratickou aproximací. Prvky, které mají pouze uzly v rozích, jsou lineární, prvky které mají tzv. meziuzly (uzly umístěné např. uprostřed hrany či plochy) jsou kvadratické.



Obrázek 7.2 – Lineární vs. kvadratické prvky

V názvu se počet uzlů projeví číslem za názvem prvku např. Bar2. Kromě výše uvedených typů existují ještě další – speciální typy prvků, například hmotný bod (Point), MPC.





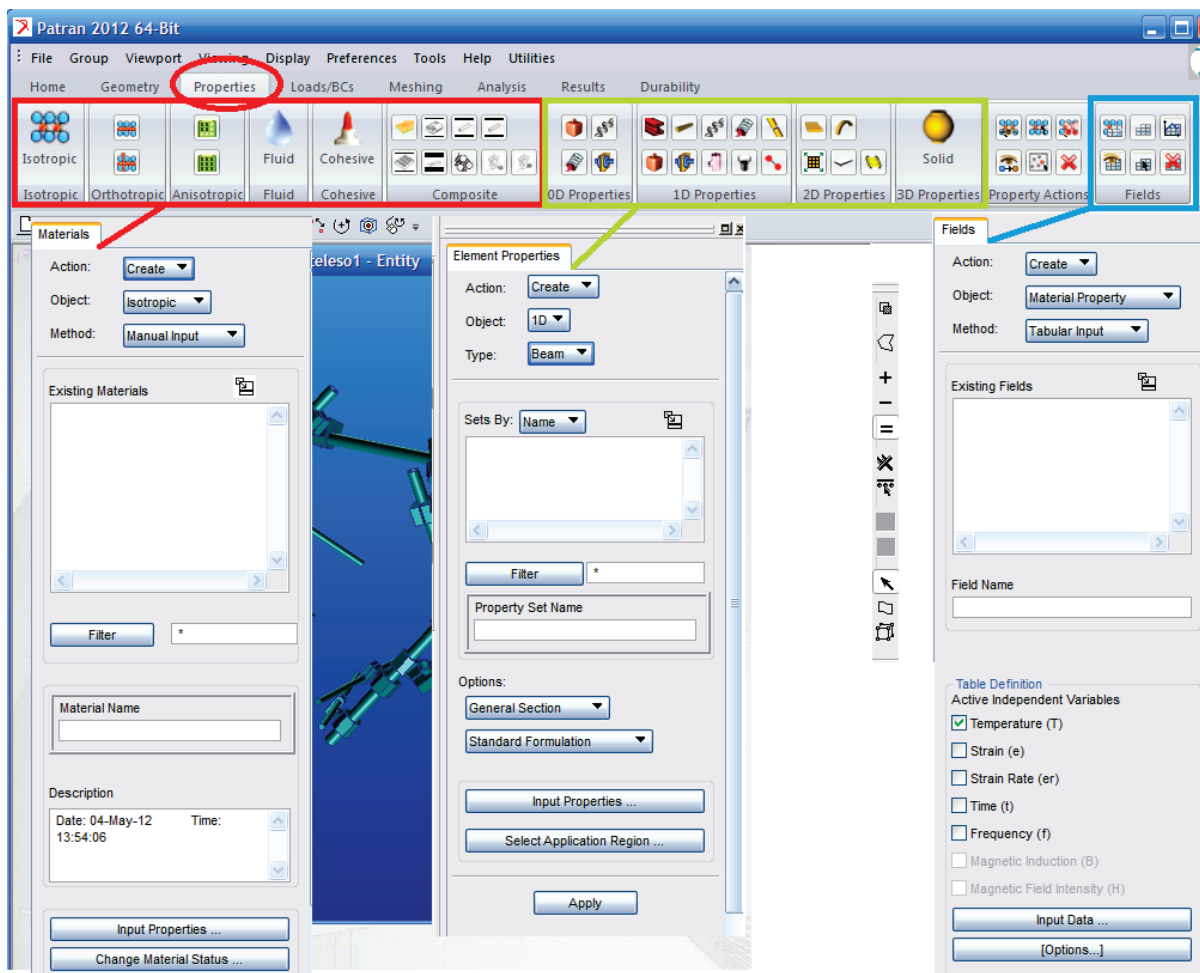
V Nastranu typy a vlastnosti jednotlivých elementů můžeme získat z manuálu, který je dodáváný s řešičem. (U programu Patran na počátku práce vybíráme řešič). V případě tohoto produktu se jedná o dokumentaci v manuálech, které jsou dodány přímo v instalaci, s názvy „Guick Reference Guide“, „Getting Started User’s Guide“ a „Linear Static User’s Guide“. Zde jenom uvedme nejzákladnější, často užívané, elementy, viz Tabulka 7.2.

Kategorie	Pružina	1D Elementy	2D Elementy	3D Elementy	Tuhé (Rigid) Elementy
Fyzikální chování	Jednoduchá pružina	Tyčový nebo nosníkový element	Tenká deska, skořepina, membrána	Trojrozměrné pružné těleso	Absolutně tuhé tyče
Jméno v Nastranu	CELAS2	CONROD CROD CBAR	CQUA4 CTRIA3	CHEXA CPENTA CTETRA	RBE2
Vlastnosti	Nejsou potřebné	PROD PBAR	PSHELL	PSOLID	Nejsou potřebné
Obrázek					

Tabulka 7.1 – Základní typy elementů v programu Nastran

Kromě tvaru musí být u elementu popsány jeho fyzikální vlastnosti. To je zadáváno pomocí vlastností („Properties“) viz obr.4.



