

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



VLASTNOSTI A ZKOUŠENÍ MATERIÁLŮ

TEORIE NAPJATOSTI

doc. Ing. Halama Radim, Ph.D.
Ing. František Fojtík, Ph.D.
Ing. Martin Fusek, Ph.D.
Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.
Dr. Ing. Ludmila Adámková

Ostrava 2013

© doc. Ing. Halama Radim, Ph.D., Ing. František Fojtík, Ph.D., Ing. Martin Fusek, Ph.D., Ing.
Jaroslav Rojíček, Ph.D., Dr. Ing. Ludmila Adámková

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3027-8



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	TEORIE NAPJATOSTI.....	3
1.1	Úvod	4
1.2	Hlavní roviny a hlavní napětí.....	4
1.3	Jednoosá napjatost.....	5
1.4	Dvojosá napjatost.....	7
2	POUŽITÁ LITERATURA	11



1 TEORIE NAPJATOSTI



OBSAH KAPITOLY:

Teorie napjatosti

Hlavní roviny a hlavní napětí

Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost

Mohrova kružnice pro rovinnou napjatost



MOTIVACE:

V předchozí přednášce jsme se věnovali konceptu napětí, konceptu deformace a jejich propojení skrze konstituční vztahy v mechanice kontinua. Hlavním cílem této kapitoly je vysvětlení pojmu hlavních napětí a vyložení metod jejich stanovení. V bodě tělesa s prostorovou napjatostí lze redukovat definovanou transformací počet nenulových složek tenzoru napjatosti z šesti na tři, kterým říkáme hlavní napětí. Hlavní napětí mají velké praktické využití, jak si ukážeme při formulaci a aplikaci hypotéz pevnosti v další kapitole.



CÍL:

Teorie napjatosti, hlavní napětí a hlavní roviny.

Jednoosá napjatost, odvození vztahů pro normálové a smykové napětí na skloněné rovině, Mohrova kružnice pro tah (tlak).

Dvojoosá napjatost, odvození vztahů pro normálové a smykové napětí na skloněné rovině, Mohrova kružnice pro rovinnou napjatost a prostý smyk.



1.1 ÚVOD

V předchozí kapitole byly popsány základy mechaniky kontinua. Předvedli jsme si, jak lze popsat stav napjatosti a stav deformace v bodě tělesa a ukázali charakter matice tuhosti pro jednotlivé stupně anizotropie materiálu. Nyní koncept napětí rozšíříme o možnost transformace tenzoru napjatosti do libovolného souřadnicového systému. Výsledkem bude mimo jiné i „zjednodušení“ konstitučních vztahů pro případ elastických materiálů.

1.2 HLAVNÍ ROVINY A HLAVNÍ NAPĚTÍ

Matematicky lze dokázat, že v každém bodě tělesa lze nalézt takovou polohu elementární krychličky, kdy jsou smyková napětí nulová. Označíme-li osy pravoúhlého souřadnicového systému ztotožněné s třemi hranami elementární krychle 1, 2, 3, bude platit

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0. \quad (5.1)$$

Na stěnách této elementární krychličky působí tedy pouze normálová napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Roviny, na nichž je smykové napětí rovno nule, se nazývají *hlavní roviny*. V každém bodě tělesa existují tři hlavní roviny. Normálová napětí v hlavních rovinách ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) se nazývají *hlavní napětí*.

Tenzor napjatosti, který, jak bylo uvedeno dříve, vyjadřuje stav napjatosti v bodě tělesa, lze potom psát ve tvaru

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Dle velikosti hlavních napětí rozlišujeme tři základní typy napjatosti (obr.1):

- 1) Jednoosá (přímková) napjatost (obr.1a), kdy jsou dvě z hlavních napětí nulová, tedy

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$$

K jednoosé napjatosti dochází ve zkušební části vzorku u tahové zkoušky (při ideálním upnutí vzorku) až do vzniku lokálního zúžení (krčku).

