

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



ÚNAVA MATERIÁLU

Lineární elastická lomová mechanika

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Dr. Ing. Adámková Ludmila

Ostrava 2013

© Ing. Martin Fusek, Ph.D., Dr. Ing. Adámková Ludmila

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3024-7



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

5	LINEÁRNÍ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA	3
5.1	Lineární elastická lomová mechanika.....	4
5.2	Kriterium faktoru intenzity napětí (K- kriterium).....	4
5.2.1	Zkouška lomové houževnatosti <i>KIC</i>	5
5.3	Energetická kritéria.....	5
5.3.1	Griffithovo kriterium	6
5.3.2	Kriterium hnací síly trhliny.....	7
5.4	Řešené příklady	9
5.5	Příklady k procvičení.....	11
5.6	Literatura.....	13



5 LINEÁRNÍ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA



OBSAH KAPITOLY:

Lineární elastická lomová mechanika.

Kriterium faktoru intenzity napětí.

Zkouška lomové houževnatosti K_{IC} .

Energetická kritéria

Kriterium hnací síly trhliny.



MOTIVACE:

Abychom dokázali předejít lomům těles a konstrukcí je nutno posoudit přípustné délky trhlin. Pokud je velikost plastické zóny v kořeni trhliny malá v porovnání s ostatními rozměry tělesa a těleso se nachází ve stavu rovinné deformace, zabývá se posouzením přípustnosti trhlin lineární elastická lomová mechanika (mnohdy v literatuře označována zkratkou počátečních písmen LELM).

V této kapitole jsou aplikována kritéria lineární elastické lomové mechaniky pro posouzení přípustnosti těles s trhlínami.



CÍL:

Lineární elastická lomová mechanika.

Kriterium faktoru intenzity napětí.

Griffithovo kritérium.

Kriterium hnací síly trhliny.

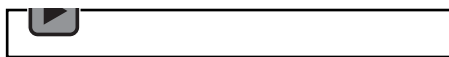


5.1 LINEÁRNÍ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

Lineární elastická lomová mechanika (mnohdy v literatuře označována zkratkou počátečních písmen LELM) se zabývá tělesy s trhlinami, u kterých velikost plastické zóny v kořeni trhliny je malá v porovnání s ostatními rozměry tělesa a těleso se nachází ve stavu rovinné deformace. Plastické zóny malých rozměrů je dosaženo, jestliže podíl normálového napětí od vnějšího zatížení σ k mezi kluzu R_e je



Audio 5.1 LELM



$$\frac{\sigma}{R_e} < 0.3 \quad (5.1)$$

K posouzení přípustnosti trhlín používá lineární lomová mechanika dva druhy kritérií a to jednak

- Kriterium faktoru intenzity napětí
- Kriteria energetická



Audio 5.2 Posouzení přípustnosti trhlín



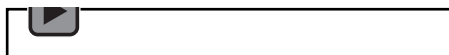
5.2 KRITERIUM FAKTORU INTENZITY NAPĚTÍ (K- KRITERIUM)

Jak už bylo uvedeno v předcházející kapitole, je základní veličinou lomové mechaniky faktor intenzity napětí K . S určením faktoru intenzity napětí pro jednotlivé módy zatížení jsme se seznámili v předcházející kapitole.

Aby nedošlo ke křehkému lomu tělesa s trhlinou, musí být hodnota faktoru intenzity napětí menší než kritická hodnota (lomová houževnatost).



Audio 5.3 K-kriterium



V současné době jsou vyšetřovány kritické hodnoty faktoru intenzity napětí pro I. mód zatížení. Platí tedy

$$K_I < K_{IC} \quad (5.2)$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost.

Lomová houževnatost je pro daný materiál a danou teplotu materiálovou konstantou.



Audio 5.4 Lomová houževnatost



Charakteristické hodnoty pro vybrané materiály jsou uvedeny v následující tabulce.