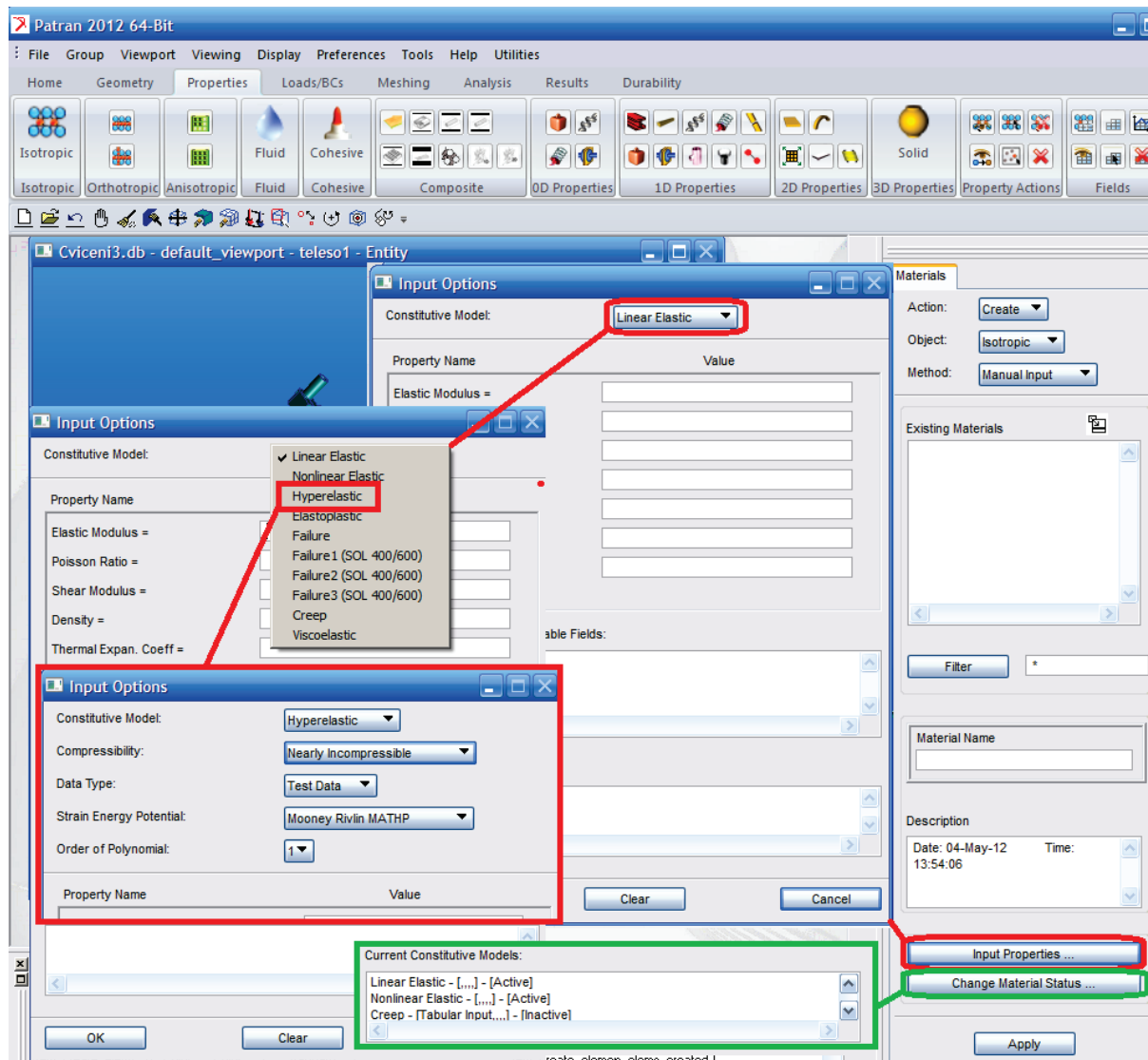


Obr. 4 Zadávání vlastností - properties

V záložce Properties najdeme tři různé nabídky:

- Materials – volíme materiálové vlastnosti, ze kterých skládáme „materiál“ pro výpočet.
 - Isotropic – materiál isotropní – v tomto předmětu budeme používat pouze tento materiálový model. Po výběru Input Properties přejdeme do nabídky, ve které již zadáváme materiálové parametry pro příslušné konstituční rovnice (Constitutive model). Pro Lineárně elastické chování materiálu jsou to: **modul pružnosti v tahu** (Elasti Modulus – musí být vyplněno), **Poissonovo číslo** (Poisson Ratio – musí být vyplněno), modul pružnosti ve smyku (Shear Modulus – nemusí být vyplněno), hustota (Density – nemusí být vyplněno), koeficient teplotní roztažnosti, atd. V některých případech zde vybíráme tabulku – například závislost modulu pružnosti v tahu na teplotě (tabulku musíme předem definovat). Další konstituční rovnice – modely vyžadují samozřejmě jiné parametry, křivky napětí – deformace, nebo doplnění popisu konstitučního modelu apod. Materiál může obsahovat několik materiálových modelů, které popíší jeho chování v požadované oblasti (lineární, nelineární, creep ..) Výpočet provádíme s materiálovým modelem, který je aktivní (Active, Inactive) viz obr.5 (zvýrazněno zeleně).





Obr. 5 Nastavení materiálových parametrů

- Orthotropic – 2D, 3D – ortotropní materiál (v tomto předmětu nebudeme řešit).
- Anisotropic - 2D, 3D – anisotropní materiál (v tomto předmětu nebudeme řešit).
- Fluid (v tomto předmětu nebudeme řešit).
- Cohesive (v tomto předmětu nebudeme řešit).
- Composite (v tomto předmětu nebudeme řešit).
- Element properties – volíme vlastnosti elementu – např. plochu průřezu u nosníkových prvků, tloušťku u skořepin atd.
 - 0D – Parametry se týkají 1 vybraného uzlu.
 - Mass – definice hmotného bodu.
 - Grounded Spring – definice tuhosti (pružiny), jedna strana je na uzlu, druhá na rámu (pevný bod). Tuhost zadáváme ve směru os, nebo torzní.
 - Grounded Dumper – definice tlumení (tlumiče), definice je obdobná jako u pružiny.
 - Grounded Bush – umožňuje definovat složitější případy tuhosti a tlumení.
 - 1D – parametry se týkají 1 rozměrných typů elementů.



- Beam – definice nosíkových prvků.
- Rod – definice tyčových prvků.
- Spring – definice pružin (mezi 2 uzly).
- Dumper – definice tlumičů (mezi 2 uzly).
- Atd.
- 2D – parametry se týkají 2 rozměrných typů prvků
 - Shell – (skořepina)
 - 2D solid – (rovinná napjatost, rovinná deformace)
 - Membrane – membránová napjatost (bezmomentová)
 - Bending panel
 - Shear panel
- 3D – parametry se týkají 3 rozměrných typů prvků
 - Solid
- Property Action – slouží k úpravám (Materials, Element properties)
- Fields – (pole) slouží k vytváření, prohlížení a úpravě tabulek.

V programu Patran se dá síť konečných prvků vytvářet třemi způsoby:

- **Automatická generace sítě** – při tomto způsobu se využije automatický generátor sítě, který vytvoří síť na základě geometrického modelu. Vhodným nastavením parametrů generátoru se dosahuje určité hustoty a kvality sítě.
- **Manuální tvorba sítě**, tj. manuálně se vytvoří uzly a na nich se vytvoří elementy. Tento postup je poměrně náročný a hodí se spíše pro menší úlohy. Příkladem kdy je možno využít tento postup je modelování příhradových soustav, popřípadě rámových konstrukcí.
- **Kombinace předchozích způsobů** – příkladem může být například vytváření speciálních prvků na již generovaném modelu, např. tvorba tzv. rigid prvků, nebo manuální úprava vygenerované sítě.

Automatická generace sítě

Obecný postup při tvorbě sítě, při automatické generaci, je možno rozdělit do následujících kroků:

- Vytvoří se, nebo se importuje geometrie. Při importu se dále vyčistí nepotřebné části (např. malá sražení, otvory, atd., tedy z pohledu výpočtu nepodstatné části).
- Zvolí se topologie elementu (např. čtyřstěn, lineární, kvadratický, aj.).
- Vybere se typ síťovacího algoritmu („mesher“, např. Paver)
- Nastaví se parametry sítě (např. velikost elementu, pokrytí oblouků, atd.)
- Proveďte vlastní síťování. Pokud vzniklá síť (na kvalitě sítě záleží přesnost výsledků) nesplňuje podmínky, může se celý proces od bodu 2. opakovat až do dosažení požadované hustoty a kvality sítě.

V případě automatická generace sítě jsou v programu dostupné různé typy automatických generátorů sítí. Jednotlivé generátory mají svoje výhody a nevýhody a dále pak jsou zde



omezení, kdy lze jednotlivé generátory použít. V programu jsou dostupné následující algoritmy pro tvorbu sítě:

IsoMesh (pro tvorbu mapované sítě) – 1D, 2D, 3D síť. Vhodný pro síťování všech parametrických entit, tj. křivek (žlutá), jednoduchých ploch (zelená) a objemů (modrá). Jestliže je geometrie neparametrická nelze tento algoritmus použít.

Paver – 2D síť. Je použitelný na jakoukoliv plochu tedy jak na jednoduchou (zelenou), tak na komplexní (fialovou). Algoritmus začíná při vytváření sítě na hranách a směřuje směrem do středu plochy.

Hybrid – 2D síť. Obdobně jako Paver algoritmus, ale většinou vytváří lépe strukturovanou síť. Třeba konkrétně vyzkoušet.

TetMesh – 3D síť. Použitelný na jakýkoliv typ objemu (bílý, modrý). Generuje síť tvořenou čtyřstěny (tetraedry). Využívá se tzv. Delauney algoritmus. Vytváření sítě je v následujících krocích: nejprve se vytvoří síť na povrchu (pomocí hybridního postupu, viz výše) a pak se generují z takovýchto prvků prvky do prostoru (objemu). Jedná se o robustní a rychlý algoritmus.

Sweep mesh – 2D, 3D síť. Jedná se o metodu vytahování entit. Z jednorozměrné entity při vytahování vzniká entita dvourozměrná, z dvourozměrné entity pak entita trojrozměrná. Pomocí tohoto postupu se dají vytvářet velmi dobré sítě. Existuje několik možností vytahování (ve směru normály, rotace, podél křivky, atd.).