- 2) Dvojosá (rovinná) napjatost (obr.1b), která je definována podmínkou, že jedno z hlavních napětí je nulové, tedy

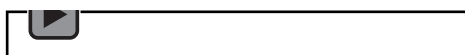
$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 = 0.$$

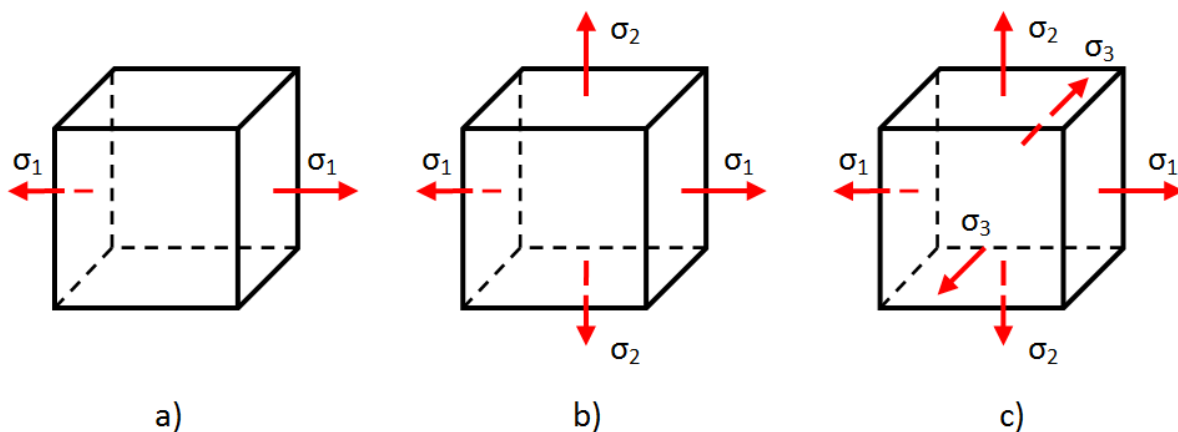
Příkladem rovinné napjatosti je těleso rovinného tvaru, u kterého jsou dva rozměry větší než třetí, nebo *tenkostěnná* tlaková nádoba. V oblasti zkušebnictví se pak uvažuje rovinná napjatost u tenkostěnných dutých válcových vzorků (mluvíme o biaxiálních testech – např. tah/krut, tah/vnitřní přetlak, atd.). Jedná se o velmi častý případ napjatosti, protože na volném nezatíženém povrchu tělesa je vždy rovinná napjatost.

- 3) Trojosá (prostorová) napjatost (obr.1c), kdy žádné z hlavních napětí není rovno nule.



Audio 1.1





Obrázek 1 Případy napjatosti

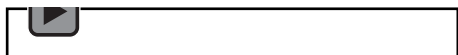
Je zvykem po stanovení velikosti hlavních napětí tato seřadit tak, že platí $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$.

1.3 JEDNOOŠÁ NAPJATOST

Ke stanovení velikosti hlavních napětí a polohy hlavních rovin se s výhodou používá grafické řešení (Mohrova kružnice). Základní zákonitosti tohoto řešení je nejlépe vyložit na nejjednodušším případě namáhání – jednoosém namáhání.



Audio 1.2



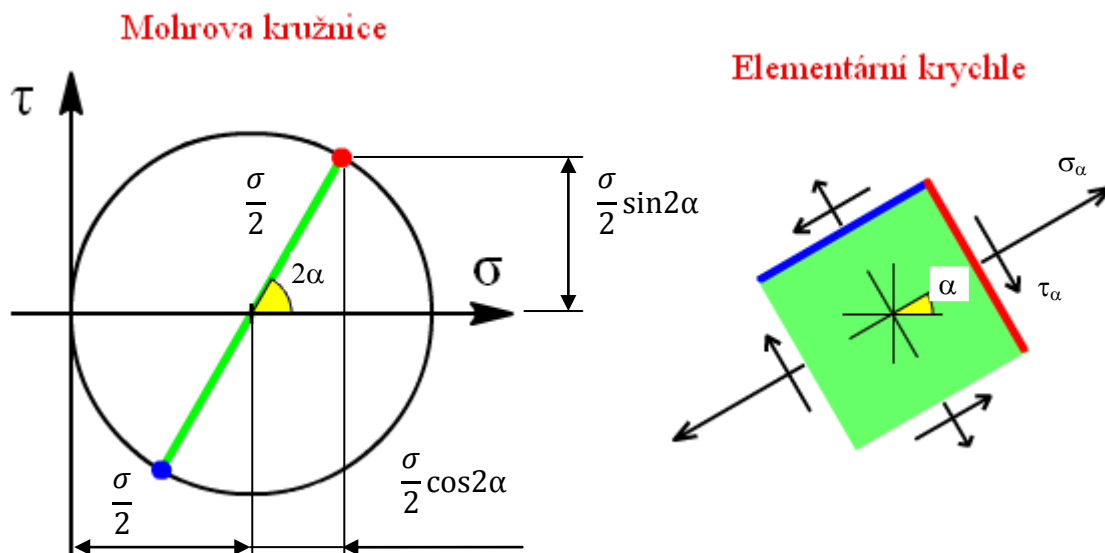
Připomeňme, že pro normálové a smykové napětí na skloněné rovině při prostém tahu platí (viz odvození rovnic (2.3) a (2.5))

