

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



VLASTNOSTI A ZKOUŠENÍ MATERIÁLŮ

HYPOTÉZY PEVNOSTI

doc. Ing. Halama Radim, Ph.D.
Ing. František Fojtík, Ph.D.
Ing. Martin Fusek, Ph.D.
Ing. Jaroslav Rojíček, Ph.D.
Dr. Ing. Ludmila Adámková

Ostrava 2013

© doc. Ing. Halama Radim, Ph.D., Ing. František Fojtík, Ph.D., Ing. Martin Fusek, Ph.D., Ing.
Jaroslav Rojíček, Ph.D., Dr. Ing. Ludmila Adámková
© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
ISBN 978-80-248-3027-8



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	HYPOTÉZY PEVNOSTI KONSTRUKČNÍCH MATERIÁLŮ	3
1.1	Úvod	4
1.2	Způsoby stanovení napjatosti a deformace	4
1.3	Optické metody	5
1.4	Tenzometrie	7
1.5	Pevnostní podmínka pro jednoosé namáhání.....	9
1.6	Pevnostní podmínka pro víceosé namáhání	10
1.7	Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu křehkém	12
1.8	Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu houževnatém	14
2	POUŽITÁ LITERATURA	19



1 HYPOTÉZY PEVNOSTI KONSTRUKČNÍCH MATERIÁLŮ



OBSAH KAPITOLY:

Způsoby stanovení napjatosti a deformace

Způsoby stanovení napjatosti a deformace

Pevnostní podmínka pro víceosé namáhání

Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu křehkém

Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu houževnatém



MOTIVACE:

V praxi se při konstrukčním návrhu a pevnostní kontrole součástí při kombinovaném namáhání využívá hypotéz pevnosti. Jejich znalost a aplikovatelnost je důležitou součástí základních znalostí inženýrů.



CÍL:

Způsoby stanovení napjatosti a deformace. Odporová tenzometrie a moderní optické metody.

Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu křehkém.

Deformační energie pro jednoosý a víceosý napěťový stav. Hypotézy pevnosti pro materiály ve stavu houževnatém.

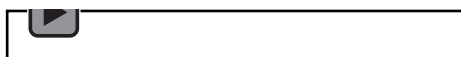


1.1 ÚVOD

V důsledku zatížení vzniká v součástech strojů či konstrukcí obecně víceosá napjatost, která může vést k havarijním stavům. Aby nedocházelo k havarijním (či nepřipustným) stavům namáhání, je nutné navrhovat součásti a konstrukce s jistou dávkou bezpečnosti, která je dána příslušnými normami a předpisy. Při vývoji produktu jsou kladeny zejména dva protichůdné požadavky - bezpečnost a hospodárnost.



Audio 1.1



1.2 ZPŮSOBY STANOVENÍ NAPJATOSTI A DEFORMACE

K návrhu a pevnostní kontrole strojních součástí potřebujeme určit stav napjatosti a stav deformace alespoň v kritických místech. Využívají se tři přístupy:

1. Analytický přístup
 - o vhodný jen pro jednoduché geometrie těles
 - o vždy za jistých zjednodušujících předpokladů
2. Experimentální přístup
 - o metody optické
 - o tenzometrie
 - o rentgenové metody
 - o akustoelastické metody atd.
3. Numerický přístup
 - o metoda konečných prvků (MKP, angl. FEM)
 - o metoda hraničních prvků (MHP, ang. BEM)
 - o bezsíťové metody atd.

Analytický přístup bude podrobně probírán v předmětu Pružnost a pevnost, numerické metody potom v předmětu Úvod do MKP. Nyní se tedy budeme věnovat pouze experimentálním metodám.

I když v posledních desetiletích došlo k výraznému pokroku v oblasti výpočtového modelování, zažívá experimentální mechanika renesanci, zejména v oblasti rozvoje a aplikace optických metod. Samozřejmostí je dnes počítačová podpora experimentu, vedoucí až k jeho automatizaci. O to větší důraz by měl být kladen na důkladné plánování, statistické zpracování a celkové vyhodnocení experimentu. Experimentátor musí mít v dnešní době jak velmi dobré teoretické znalosti, tak solidní povědomí o mechanických vlastnostech a chování konstrukčních materiálů za různých provozních podmínek.

Je zapotřebí zmínit, že mechanické napětí nelze měřit přímo! Vždy vyšetřujeme posuvy nebo deformace a z deformací s užitím konstitučních vztahů napětí vyhodnotíme.