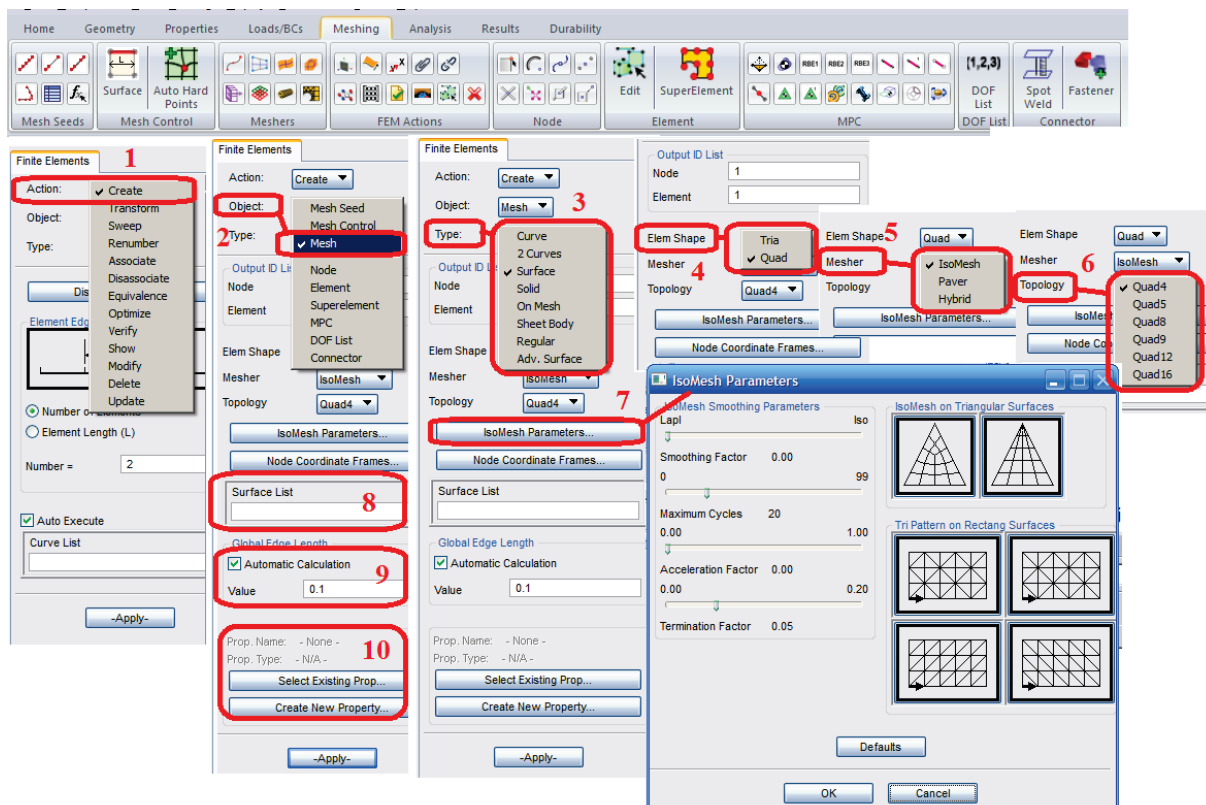
Kromě těchto technik existují i následující postupy na generování sítí (převážně techniky generace sítě na plochách):

- Mesh on mesh,
- Sheet body,
- Advance surface, atd.

Jak již bylo zmíněno výše je možno také vytvářet síť přímo, tj. vygenerovat přímo uzly a mezi ně umístit příslušné prvky. Pro generování praktických úloh není tento způsob příliš vhodný. Naopak někdy je potřeba manuálně upravit polohu uzlů sítě. Pro tento způsob úpravy sítě poskytuje Patran dostatek funkcí.

Přístup k funkcím pro vytváření a editaci sítě jsou skryty v aplikačním menu v záložce „**Meshing**“, viz Obrázek 7.15.





Obrázek 7.3 – Nabídka funkcí pro vytváření sítě

Základní nabídku pro automatické vytváření sítě najdeme pod záložkou Create/Mesh. Dále vybíráme typ entity, kterou chceme vysítovat. Najdeme zde základní entity (Type) - Curve, Surface, Solid. Síť můžeme vytvářet také na základě již vytvořené sítě (On Mesh).

Dále pokračujeme výběrem tvaru elementu (Elem Shape), typu mesheru (Mesher) a počtu uzlů (Topology). Jednotlivé meshery mohou obsahovat další nastavení např. IsoMesh Parameters. Volbu Node Coordinate Frames použijeme např. při výpočtu ve válcovém (cylindrickém) souřadném systému.

Musíme samozřejmě také vybrat entitu, kterou chceme vysítovat. V našem příkladu je to Surface List (Curve List, Volume List pro jiný typ entity). K výběru můžeme použít myš, selekční filtr nebo grupy.

Následuje nastavení velikosti elementu (Global Edge Length). Defaultně je přednastavena automatická volba (Automatic Calculation). Po odvybrání této nabídky můžeme zvolit „Value“, což je délka reprezentující délku strany elementu se kterou bude provedeno vysítování.

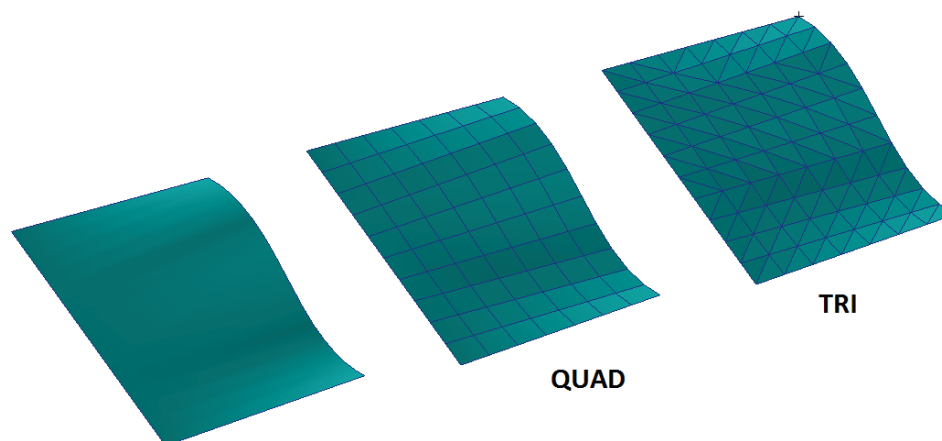
V poslední části vybíráme vlastnosti elementu (Properties) a to výběrem z již vytvořených (Select Existing Prop...), nebo založením nové vlastnosti (Create New Property...).

Nakonec výběr potvrdíme tlačítem Apply.

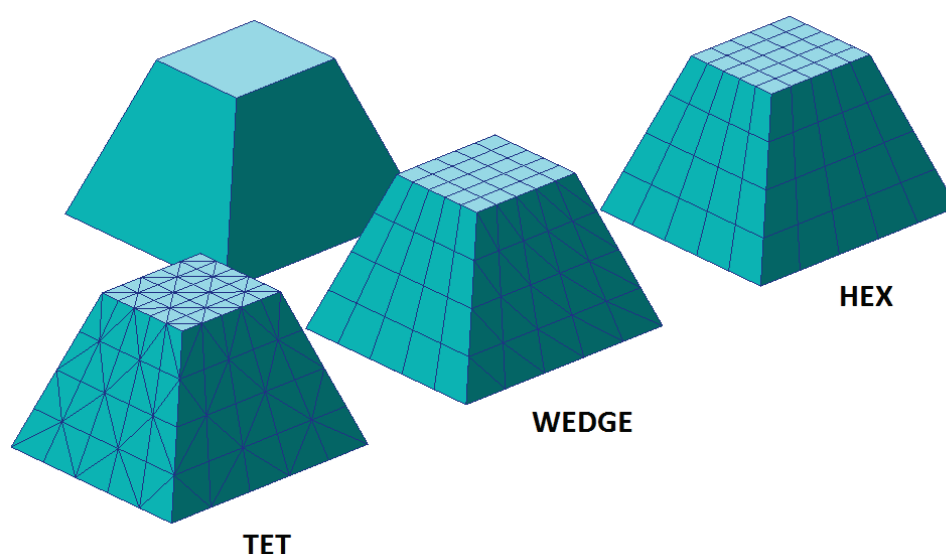
1.5.1.1 IsoMesh

IsoMesh (pro tvorbu mapované sítě) – 1D, 2D, 3D síť. Vhodný pro síťování všech parametrických entit, tj. křivek (žlutá), jednoduchých ploch (zelená) a objemů (modrá). Jestliže je geometrie neparametrická nelze tento algoritmus použít (při síťování se objeví chyba).