Materiál	Lomová houževnatost $MPa\sqrt{m}$
Sklo, křída	< 1
Keramika	< 14
Perlitické oceli	> 80
Oceli	< 200
Měď	< 400

Tabulka 1

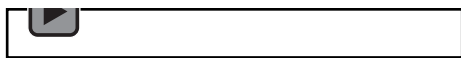


5.2.1 Zkouška lomové houževnatosti K_{IC}

Při této zkoušce se postupně zatěžuje zkušební těleso - vzorek s trhlinou, za podmínek rovinné deformace až do lomu a zjišťuje se závislost rozevření vrubu v na působící síle F (obr.1).

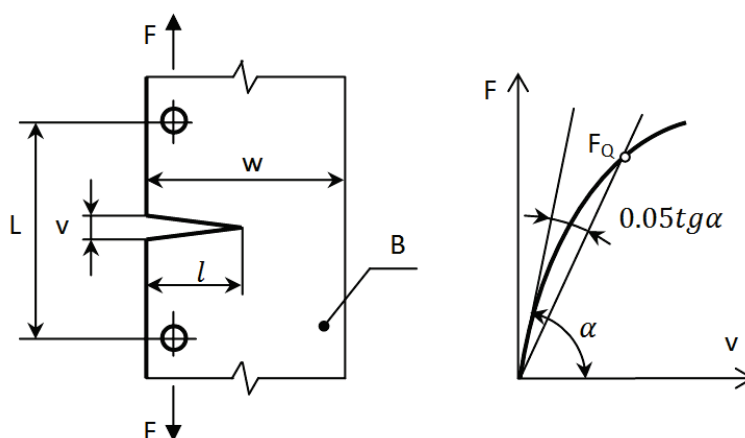


Audio 5.5 Zkouška lomové houževnatosti



Ze záznamu se určí síla F_Q v okamžiku dosažení určité odchylky od linearity. Ze síly F_Q se pro rozměry zkušebního vzorku vypočítá postupem uvedeným v normě (ČSN 420347-74) předběžná hodnota součinitele intenzity napětí K_Q . Pokud následná kontrola potvrdí, že byla splněna podmínka rovinné deformace je $K_{IC} = K_Q$. V opačném případě je nutno zkoušku opakovat. Aby lomová houževnatost byla materiálovou konstantou, musí být splněna podmínka

$$B, l, (w - l) \geq 2.5 \left(\frac{K_{IC}}{R_e} \right)^2. \quad (5.3)$$

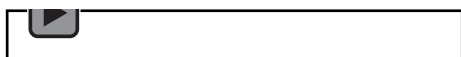


Obrázek 1

Vzhledem k tomu, že zkouška lomové houževnatosti je finančně dosti náročná, často se používá k odhadu lomové houževnatosti výsledků ze zkoušky rázem v ohybu, u které je pro vzorek s V-vrubem stanovena nárazová práce KV.



Audio 5.6



V literatuře je možno nalézt několik empirických vztahů, zabývajících se zmíněnou problematikou.

Uveďme např. vztahy

a) Barsom, Rolfe

$$K_{IC} = 0.0149\sqrt{E}(KV)^{3/4} \quad (5.4)$$

b) Sailors, Corten

$$K_{IC} = 0.0321\sqrt{E(KV)} \quad (5.5)$$

Ve výše uvedených vztazích jsou fyzikální jednotky: $K_{IC} [MPa\sqrt{m}]$, $E [MPa]$, $KV [J]$.

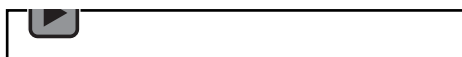
5.3 ENERGETICKÁ KRITÉRIA

Energetická kritéria vycházejí z podmínky nestability trhliny.





Audio 5.7 Energetická kritéria



Jestliže uvažujeme těleso bez trhliny namáhané tahem, je jeho potenciální energie

$$W_0 = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (5.6)$$

Dojde-li ke vzniku trhliny, klesne potenciální energie na hodnotu W a uvolněná energie Γ se využije na tvorbu lomových ploch trhliny. Celková energie v soustavě je tedy rovna

$$E = W + \Gamma = W_0 - W_T + \Gamma \quad (5.7)$$

kde - W_T je změna deformační elastické energie napjatosti v důsledku existence trhliny.