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha, \quad (5.2)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.3)$$

Uvedené rovnice jsou parametrickými rovnicemi kružnice. Pro obecnou polohu elementární krychle danou úhlem α je vytvořeno jednoduché znázornění v diagramu normálové napětí σ – smykové napětí τ na obr. 2.

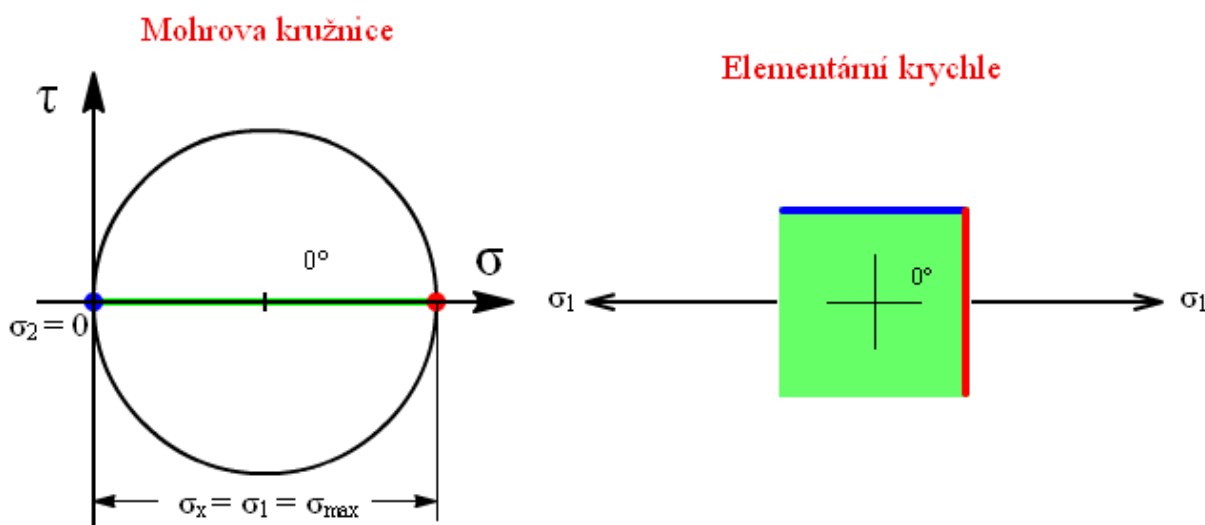




Obrázek 2 Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost – vysvětlení zákonitostí

Je zřejmé, že natočí-li se elementární krychle ve směru hodinových ručků o úhel α , pootočí se průvodiče rovin v zobrazení σ – τ v téže směru, ale o dvojnásobný úhel.

Hlavní roviny odpovídají speciální poloze elementární krychle, kdy jsou smyková napětí nulová. V případě jednoosého namáhání je tomu tak pro $\alpha=0$, což plyne z rovnice (5.3). Hlavní napětí σ_1 tedy odpovídá přímo axiálnímu napětí σ_x .