Obrázek 7.4 – IsoMesh na parametrické ploše (jednoduché, zelené). Byly použity prvky s topologií QUAD a TRI



Obrázek 7.5 – IsoMesh na jednoduchém objemu (modrý). Je možno použít prvky s topologií TET, WEDGE a HEX

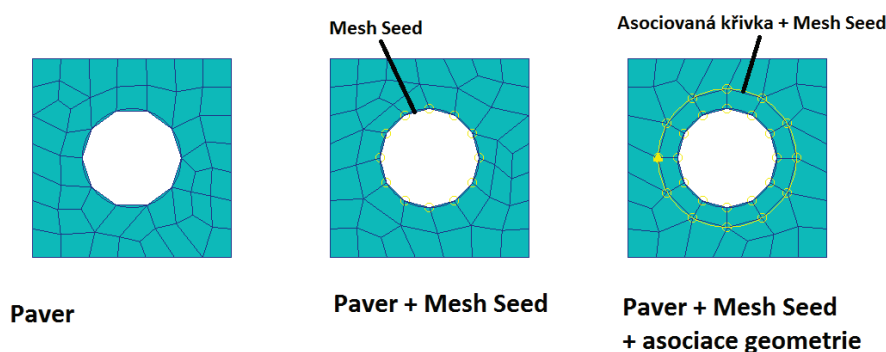
Pokud není základní geometrie parametrická (tedy jednoduchá plocha nebo jednoduchý objem) je nutno tuto geometrii upravit pro použití IsoMesh způsobu síťování. Možná úprava pro dvojrozměrnou úlohu je vidět na následujícím obrázku. Obdobně lze postupovat v případě prostorových úloh. V některých případech lze neparametrické entity převést na parametrické (Geometry/Edit/Curve, Surface, Solid/Refit). Převést lze pouze jednoduché plochy.



Obrázek 7.6 – Použití techniky IsoMesh pro neparametrickou plochu

1.5.1.2 Paver

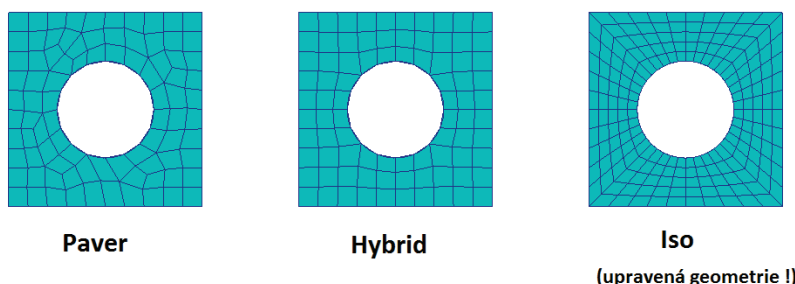
Slouží pouze generování sítě na plochách, nelze použít pro generování objemových prvků. Je použitelný na jakoukoliv plochu tedy jak na jednoduchou (zelenou), tak na komplexní (fialovou). Algoritmus začíná při vytváření sítě na hranách a směřuje směrem do středu plochy.



Obrázek 7.7 – Použití techniky Paver a ovlivnění pomocí nastavení hustoty dělení (Mesh Seed) a použitím asociované geometrie.

1.5.1.3 Hybrid

Stejně jako předchozí postup, lze hybridní síťář použít pouze pro generování sítě na plochách a to jak rovinných tak prostorových. Síť je vytvářena obdobně jako u Paver algoritmus, ale většinou vytváří lépe strukturovanou síť. Nutno konkrétně vyzkoušet. Při použití hybridního algoritmu není možno použít asociovanou geometrii (obdobně nelze využít u IsoMesh techniky). Asociovaná geometrie je ignorována.



Obrázek 7.8 – Porovnání technik Paver, Hybrid a IsoMesh. Byla volena stejná velikost elementů. Při IsoMesh technice musela být plocha rozdělena na parametrické plochy (viz výše).

1.5.1.4 TetMesh

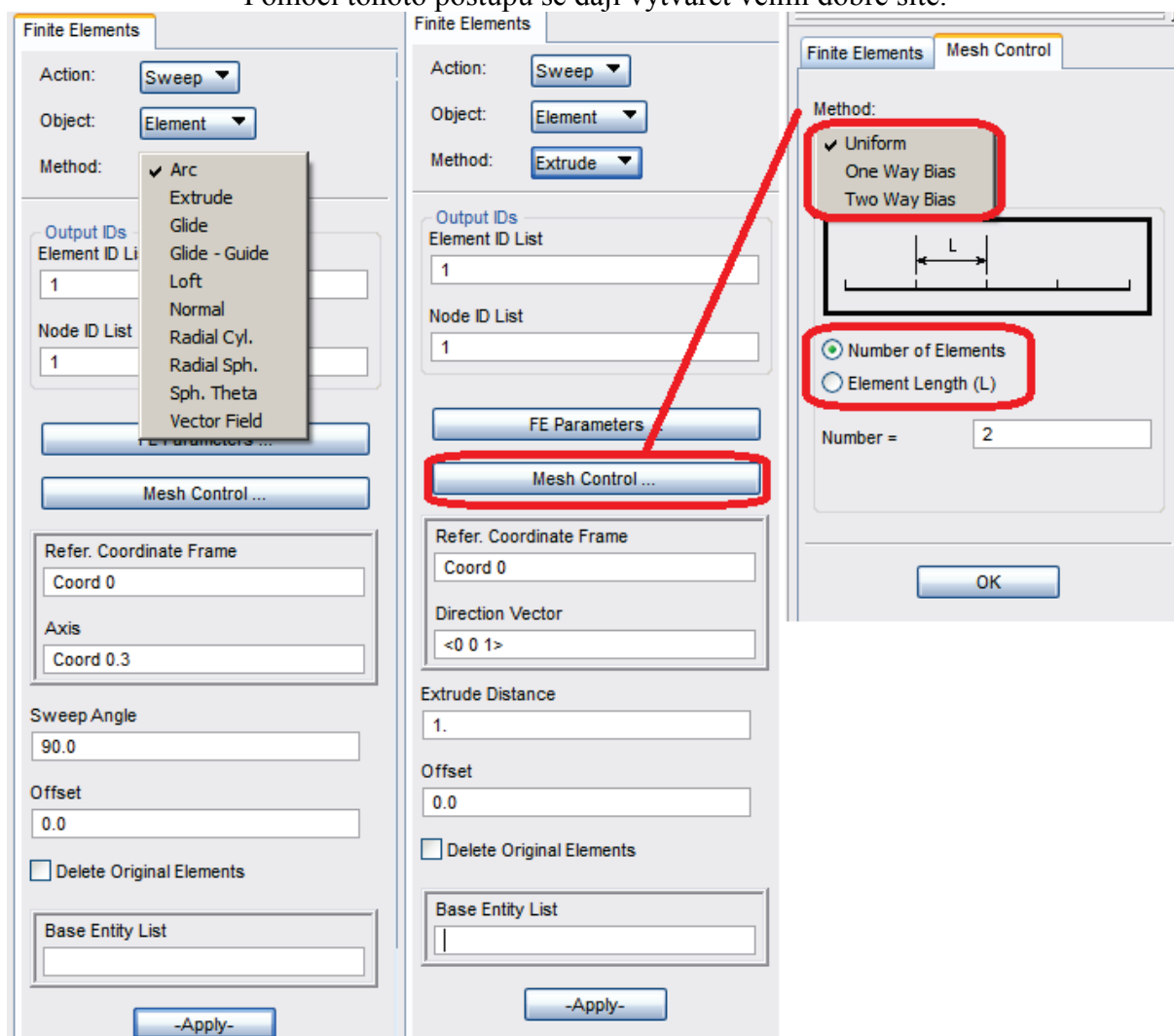
Využívá se pro automatickou generaci objemových prvků. Použitelný na jakýkoliv typ objemu (bílý, modrý). Generuje síť tvořenou čtyřstěny (tetraedry). Využívá se tzv. Delauney algoritmus. Vytváření sítě je v následujících krocích: nejprve se vytvoří síť na povrchu (pomocí hybridního postupu, viz výše) a pak se generují z takovýchto prvků prvky do prostoru (objemu). Jedná se o robustní a rychlý algoritmus. Ukázka této techniky byla ilustrována v úvodním příkladu při řešení napjatosti smykového snímače, viz výše.