Ze zákona o zachování energie plyne

$$\frac{dE}{dS} = \frac{-dW_T}{dS} + \frac{d\Gamma}{dS} = 0 \quad (5.8)$$

Odtud

$$\frac{dW_T}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS} \quad (5.9)$$

kde S je plocha povrchu průřezu trhliny.

Na základě této podmínky (podmínka nestability trhliny) je možno formulovat jednak Griffithovo kritérium a jednak kritérium hnací síly trhliny.



Audio 5.8



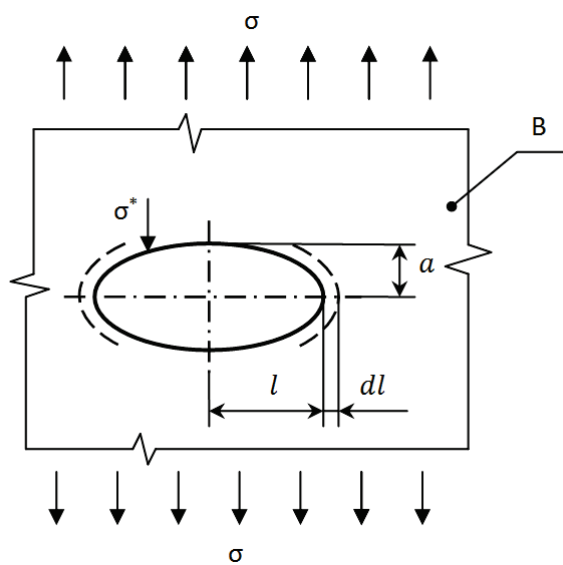
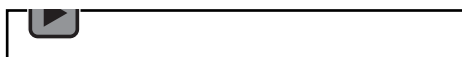
5.3.1 Griffithovo kritérium

A.A Griffith v r. 1920 zformuloval kritérium pro posouzení stability trhliny v ideálně křehkém materiálu (sklo).

Griffithovo kritérium vychází z předpokladu, že tahové napětí σ trhlínu rozevívá a tlakové napětí $\sigma^* \leq \sigma$ trhlínu uzavírá (obr.2). Práce nutná k uzavření trhliny je rovna [1]



Audio 5.9 Griffithovo kritérium



Obrázek 2

$$W_T = \frac{\pi B \sigma^2 l^2}{E^*} \quad (5.10)$$



Modul pružnosti E^* je roven $E^* = E$ v případě rovinné napjatosti a $E^* = E/(1 - \mu^2)$ v případě rovinné deformace.

Energie potřebná na tvorbu lomových ploch trhliny je rovna

$$\Gamma = \gamma S_p \quad (5.11)$$

kde

γ - měrná povrchová energie materiálu; pro ocel $\gamma = 2 \text{ J m}^{-2}$

a

S_p - je plocha povrchů trhliny.

V případě průchozí trhliny je

$$S_p = 2S = 2 \times 2lB = 4lB \quad (5.12)$$

a v případě povrchové trhliny je

$$S_p = 2S = 2lB \quad (5.13)$$

Ze vztahu (5.8) plyne

$$dW_T = \frac{\pi \sigma^2 B}{E^*} 2l dl \quad (5.14)$$

$$dS = 2B dl \quad (5.15)$$

$$d\Gamma = 4B \gamma dl \quad (5.16)$$

a dále

$$\frac{\pi \sigma^2}{E^*} l = 2\gamma. \quad (5.17)$$

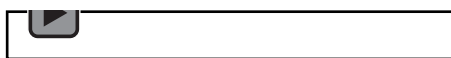
Kritická délka trhliny je tedy rovna

$$l_c = \frac{2E^* \gamma}{\pi \sigma^2}. \quad (5.18)$$

Pokud je uvolněná energie při vzrůstu trhliny menší nežli energie nutná k vytvoření nových lomových ploch, k růstu trhliny nedojde.