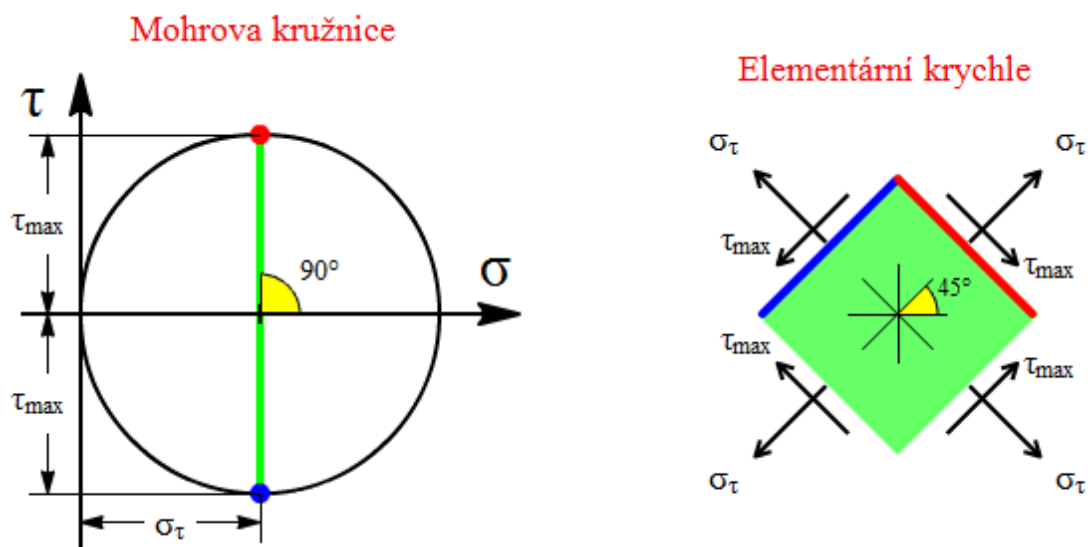


Obrázek 3 Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost – poloha hlavních rovin (červeně - rovina maximálního hlavního napětí σ_1 , modře - rovina minimálního hlavního napětí σ_2)

Mohrova kružnice pro jednoosé namáhání prochází vždy počátkem. V případě tlakového namáhání je axiální (normálové) napětí záporné a kružnice se nachází ve druhém a třetím kvadrantu ($\sigma_1=0$, $\sigma_2<0$).

Jak bude ukázáno v další přednášce, z hlediska pevnostní kontroly je důležité stanovení maximálního smykového napětí v kritickém místě součásti vyrobené z tvárného materiálu. Tentokrát již můžeme využít Mohrovu kružnici. Pro případ prostého tahu je zřejmé, že maximální smykové napětí odpovídá pootočení elementární krychle o 45° , jak je patrné z obr.4. Tentýž výsledek však plyne z rovnice (5.3). Všimněte si, že v rovině maximálního smykového napětí působí poloviční normálové napětí než v rovině příčného řezu, tzn. $\tau_t = \sigma/2$.





Obrázek 4 Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost – stanovení maximálního smykového napětí

Další poznatky lze získat z animace přístupné na internetové adrese:

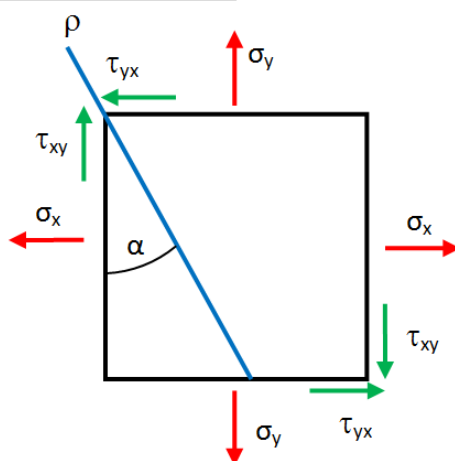
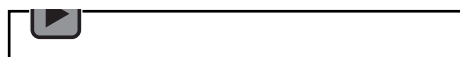
<http://mi21.vsb.cz/flash-animace/animace-mohrovy-kruznice-elementarni-krychle>

1.4 DVOJOSÁ NAPJATOST

Případ rovinné napjatosti je charakteristický tím, že všechny nenulové složky tenzoru napjatosti působí v jedné rovině. Element tělesa lze tedy znázornit opět jako čtverec (obr.5). Uvažujme šikmý řez vedený pod úhlem α , přičemž je tento úhel vynesen ve stejném smyslu jako v předchozí sekci.