1.5.1.5 Sweep mesh

Použitelný pro 2D a 3D sítě. Jedná se o metodu vytahování entit. Z jednorozměrné entity při vytahování vzniká entita dvourozměrná, z dvourozměrné entity pak entita trojrozměrná.



Pomocí tohoto postupu se dají vytvářet velmi dobré sítě.



Obr. 4 Sweep mesh – základní možnosti

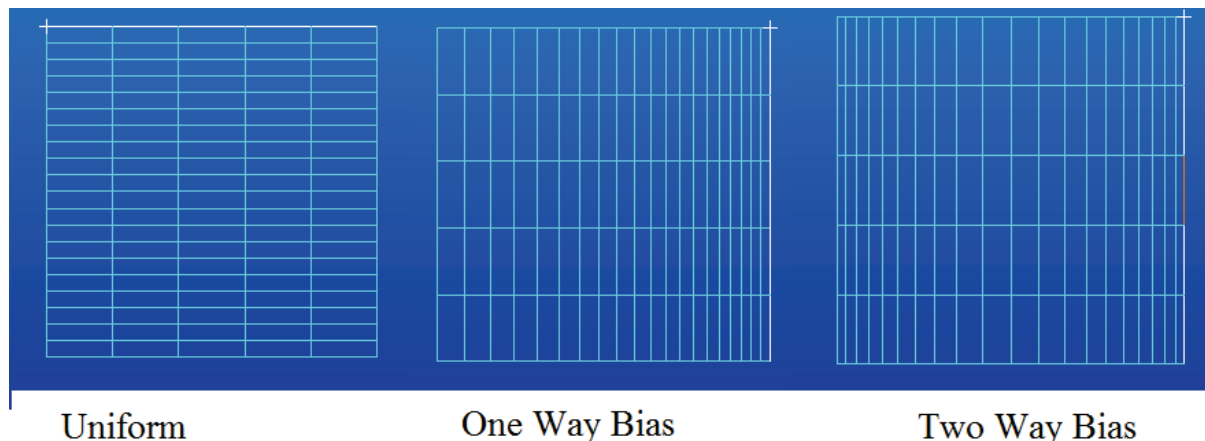
Existuje několik možností vytahování:

- Arc – vytážení rotací okolo osy
- Extrude – vytážení podél přímky (na základě definovaného vektoru)
- Glide – vytážení podél křivky
- Glide – Guide – vytážení podél křivky, větší možnosti nastavení.
- Loft – vytvoření sítě mezi dvěma skupinami elementů.
- Normal – vytážení ve směru normály
- Radial Cyl. – Vytážení ve směru radiálním v cylindrickém (válcovém) souřadném systému
- Radial Sph. – Vytážení ve směru radiálním ve sférickém (kulovém) souřadném systému.
- Sph. Theta – Vytážení ve směru úhlu ve sférickém (kulovém) souřadném systému.
- Vector Field – Vytážení ve směru pole vektorů, pole je definováno v uzlech bazových elementů.



Důležitým nastavením ve Sweep formuláři je Mesh Control. Umožňuje nastavení velikosti elementu (Element Length) nebo počtu dělení (Number of Elements). Dále pak způsobu rozdělení – hustoty elementů po délce vytahování (Method):

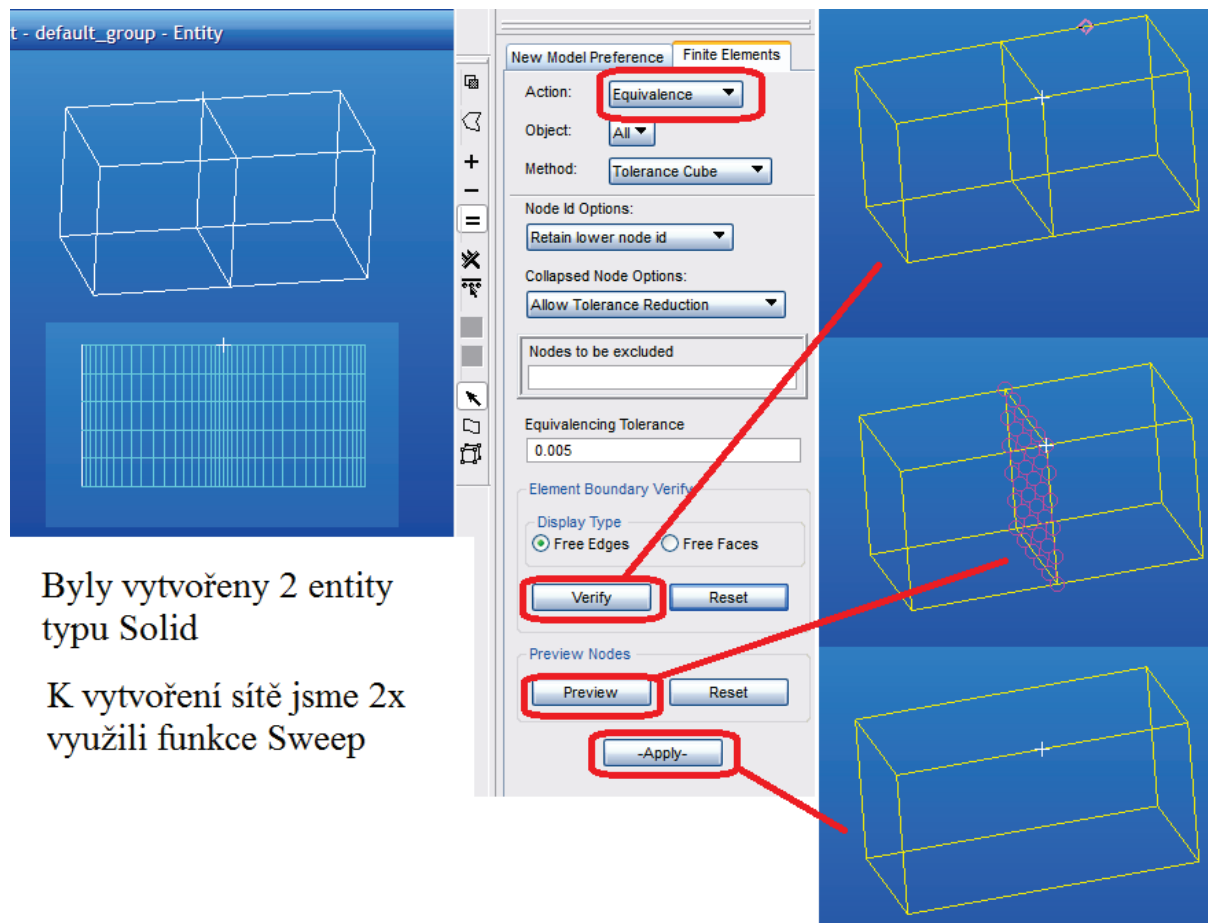
- Uniform – celý úsek je rozdělen na stejné intervaly
- One Way Bias – rozdělení je zhuštěno k jedné, vybrané straně.
- Two Way Bias – rozdělení je zhuštěno ke středu, nebo od středu k okrajům.