Audio 5.10 Energie trhliny



5.3.2 Kriterium hnací síly trhliny

Kriterium hnací síly trhliny vychází z Griffithova kriteria.



Audio 5.11 Kriterium hnací síly



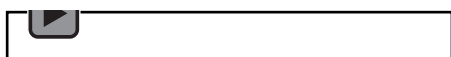
Veličina

$$G = \frac{dW_T}{dS} = \frac{\pi \sigma^2}{E^*} l \quad (5.19)$$

bývá nazývána hnací silou trhliny anebo rychlostí uvolňování deformační energie. Obecně představuje hnací síla trhliny energii, kterou soustava těleso-vnější síly uvolní, když se plocha trhliny zvětší o jednotku plochy. Hnací síla trhliny má rozměr $\text{J m}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$ a lze ji považovat za sílu, působící na jednotku délky čela trhliny a konající při vzrůstu trhliny práci.

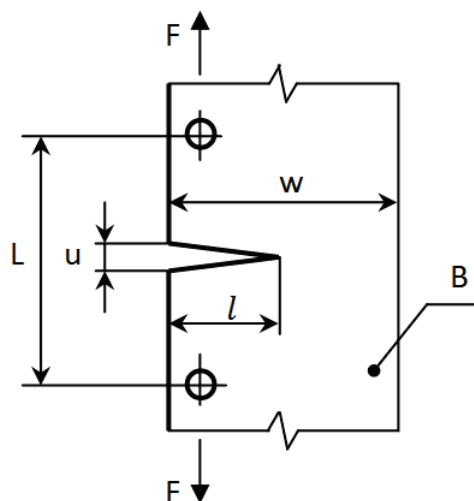


Audio 5.12



Hnací sílu trhliny lze odvodit z následujícího předpokladu. Uvažujeme desku s průchozí povrchovou trhlinou délky l (obr.3). V případě jednoosé napjatosti je potenciální energie rovna





Obrázek 3

$$W = \frac{1}{2} Fu \quad (5.20)$$

kde deformační posuv u vyjádříme pomocí poddajnosti C

$$u = CF \quad (5.21)$$

Dále obdržíme

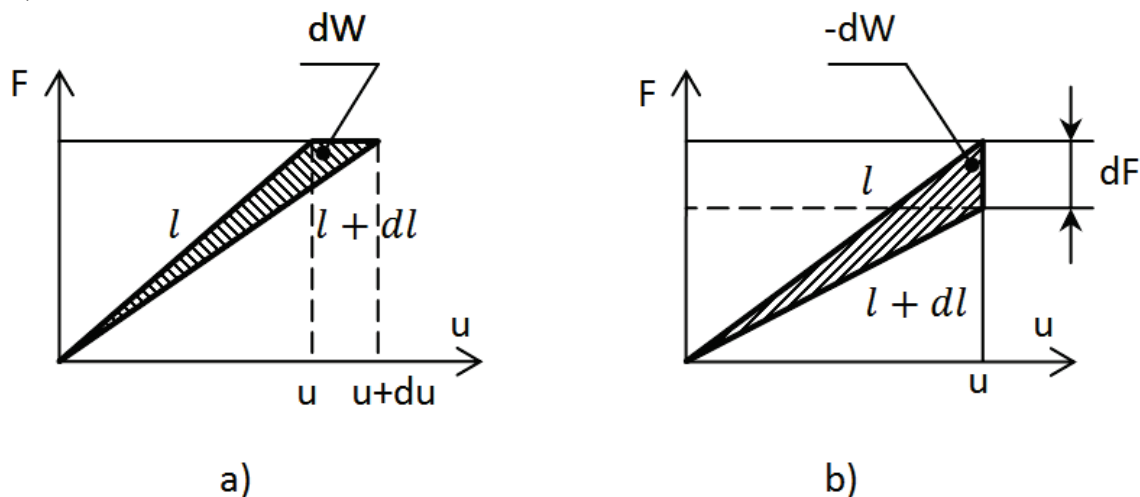
$$dW = \frac{1}{2} u dF + \frac{1}{2} F du \quad (5.22)$$

$$du = dCF + C dF \quad (5.23)$$

$$S = lB \quad (5.24)$$

$$dS = B dl \quad (5.25)$$

K růstu trhliny může docházet buď při konstantním zatížení anebo při konstantním posuvu (obr.4).