Audio 1.3

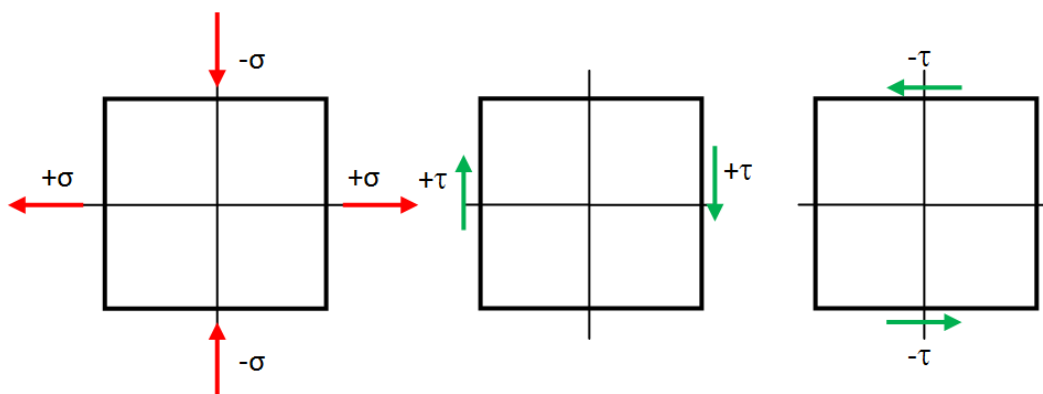


Obrázek 5 Rovinná napjatost

Předpokládejme, že jsou známy složky napětí σ_x , σ_y , τ_{xy} . Pro normálová a smyková napětí je zavedena znaménková dohoda v souladu se smyslem zavedení smykového napětí u jednoosé napjatosti (obr. 6).

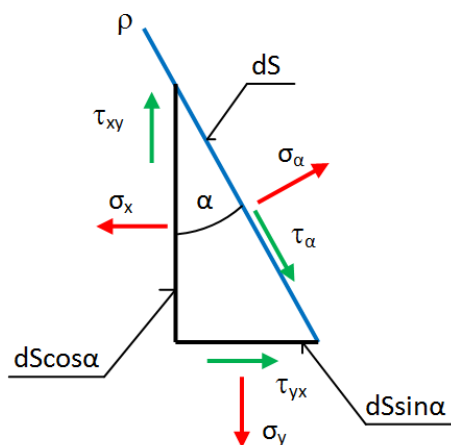
Normálová napětí jsou kladná, jestliže jsou tahová, a záporná, jestliže působí tlakově. Smyková napětí jsou kladná tehdy, jestliže tvoří dvojici ve směru pohybu hodinových ručiček, záporná pro směr opačný.





Obrázek 6 Znaménková dohoda pro normálové a smykové napětí u dvojosé napjatosti

Úlohou je určit složky napětí na obecně skloněné rovině ρ . Aplikujeme tedy metodu řezu. Element (obr. 7) rozdělíme řezem vedeným pod úhlem α na dvě části a dále se zabýváme pouze částí vlevo od řezu. Účinek odstraněné části nahradíme hledanými složkami napětí σ_α a τ_α v rovině ρ (obr. 7).



Obrázek 7 Aplikace metody řezu

Složky napětí určíme z podmínek rovnováhy psanými pro normálový směr a tečný směr k rovině ρ , tedy

$$\sum F_n = 0 \quad (5.4)$$

a po dosazení

$$\sigma_\alpha dS - (\sigma_x \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha) dS \cos \alpha - (\sigma_y \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha) dS \sin \alpha = 0$$

Uvážením, že $\tau_{xy} = |\tau_{yx}|$ a po vydělení dS dostaneme

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5.5)$$



Z podmínky rovnováhy pro směr tečný

$$\sum F_t = 0 \quad (5.6)$$

po dosazení

$$\tau_\alpha dS - (\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha) dS \cos \alpha + (\sigma_y \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha) dS \sin \alpha = 0$$

a úpravě

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (5.7)$$

Zavedením dvojnásobného argumentu 2α vztahy

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

dostaneme po úpravě

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (5.8)$$

a

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (5.9)$$

Při požadavku numerického určení polohy hlavních rovin a velikosti hlavních napětí si musíme uvědomit jejich definici. Potřebujeme tedy určit úhel $\alpha = \alpha_0$, při kterém normálová napětí nabývají extrémní hodnoty. Přesněji chceme znát polohu hlavních rovin. Z podmínky pro extrém

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \quad (5.10)$$

obdržíme

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5.11)$$

Z tvaru rovnic (5.10) a (5.11) je zřejmé, že se jedná opět o parametrické rovnice kružnice. Zvolíme kartézský souřadnicový systém. Na osu úseček budeme opět vynášet normálové napětí σ a na svislou osu smykové napětí τ .

