

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



ÚNAVA MATERIÁLU

Sihovo energetické kritérium

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Dr. Ing. Adámková Ludmila

Ostrava 2013

© Ing. Martin Fusek, Ph.D., Dr. Ing. Adámková Ludmila
© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
ISBN 978-80-248-3024-7



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

6	SIHOVO ENERGETICKÉ KRITERIUM.....	3
6.1	Sihovo kritérium	4
6.2	Iniciace trhliny podle I. způsobu zatížení	5
6.3	Iniciace trhliny podle II. způsobu zatížení.....	5
6.4	Iniciace trhliny podle smíšeného módu zatížení.....	6
6.5	Řešené příklady	7
6.6	Příklady k procvičení.....	9
6.7	Literatura.....	10



6 SIHOVO ENERGETICKÉ KRITÉRIUM



OBSAH KAPITOLY:

Faktor hustoty deformační energie.

Iniciace trhliny při I. způsobu zatížení.

Iniciace trhliny při II. způsobu zatížení.

Iniciace trhliny při smíšeném způsobu zatížení.

Sihovo kritérium.



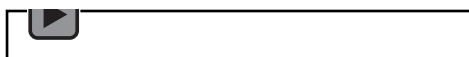
MOTIVACE:

V praktických případech se módy I, II a III nevyskytují samostatně, ale velmi často ve svých kombinacích, jako I-II, I-III nebo I-II-III. Posuzování takovýchto případů je potom komplikovanější než případů s jednotlivými samostatnými módy.

V praxi se k posuzování uvedených případů často používá kritérium Sihovo, které je založeno na objemové hustotě deformační energie. Toto kritérium neumožňuje posoudit pouze přípustnost trhliny, ale zároveň umožní i určit směr šíření trhliny.



Audio 6.1 Motivace



V této kapitole je aplikováno Sihovo kritérium, které umožňuje jednak posoudit přípustnost trhlín a zároveň umožňuje určit i směr šíření trhlín.



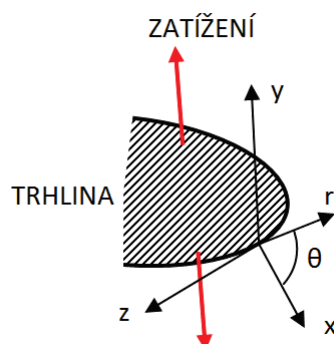
CÍL:

Sihovo kritérium nestabilního lomu. Iniciace trhliny při I. a II. způsobu zatížení.

Sihovo kritérium nestabilního lomu. Iniciace trhliny při smíšeném způsobu zatížení.

6.1 SIHOVO KRITERIUM

V případě obecně zatížené trhliny (obr.1), vznikají na čele trhliny složky napětí [1]



Obrázek 1

$$\sigma_x = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \dots \quad (6.1)$$

$$\sigma_y = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (6.2)$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} - 2\mu \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (6.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \dots \quad (6.4)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{k_3}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (6.5)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{k_3}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} + \dots \quad (6.6)$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou faktory intenzity napětí podle Sihova zápisu

$$k_1 = \sigma_y \sqrt{l}; \quad k_2 = \tau_{xy} \sqrt{l}; \quad k_3 = \tau_{yz} \sqrt{l}. \quad (6.7)$$

Hustota elastické deformační energie akumulované v elementu objemu materiálu dV je rovna

$$dU = \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G_s} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] dV \quad (6.8)$$

Po dosazení rovnic (6.1-6.6) do vztahu (6.8) dostaneme po úpravě

$$\frac{dU}{dV} = \frac{S}{r} = \frac{1}{r} (a_{11} k_1^2 + 2a_{12} k_1 k_2 + a_{22} k_2^2 + a_{33} k_3^2) \quad (6.9)$$

kde veličina

$$S = a_{11} k_1^2 + 2a_{12} k_1 k_2 + a_{22} k_2^2 + a_{33} k_3^2 \quad (6.10)$$

představuje faktor hustoty deformační energie.

Koeficienty $a_{11} - a_{33}$ v rovnici (6.10) jsou rovny

$$a_{11} = \frac{1}{16G_s} [(3 - 4\mu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)] \quad (6.11)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16G_s} 2 \sin \theta [\cos \theta - (1 - 2\mu)] \quad (6.12)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G_s} [4(1 - \mu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \quad (6.13)$$

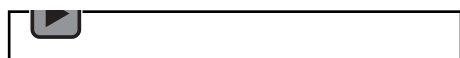
$$a_{33} = \frac{1}{4G_s} \quad (6.14)$$

Kritérium Sihovo je založeno na dvou hypotézách:

1. Trhlina se šíří ve směru minimální hustoty faktoru deformační energie.
2. Začátek šíření řídí kritická hodnota faktoru deformační energie S_c .