Obr. Způsoby rozdělení sítě u příkazu Sweep

Původní elementy musíme po vytažení (Sweep) smazat. Nejjednodušší je zapnout volbu Delete Original Elements, elementy se vymažou při provádění příkazu.

Při vytahování složitějších těles u sítí, které na sebe navazují, se mohou vytvořit duplicitní uzly. Ke kontrole duplicitních uzlů je možno použít funkci „Equivalence“. Kontroluje se síť konečných prvků – kontrolujeme (Verify) volné hrany (Free Edges) nebo volné plochy (Free Faces). V případě, že u dvou objemových těles (Solid) se po vytvoření sítě vytvoří nespojitost (volné plochy nebo hrany) zobrazí se při verifikaci. Pomocí tlačítka „Preview Nodes“ se zobrazí uzly, které jsou blíže než je zvolená „Equivalencing Tolerance“. Tlačítko „Apply“ sloučí a smaže přebytečné uzly a tím odstraní nespojitost. Pro nový výběr a kontrolu použijte tlačítko „Reset“. Výběr kontrolované sítě provádíme pomocí selekce (Object – All, Group, List). Zvolíte-li příliš velkou toleranci, program sloučí i uzly, které nemají být sloučeny - což obvykle znehodnotí síť.

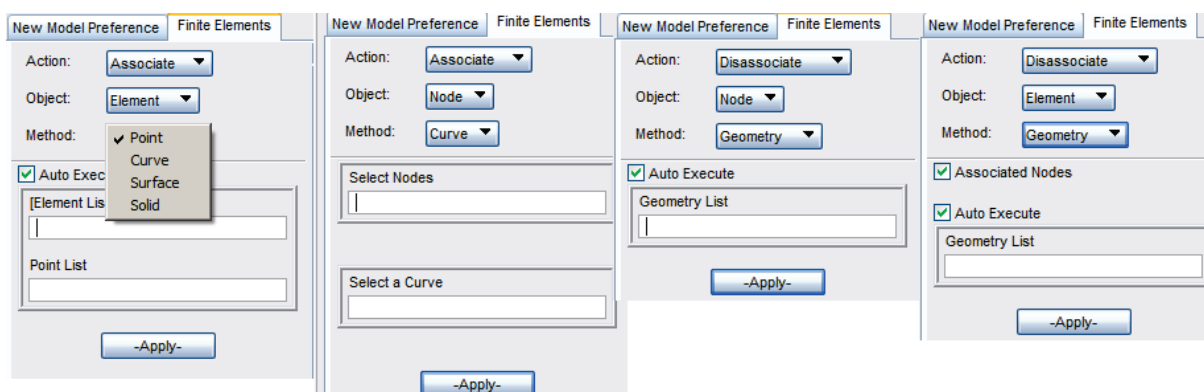


Byly vytvořeny 2 entity
typu Solid

K vytvoření sítě jsme 2x
využili funkce Sweep

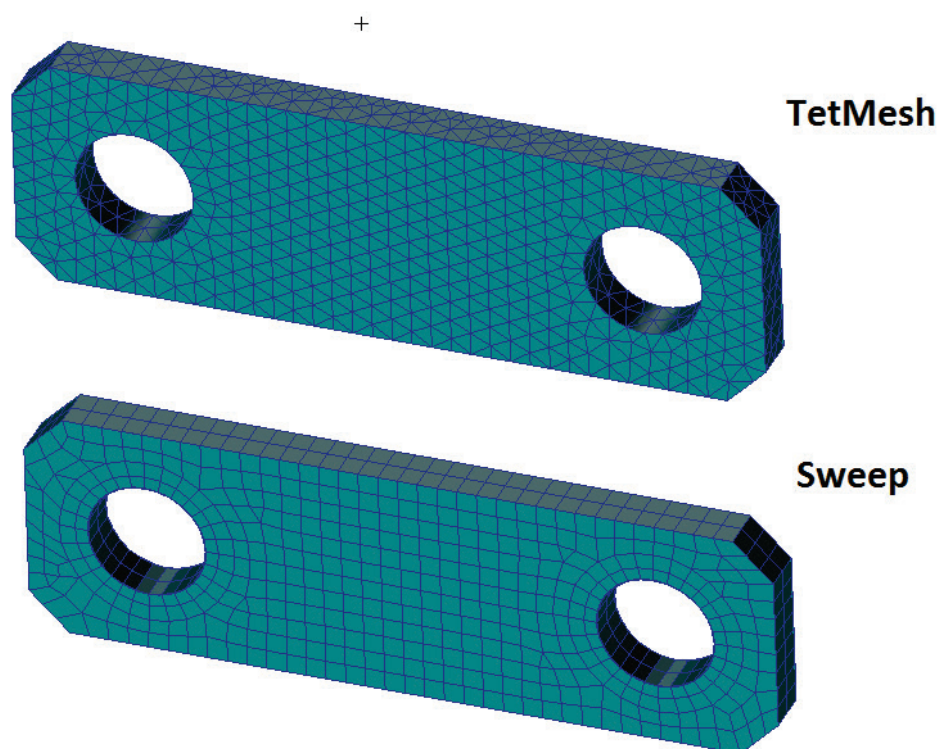
Obr. Sloučení uzlů

Při vytahování nejsou vzniklé elementy asociovány s geometrií. Pokud se zadávají okrajové podmínky, popř. vlastnosti na geometrické entity, je nutno provést dodatečnou asociaci prvků s geometrií. Asociace se provádí pomocí příkazu „Associate“. Potřebuje-li se oddělit síť od geometrie je toho možno dosáhnout funkcí „Disassociate“.