Dle fyzikálního principu máme:

1. Elektrické metody

Mezi jejich hlavní přednosti lze počítat vysokou přesnost, citlivost a rychlost měření, a to i při vysokém počtu vyšetřovaných míst. Výstupní signál může být v analogové nebo digitální formě. Za nevýhody počítáme vyšší kvalifikační požadavky na obsluhu a vyšší investiční náklady na měřicí aparaturu. Nejrozšířenější elektrickou metodou je odporová tenzometrie.

2. Optické metody

Jejich aplikace je podmíněna viditelností vyšetřované plochy povrchu. Za největší jejich výhodu lze považovat bezkontaktnost, která však u klasických metod bývá vykoupena náročností vyhodnocení. Moderní optické metody jsou variabilní, použitelné při měření v provozu a umožňují poměrně rychlé vyhodnocení průběhu deformace či napětí na povrchu zkoumaných těles.

3. Křehké laky

Některé pryskyřice mají nízkou tažnost, proto při aplikaci na povrch po zatížení praskají. Vznikají tak trhliny kolmé na směr největšího hlavního napětí (viz také Rankinova hypotéza v této kapitole). Tato metoda je vhodná pro nalezení kritických míst a směrů hlavních napětí na povrchu těles.

4. Ultrazvukové metody

Kromě defektoskopie se tyto metody používají ke stanovení velikosti aplikovaných i zbytkových napětí, ale také pro určení elastických konstant materiálu či měření tloušťky.

5. Rentgenografie

Tato metoda je založena na difrakci RTG paprsků v polykrystalických materiálech. Můžeme jí určit změnu vzdálenosti atomových rovin v důsledku pružných deformací. Používá se zejména ke stanovení zbytkových napětí.

6. Termální emise

Využívá se přeměny deformační energie v tepelnou při cyklickém namáhání. Teplotní změny v důsledku napjatosti jsou v tisícinách až setinách stupně Kelvina. Citlivost metody je pro oceli až 1MPa.

7. Hybridní metody

Jedná se o velmi slibný přístup, kdy se kombinují experimentální a numerické metody.



Audio 1.2



1.3 OPTICKÉ METODY

Cílem této přednášky není podrobný výklad všech metod měření posuvů a deformací, proto se budeme soustředit jen na nejpoužívanější metody:

1. Metoda moiré

Je založena na interferenci světla na optických mřížkách, rozdíl mezi deformovanou měřicí a referenční mřížkou dává vzniknout moiré pruhům, které odpovídají posuvu o rozteč mřížky. S Moiré efektem se setkáváme v životě poměrně často. Může být pozorován například při překrývání průsvitné látky, apod.



2. Fotoelasticimetrie

Využívá se fotoelasticimetrického jevu, kdy se některé průhledné amorfnní materiály při zatížení mění na opticky anizotropní. Jedná se o fyzikální jev, který nazýváme dočasným dvojlomem. Příkladem je obr. 1, kde je patrný model maticového klíče. Při průchodu usměrněného (polarizovaného) světla modelem se zobrazí čáry spojující body s konstantním rozdílem hlavních napětí (izochromaty) a čáry, jejichž body mají stejný sklon hlavních napětí (izokliny). Vzhledem k tomu, že se používá polarizované světlo, nazývá se fotoelasticimetrický přístroj polariskop. Ve fotoelasticimetrii se využívá buď modelové podobnosti (transmisní fotoelasticimetrie - experimenty na modelech z opticky citlivého materiálu) nebo se nanáší opticky citlivá vrstva na povrch vyšetřované součásti (reflexní fotoelasticimetrie). U výrobků z opticky citlivých materiálů se tato metoda využívá také pro stanovení velikosti zbytkových napětí, má své uplatnění i při výrobě zrcadel apod.



Obrázek 1 Fotografie modelu maticového klíče z fotoelasticimetrického experimentu

3. Koherenční interferometrické metody

Koherenční zrnitost je optický jev, který lze například pozorovat, když těleso s drsným odrazným povrchem osvítime koherentním optickým svazkem. Získáme viditelné temné a světlé skvrny na stínítku, umístěném kdekoli před předmětem, v tzv. poli koherenční zrnitosti. Při vyhodnocení se využívá statistických vlastností optických polí koherenční zrnitosti (tzv. speklů).