Audio 6.2 Sihovo kritérium



6.2 INICIACE TRHLINY PODLE I. ZPŮSOBU ZATÍŽENÍ

V tomto případě je

$$k_1 = \sigma\sqrt{l}; k_2 = k_3 = 0 \quad (6.15)$$

a

$$S = \frac{\sigma^2 l}{16G_S} [(3 - 4\mu - \cos\theta)(1 + \cos\theta)] \quad (6.16)$$

Minimální hodnotu faktoru hustoty deformační energie určíme z podmínky

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{\sigma^2 l}{8G_S} \sin\theta (\cos\theta + 1 - 2\mu) = 0 \quad (6.17)$$

Tato rovnice dává řešení pro

a) $\theta = 0$

b) $\cos\theta = 1 + 2\mu$.

Dále bude

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} = \frac{\sigma^2 l}{8G_S} [\cos^2\theta + (1 - 2\mu)\cos\theta - \sin^2\theta] \quad (6.18)$$

Pro $\theta = 0$ je

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} = \frac{\sigma^2 l}{8G_S} [1 + (1 - 2\mu)] > 0 \quad (6.19)$$

a funkce S nabývá minima a trhlina se bude šířit ve svém původním směru.

Je tedy

$$S_{min} = \frac{\sigma^2 l}{4G_S} (1 - 2\mu) \quad (6.20)$$

Uvážení, že

$$K_{IC} = \sqrt{\pi} k_{IC} \quad (6.21)$$

dostaneme kritickou hodnotu faktoru hustoty deformační energie

$$S_c = \frac{\sigma_c^2 l_c}{4G_S} (1 - 2\mu) = \frac{k_{IC}^2 (1 - 2\mu)}{4G_S} = \frac{K_{IC}^2 (1 - 2\mu)}{4\pi G_S} \quad (6.22)$$

6.3 INICIACE TRHLINY PODLE II. ZPŮSOBU ZATÍŽENÍ

V tomto případě je

$$k_2 = \tau\sqrt{l}; k_1 = k_3 = 0 \quad (6.23)$$

a

$$S = \frac{\tau^2 l}{16G_S} [4(1 - \mu)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \quad (6.24)$$

Obdobně jako v předchozím případě určíme úhel θ , při kterém funkce S nabývá minima. Je tedy

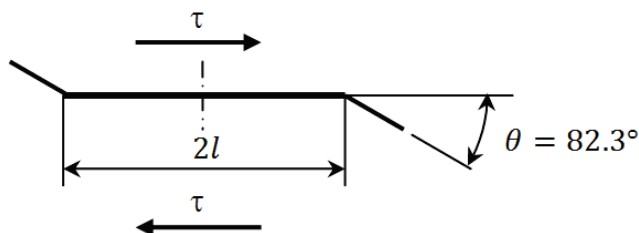
$$\cos\theta = \left(\frac{1 - 2\mu}{3}\right) \quad (6.25)$$

a odtud

$$S_{min} = \frac{\tau^2 l}{12G_S} [2(1 - \mu) - \mu^2]. \quad (6.26)$$

Pro $\mu = 0.3$ je $\theta = 82.3^\circ$.

Směr šíření trhliny je znázorněn na obr.2

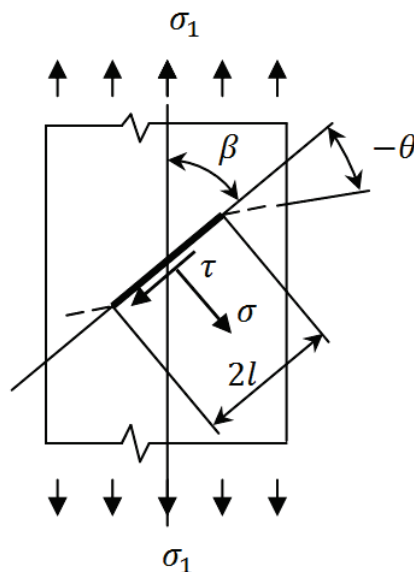


Obrázek 2



6.4 INICIACE TRHLINY PODLE SMÍŠENÉHO MÓDU ZATÍŽENÍ

Nejdůležitější je aplikace Sihova kritéria na smíšený mód zatížení a to buď při tahovém anebo tlakovém zatížení (obr.3)