Obrázek 4

a) Růst trhliny při konstantním zatížení $F = konst.$ (obr.4a)

V tomto případě je

$$dF = 0, du = F dC \quad (5.26)$$

a po dosazení do (5.21) bude

$$dW = \frac{1}{2} F du = \frac{1}{2} F^2 dC \quad (5.27)$$

a hnací síla trhliny

$$G = \frac{dW}{dS} = \frac{1}{B} \left(\frac{dW}{dl} \right) = \frac{F^2}{2B} \frac{dC}{dl} \quad (5.28)$$



b) Růst trhliny při konstantním posuvu $u = konst.$ (obr.4b)

V tomto případě je

$$du = dCF + \frac{u}{F} dF = 0 \quad (5.29)$$

a odtud

$$dC = -\frac{u}{F^2} dF \quad (5.30)$$

$$dW = \frac{1}{2} u dF = -\frac{1}{2} F^2 dC \quad (5.31)$$

a hnací síla trhliny

$$G = \frac{dW}{ds} = \frac{1}{B} \left(\frac{dW}{dl} \right) = -\frac{F^2}{2B} \frac{dC}{dl} \quad (5.32)$$

Je zřejmé, že hnací síla trhliny je stejná pro oba způsoby zatěžování, liší se pouze znaménkem.

Lze odvodit, že platí závislost mezi hnací silou trhliny G a faktorem intenzity napětí K [1] .

$$G_I = \frac{(1-\mu^2)}{E} K_I^2 \quad (5.33)$$

pro případ rovinné deformace (RD)

a

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (5.34)$$

pro případ rovinné napjatosti RN.

Obdobné vztahy lze odvodit i pro druhý a třetí mód zatížení, tedy

$$G_{II} = \frac{(1-\mu^2)}{E} K_{II}^2 \quad (5.35)$$

a

$$G_{III} = \frac{(1+\mu)}{E} K_{III}^2 \quad (5.36)$$

Hnací síla trhliny je skalár – proto pro smíšený mód zatížení přibližně platí

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (5.37)$$

i přes to, že šíření trhliny při I. a II. módu zatížení, se děje v odlišných směrech, jak bude dokázáno v další kapitole.

K zapamatování:

- Lineární elastická lomová mechanika – posouzení těles s trhlinami, u kterých velikost plastické zóny v kořeni trhliny je malá v porovnání s ostatními rozměry tělesa a těleso se nachází ve stavu rovinné deformace.
- Posouzení přípustnosti trhlín - kritérium faktoru intenzity napětí, energetická kritéria.
- Lomová houževnatost – materiálová konstanta pro daný materiál a danou teplotu.
- Griffithovo kritérium – k šíření trhliny dojde, pokud úbytek elastické energie napjatosti v tělese v důsledku změny délky trhliny bude větší nežli přírůstek povrchové energie nově se tvořících ploch při růstu trhliny.
- Hnací síla trhliny- rychlost uvolňování deformační energie. Síla, působící na jednotku délky čela trhliny a konající při vzrůstu trhliny práci.