Grafické řešení, zahrnující konstrukci Mohrovy kružnice, stanovení velikosti hlavních napětí i polohy hlavních rovin je popsáno v animaci, dostupné na adrese:

<http://mi21.vsb.cz/flash-animace/konstrukce-mohrovy-kruznice>



Pro odlišný případ, než je uveden na obr.5, je Mohrova kružnice zobrazena na obr.8. Z obr. 8 lze odvodit vztahy pro výpočet hlavních napětí σ_1 a σ_2

$$\sigma_1 = 0S + S1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.12)$$

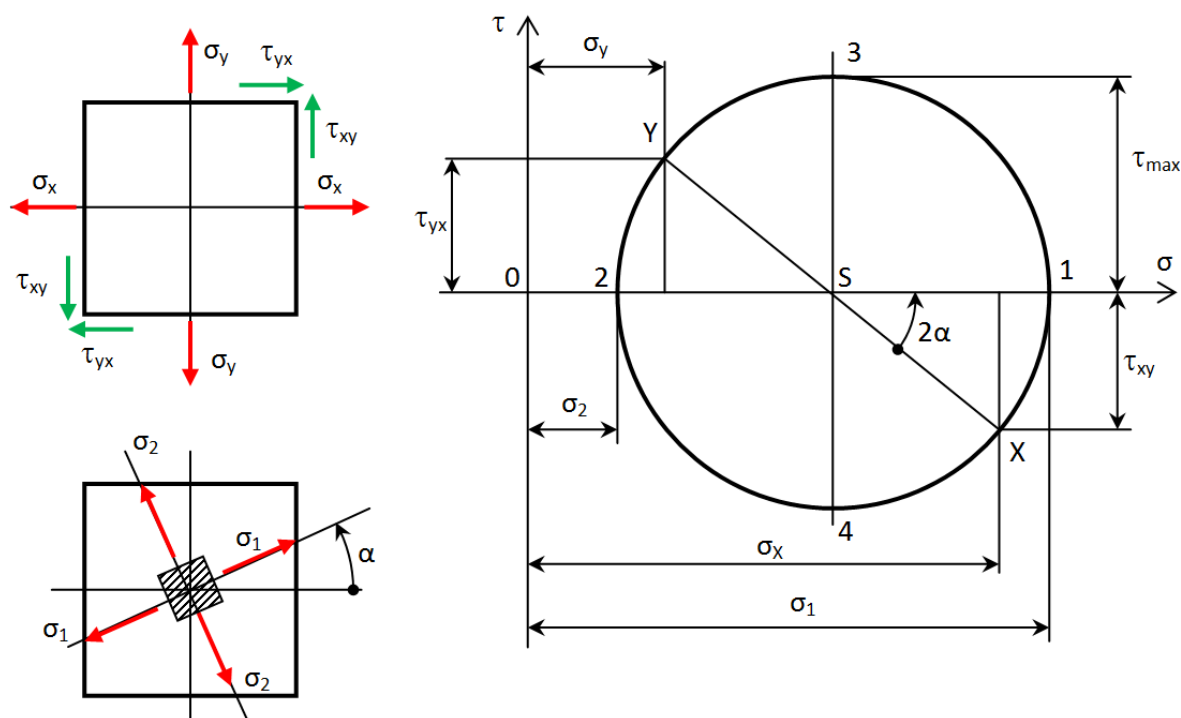
a

$$\sigma_2 = 0S - S2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.13)$$

Úhel 2α je také možno určit z obrázku 8, tedy

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| \quad (5.14)$$

což je v absolutní hodnotě stejný výraz, který byl určen analytickým řešením, viz rovnice (5.11). Z Mohrovy kružnice lze rovněž určit největší smykové napětí (viz zmíněná animace).



Obrázek 8 Mohrova kružnice pro rovinnou napjatost

2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL, Praha, 1971, pp. 376.
- [2] LENERT, J.: Pružnost a pevnost I, 1. vyd., VŠB-TU Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-392-3.
- [3] KUBA, F.: Pružnost a pevnost (základní část), VŠB-TU Ostrava, 5. vydání, 1990, pp. 385.
- [4] KRČÁL, O., FRYDRÝŠEK, K., ADÁMKOVÁ, L.: Příklady z pružnosti a pevnosti 1 (část 2), VŠB-TU Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1826-9, Ostrava, 2008, pp. 124.

Internet

- [5] Matematika pro inženýry 21 století
Modul Pružnost a pevnost
<http://mi21.vsb.cz/modul/pruznost-pevnost>