Obrázek 3

Složky normálového a smykového napětí jsou rovny

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \beta \quad (6.27)$$

a

$$\tau = \sigma_1 \sin \beta \cos \beta \quad (6.28)$$

a součinitelé intenzity napětí v Sihově zápisu

$$k_1 = \sigma_1 \sqrt{l} \sin^2 \beta \quad (6.29)$$

$$k_2 = \sigma_1 \sqrt{l} \sin \beta \cos \beta. \quad (6.30)$$

Faktor hustoty deformační energie je roven

$$S = \sigma_1^2 l [a_{11} \sin^2 \beta + 2a_{12} \sin \beta \cos \beta + a_{22} \cos^2 \beta] \sin^2 \beta \quad (6.31)$$

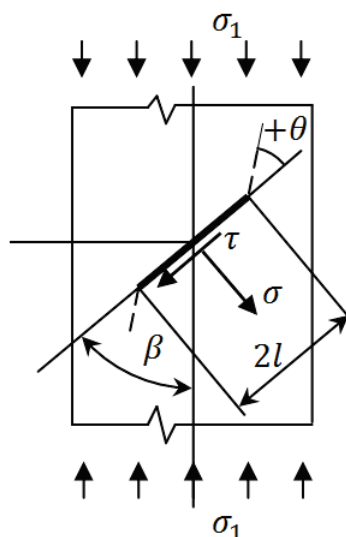
Směr šíření trhliny plyne z rovnice

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (6.32)$$

tedy

$$(1 - 2\mu) \sin(\theta - 2\beta) - \sin[2(\theta - \beta)] - \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0 \quad (6.33)$$

Pro záporné úhly θ vyjde řešení odpovídající tahovému napětí σ_1 (obr.3), pro kladné úhly θ vyjde řešení odpovídající tlakovému napětí σ_1 (obr.4).



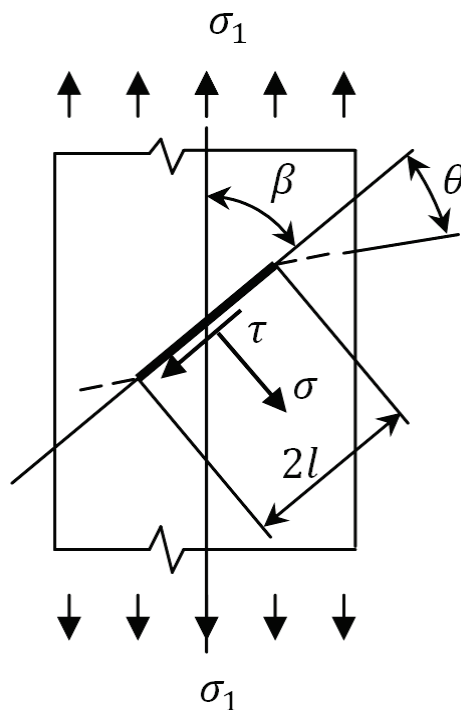
Obrázek 4

K zapamatování:

- Sihovo kritérium – posuzování obecně orientovaných trhlin. Umožňuje určit směr šíření trhliny.
- Kritérium Sihovo je založeno na dvou hypotézách:
- Trhlina se šíří ve směru minimální hustoty faktoru deformační energie.
- Začátek šíření řídí kritická hodnota faktoru deformační energie S_c .

6.5 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY**Příklad 1**

V pásnici namáhané tahovým napětím byla nalezena průchozí trhlina o délce $2l$ svírající úhel β s osou pásnice (obr.1). Jaká je kritická délka trhliny l_c , je-li dáno:



Obrázek 1



$\sigma_1 = 185 \text{ MPa}$, $\beta = 40^\circ$, $K_{IC} = 120 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0,3$.
Bezpečnost vzhledem k délce trhliny $k_l=6$.