Obr. Sloučení geometrie a sítě konečných prvků

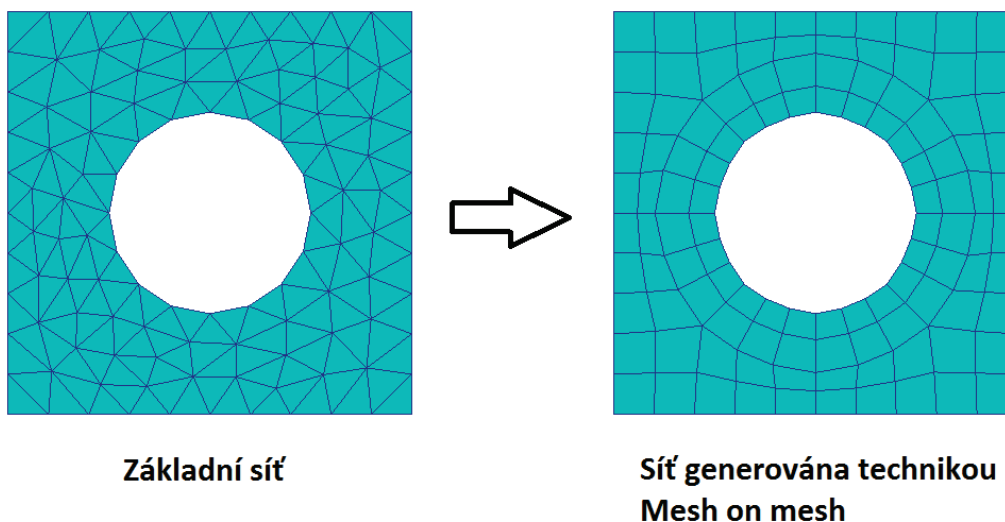




Obrázek 7.9 – Síť vytvořená pomocí TetMesh a pomocí Sweep techniky

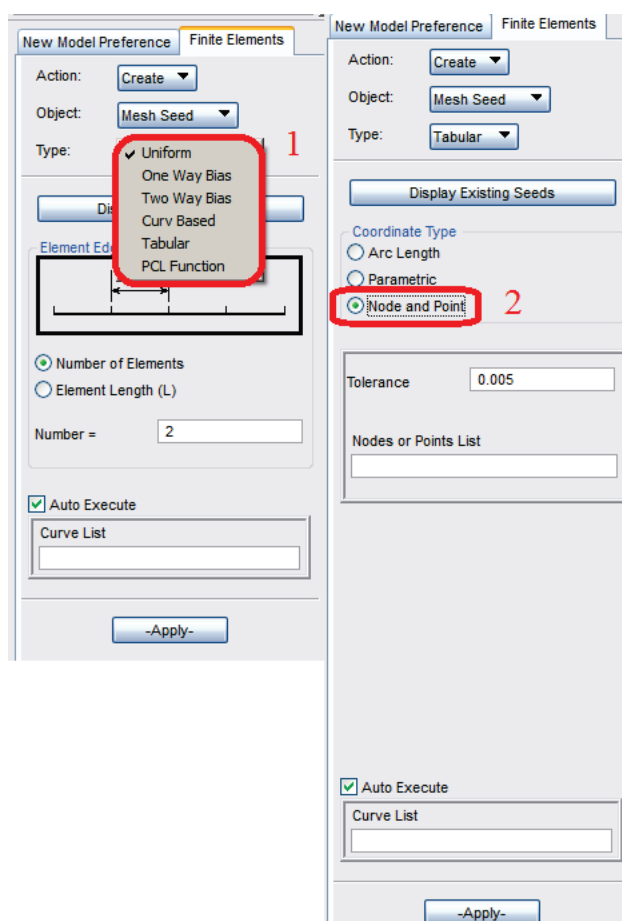
Pro pokrytí stejné oblasti pomocí TET prvků (čtyřstěnů) se potřebuje mnohem více prvků než v případě pokrytí řešené oblasti prvky ve tvaru HEX (krychle), popř. WEDGE (klíny). Při vytváření sítě se dává přednost HEX prvkům (krychličky) před prvky tvaru WEDGE (klíny). Obdobně se dává přednost prvkům WEDGE (klíny) před prvky TET (čtyřstěny). Co se týče volby, jestli se jedná o lineární nebo kvadratické prvky, je jasno u TET prvků, ty se využívají ve variantě s meziuzly, protože lineární varianta nedává dobré výsledky. Naproti tomu výsledky s prvky HEX jsou dostatečně přesné v obou dvou variantách. U lineárních prvků je však obvykle potřeba větší hustota sítě na stejně velké oblasti.

Výše byly zmíněny i další techniky Mesh on mesh, Sheet body, Advance surface, atd. Tyto techniky slouží ke generování dvojrozměrných prvků. Zmíníme se zde i o technice Mesh on mesh. Při této technice se vygeneruje libovolná síť a po té se vezme za základ pro vygenerování nové sítě. Takto vytvořená síť již není vázána na původní plochy a může se dosáhnout velmi dobrých výsledků. Ukázka tohoto přístupu je zobrazena na následujícím obrázku. Opět, pokud to je potřeba se dá vytvořená síť asociovat s původními plochami, na kterých byla vygenerována původní síť.



Obrázek 7.10 – Ukázka techniky Mesh on mesh

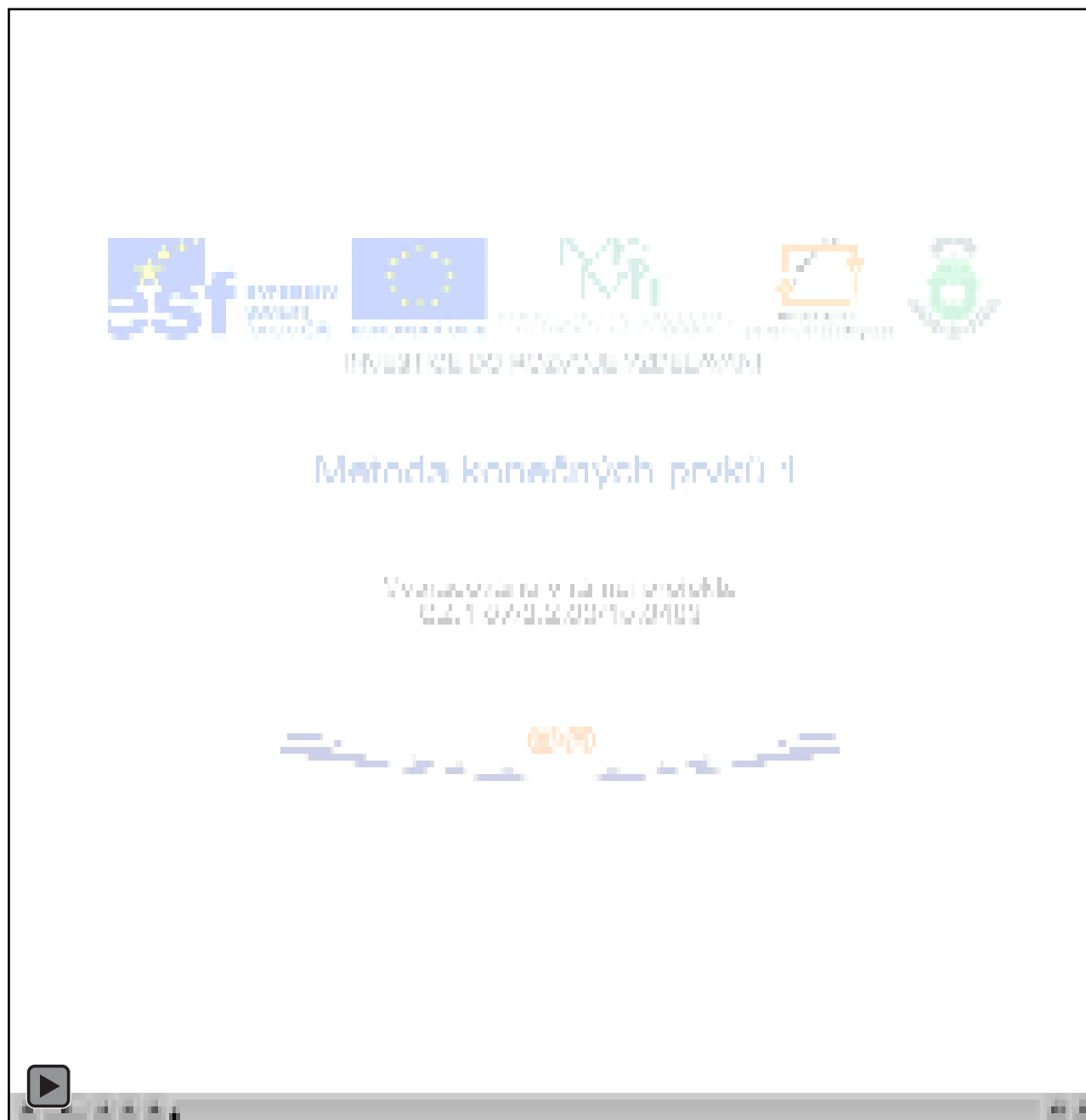
Podobně jako u příkazu Sweep lze z hustit nebo modifikovat síť i při přímém síťování entit (IsoMesh, Paver, Hybrid). Hustotu a tvar sítě můžeme měnit na hranách pomocí příkazu Mesh Seed.