5.4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

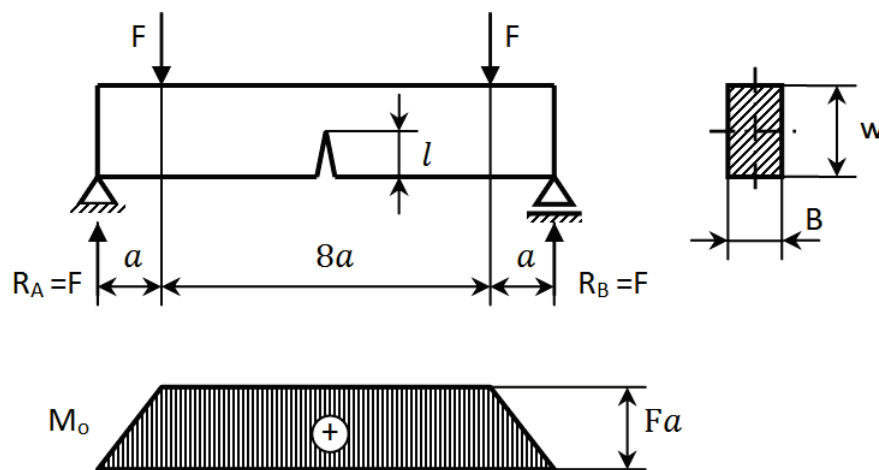
Příklad 1

Určit přípustnou délku trhliny v nosníku obdélníkového průřezu, namáhaného podle obr.1, jestliže je dáno: působící síla $F = 6000N$, délkové rozměry $a = 100mm, b = 20mm, h = 40mm$. Lomová houževnatost materiálu $K_{Ic} = 90MPa\sqrt{m}$. Bezpečnost vůči lomové houževnatosti $k = 3$.

Funkce tvaru a způsobu zatížení trhliny



$$Y = 1.122 - 1.4 \frac{l}{w} + 7.33 \left(\frac{l}{w}\right)^2 - 13.08 \left(\frac{l}{w}\right)^3 + 14 \left(\frac{l}{w}\right)^4$$



Obrázek 1

Řešení:

Napětí od ohybového momentu je rovno

$$\sigma_o = \frac{Fa}{\frac{1}{6}Bw^2} = \frac{6000 \times 100}{\frac{1}{6} \times 20 \times 40^2} = 112.5 \text{ MPa}$$

Vzhledem k tomu, že není známa délka trhliny, volíme funkci tvaru a způsobu zatížení trhliny $Y = 1$.

Z podmínky

$$\frac{K_{Ic}}{k} \geq \sigma \sqrt{\pi l} Y$$

bude

$$l \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{k \sigma Y} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{90}{3 \times 112.5 \times 1} \right)^2 = 22.65 \text{ mm}$$

pro délku trhliny

$$l = 22.65 \text{ mm}$$

je funkce tvaru a způsobu zatížení

$$Y = 1.494$$

a faktor intenzity napětí K_I

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} Y = 112.5 \times \sqrt{\pi \times 0.02} \times 1.494 = 42.1 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

Bezpečnost vůči lomové houževnatosti

$$k = \frac{90}{42.1} = 2.137 < 3$$

což nevyhovuje požadovanému zadání.

Pro délku trhliny

$$l = 15 \text{ mm}$$

je

$$Y = 1.215$$

a

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} Y = 112.5 \times \sqrt{\pi \times 0.015} \times 1.215 = 29.7 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

a bezpečnost vůči lomové houževnatosti

$$k = \frac{90}{29.7} = 3.03 > 3$$

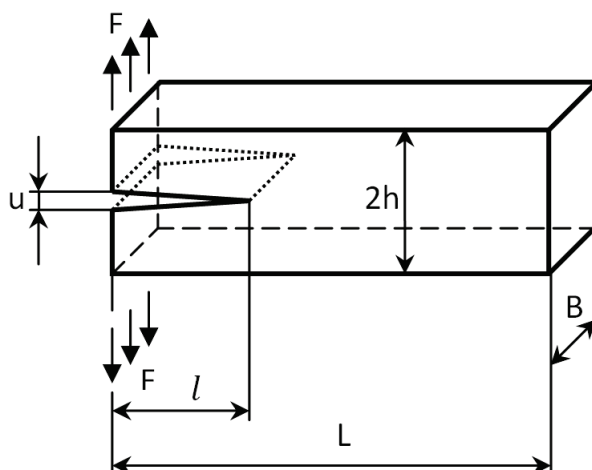
Je tedy přípustná délka trhliny



$$l = 15\text{mm}.$$

Příklad 2

Určete hnací sílu trhliny pro případ průchozí trhliny v nosníku podle obr.2.