Řešení:

Normálové a smykové napětí je rovno

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \sin^2 \beta \\ \tau &= \sigma_1 \sin \beta \cos \beta\end{aligned}$$

Součinitelé intenzity napětí (v Sihově zápisu) jsou

$$\begin{aligned}k_1 &= \sigma_1 \sqrt{l} \sin^2 \beta \\ k_2 &= \sigma_1 \sqrt{l} \sin \beta \cos \beta\end{aligned}$$

a faktor hustoty deformační energie

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2$$

kde

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{16G_S} [(3 - 4\mu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16G_S} 2 \sin \theta [\cos \theta - (1 - 2\mu)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16G_S} [4(1 - \mu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)].\end{aligned}$$

Po dosazení

$$S = \sigma_1^2 l [a_{11} \sin^2 \beta + 2a_{12} \sin \beta \cos \beta + a_{22} \cos^2 \beta] \sin^2 \beta.$$

Úhel θ , určující směr šíření trhliny určíme z podmínky

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$$

tedy

$$(1 - 2\mu) \sin(\theta - 2\beta) - \sin[2(\theta - \beta)] - \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0.$$

Řešením rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -145,4^\circ \\ \theta_2 &= 112,6^\circ \\ \theta_3 &= -55,42^\circ \\ \theta_4 &= 19,31^\circ\end{aligned}$$

Zároveň musí být splněna podmínka

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0.$$

Tato podmínka je splněna pouze pro úhel

$$\theta = \theta_3 = -55,42^\circ$$

Po dosazení obdržíme

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1,932}{16G_S} \\ a_{12} &= -\frac{0,2768}{16G_S} \\ a_{22} &= \frac{2,314}{16G_S}\end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned}S_{min} &= \frac{\sigma_1^2 l}{16G_S} 0,778 \\ G_S &= \frac{E}{2 \times (1 + \mu)} = \frac{2 \times 10^5}{2 \times (1 + 0,3)} = 7,7 \times 10^4 (\text{MPa})\end{aligned}$$



Kritická hodnota faktoru hustoty deformační energie je dána výrazem

$$S_c = \frac{K_{IC}^2(1-2\mu)}{4\pi G_s} = \frac{120^2 \times (1-0.3)}{4 \times \pi \times 7.7 \times 10^4} = 5,959 \times 10^{-3}$$

Kritickou délku trhliny určíme z podmínky

$$S_{min} = S_c$$

Po dosazení bude

$$\frac{\sigma_1^2 l_c}{16G_s} 0,778 = 5,959 \times 10^{-3}.$$

Odtud

$$l_c = \frac{16G_s S_c}{\sigma_1^2 \times 0,778} = 0,2754m.$$

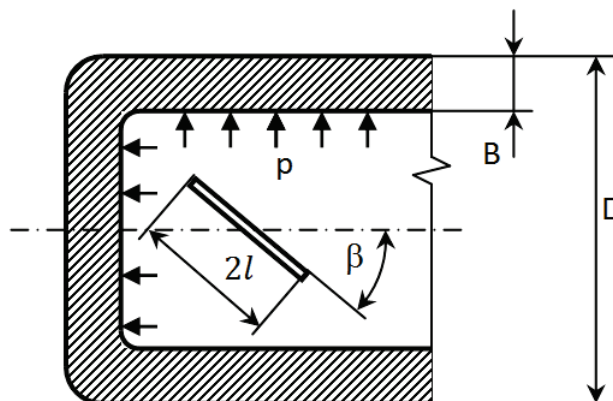
Dovolená délka trhliny

$$l_D = \frac{l_c}{6} = \frac{0,2754}{6} = 0,0459m$$

6.6 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 1

Najděte přípustnou délku trhliny ve stěně tlakové nádoby (obr.2), jestliže je dáno: $D = 1000mm$; $B = 20mm$; $p = 4MPa$; $\beta = 20^\circ$; $K_{IC} = 75MPa\sqrt{m}$; $E = 2 \times 10^5 MPa$; $\mu = 0.3$. Součinitel bezpečnosti vůči lomové houževnatosti $k_l = 5$.



Obrázek 2

Výsledek: $l = 40mm$.



6.7 LITERATURA

- [1] Kučera, J. *Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. VŠB-TU Ostrava, 2006. 297s. Skriptum. ISBN 80-248-1268-1.
- [2] Zemánková, J. *Technická mechanika I. Úvod do lomové mechaniky*. ČVUT Praha, 1981. 123s. Skriptum. ISBN 80-7078-244-7.
- [3] Dowling, N.E. *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture and fatigue*. Third edition. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 0-13-186312-6.
- [4] Vlk, M. Florian, Z. *Mezní stavy a spolehlivost*. Elektronický učební text. www.zam.fme.vutbr.cz/~vlk/meznistavy.pdf
- [5] Wang, C.H. *Introduction to fracture mechanics*. Elektronický učební text. www.dsto.defence.gov.au/publications/1880/DSTO-GD-0103.pdf