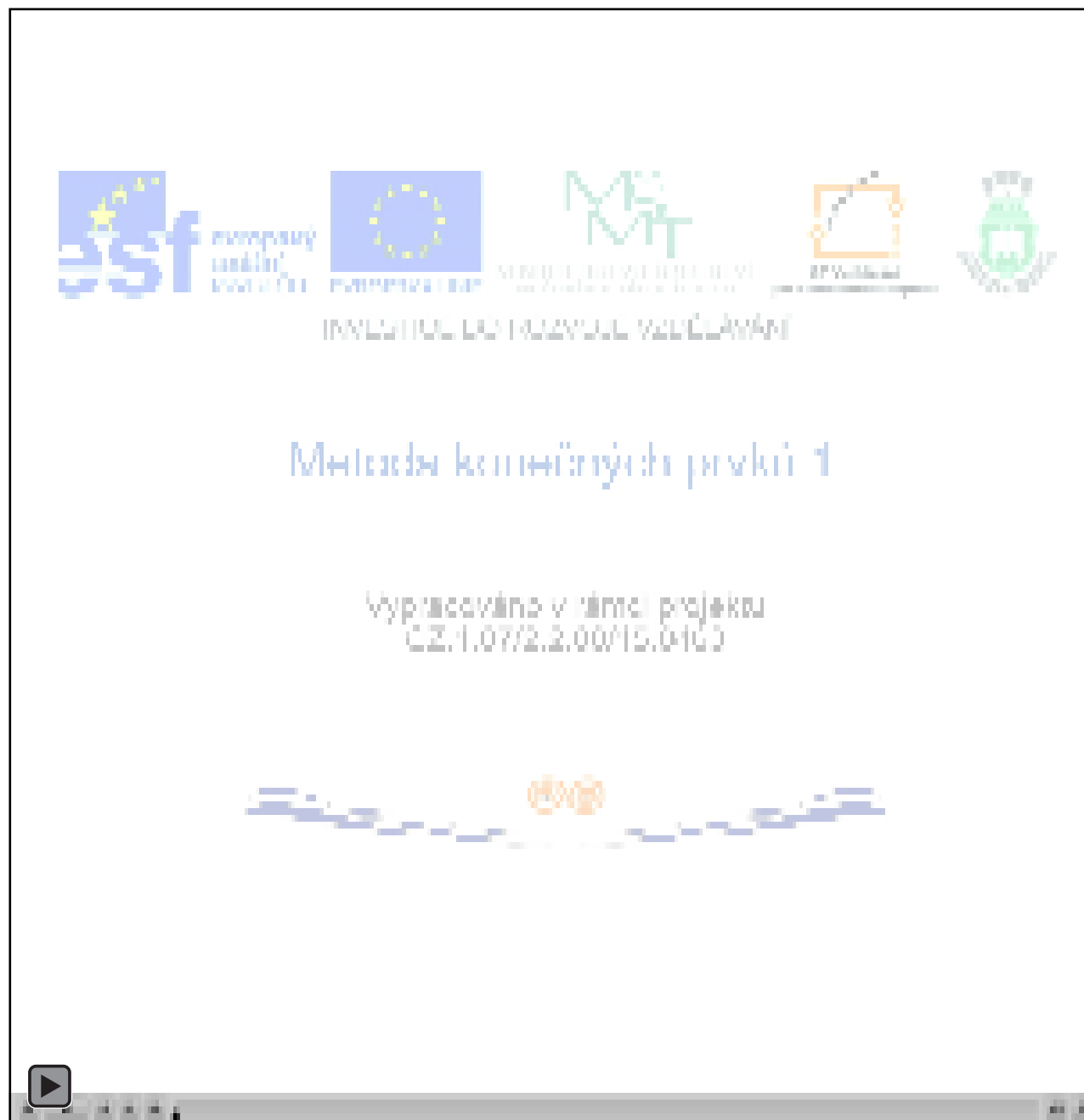
Obr.

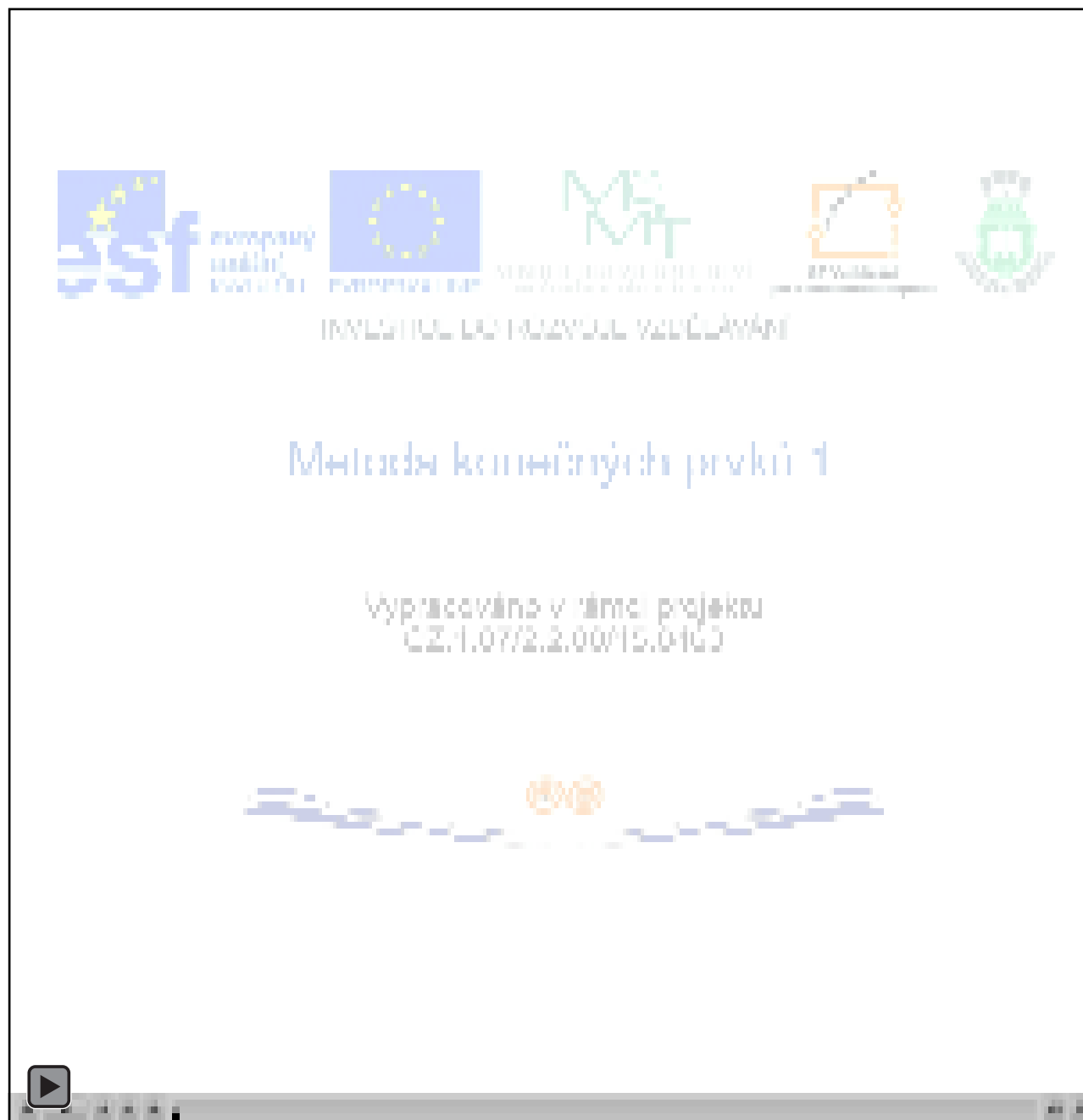
Velice užitečná je volba Create/Mesh Seed/Tabular – Node and Point, která umožňuje vytvořit síť na základě již vytvořené sítě (uzlů) nebo přímo vybráním bodů (Point).











2 LITERATURA

LENERT, J. Úvod do metody konečných prvků. skripta VŠB-TU Ostrava, 1999.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.

VALCHÁŘOVÁ, J. Soudobé numerické metody v mechanice kontinua. SNTL. Praha. 1986.

BEER, G., WATSON, J.O. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. New York. 1992.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 1. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00855-X.

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. Numerické metody mechaniky 2. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00901-7.

ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R., L. The Finite Element Method, Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. ISBN 0-7506-5049-4.

NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. Úvod do matematické teorii pružných a pružně plastických těles. SNTL. Praha. 1983.

Internet:

<http://www.mscsoftware.com/>

<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>