Obrázek 2

Řešení:

Průhyb vetknutého nosníku zatíženého na volném konci silou F je roven

$$v = \frac{Fl^3}{3EI}$$

kde

$$I = \frac{Bh^3}{12}$$

Rozevření trhliny

$$u = 2v = \frac{2Fl^3}{3EI} = \frac{8Fl^3}{EBh^3}$$

Pro poddajnost C platí

$$C = \frac{u}{F} = \frac{8l^3}{EBh^3}$$

a

$$\frac{dC}{dl} = \frac{24l^2}{EBh^3}$$

Hnací síla trhliny je rovna

$$G = \frac{1}{2B} F^2 \frac{dC}{dl} = \frac{12F^2 l^2}{EB^2 h^3}$$

Hnací sílu trhliny je možno rovněž určit následujícím řešením:

Akumulovaná deformační energie je dána výrazem

$$U = 2 \int_0^a \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

a dále

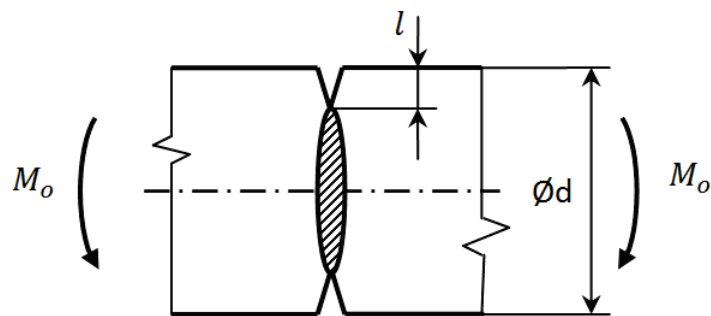
$$G = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{B \partial l} = \frac{M^2(x=a)}{EBI} = \frac{F^2 l^2}{EBI} = \frac{12F^2 l^2}{EB^2 h^3}$$

5.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 1

Určete přípustný ohybový moment M_0 , kterým je namáhán hřídel s trhlinou podle obr.3, jestliže je dáno:





Obrázek 3

Délka trhliny: $l = 3 \text{ mm}$.

Průměr hřídele: $\varnothing d = 50 \text{ mm}$.

Funkce tvaru a způsobu zatížení trhliny

$$Y_I = \frac{3}{8} \sqrt{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{3}{8} \lambda^2 + \frac{5}{16} \lambda^3 + \frac{35}{128} \lambda^4 + 0.537 \lambda^5 \right)$$

kde $\lambda = 1 - \frac{2l}{d}$.

Lomová houževnatost materiálu $K_{IC} = 60 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Pro výpočet ohybového napětí použijte vztah

$$\sigma_o = \frac{32M_o}{\pi(d - 2l)^3}$$

Výsledek: $M_o = 6755 \text{ Nm}$.



5.6 LITERATURA

- [1] Kučera, J. *Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. VŠB-TU Ostrava, 2006. 297s. Skriptum. ISBN 80-248-1268-1.
- [2] Zemánková, J. *Technická mechanika I. Úvod do lomové mechaniky*. ČVUT Praha, 1981. 123s. Skriptum. ISBN 80-7078-244-7.
- [3] Dowling, N.E. *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture and fatigue*. Third edition. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 0-13-186312-6.
- [4] Vlk, M. Florian, Z. *Mezní stavy a spolehlivost*. Elektronický učební text. www.zam.fme.vutbr.cz/~vlk/meznistavy.pdf
- [5] Wang, C.H. *Introduction to fracture mechanics*. Elektronický učební text. www.dsto.defence.gov.au/publications/1880/DSTO-GD-0103.pdf