Metody, využívající koherenční zrnitosti, umožňují měřit statické i dynamické deformace těles. Nejrozšířenější jsou metody:

a) spekl interferometrie (ESPI – Electronic Speckle Pattern Interferometry)

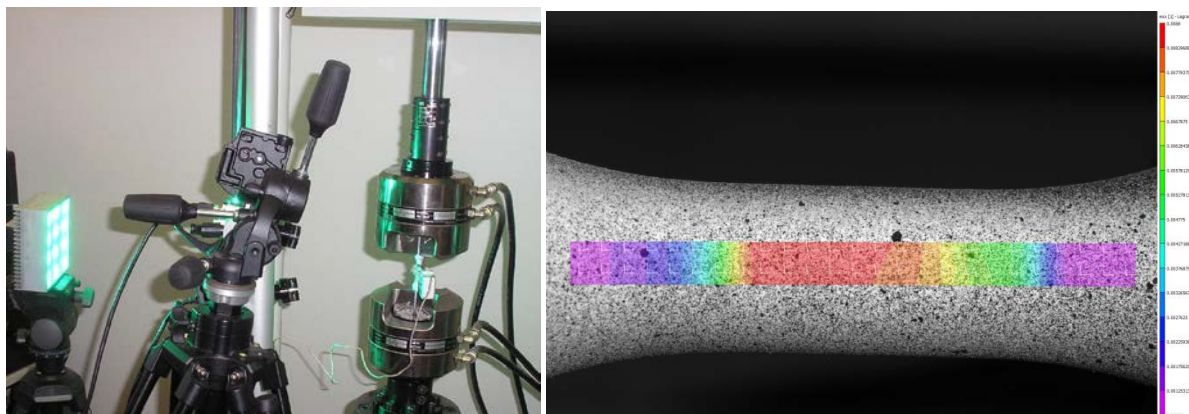
Výstupem je zpravidla systém jednoduchých interferenčních proužků se zřejmou speklovou strukturou. Využívá se přirozené koherentní zrnitosti povrchu materiálu. Metoda je vysoce citlivá, téměř nezávisle na šířce zorného pole, proto se přístroji ESPI také říká optický tenzometr. Tato metoda je vhodná spíše pro malé deformace.

b) metoda korelace digitálního obrazu (DICM - Digital Image Correlation Method)

Výstupem metody už není charakteristický interferenční obraz. Srovnáním intenzity barev jednotlivých pixelů na po sobě jdoucích digitálních fotografiích povrchu deformovaného tělesa, který je u mnoha materiálů nutno nejprve opatřit kontrastní vrstvou, lze získat průběh posuvů na povrchu zkoumaného tělesa. Při požadavku měření 3D deformací a posuvů je nutno použít dvě CCD kamery, které se zaměří na zkoumaný objekt z různých úhlů. Ukázka z měření deformací přístrojem Dantec Dynamics Q400 u



únavové zkoušky je na obr.2. Přesnost měření souvisí zejména s rozměry zabírané plochy a s rozlišením CCD kamer. Metoda je velmi vhodná i pro měření velkých deformací.



Obrázek 2 Fotografie z měření deformací metodou DICM

1.4 TENZOMETRIE

Tenzometrické metody jsou založeny na měření změny vzdálenosti dvou bodů tělesa v důsledku změny jeho zatížení. Čidla, která umožňují tato měření, se nazývají tenzometry.

Podle fyzikálního principu měření a dalšího zpracování naměřené veličiny lze základní typy tenzometrů rozčlenit na tenzometry:

- mechanické
- mechanicko – optické
- strunové
- pneumatické
- fotoelasticimetrické
- elektrické aj.

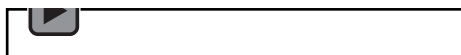
Největší uplatnění mají v dnešní době elektrické tenzometry, které lze dále rozdělit na:

- indukční
- kapacitní
- odporové

Z nich se nejvíce používají elektrické odporové tenzometry, kterým bude věnována pozornost. Velké rozšíření elektrických tenzometrů nastalo v důsledku jejich velkých výhod oproti předchozím typům. Výhody jsou hlavně v možnosti dálkového přenosu a odečítání měřených údajů. Měření lze realizovat na místech velmi těžce přístupných a těmito tenzometry lze měřit i dynamické děje.



Audio 1.3



Elektrické odporové tenzometry

Princip měření pomocí elektrických odporových tenzometrů je založen na závislosti změny elektrického odporu vodiče na jeho mechanické deformaci. Ohmický odpor vodiče R v závislosti na jeho délce l , ploše průřezu S a měrném odporu materiálu vodiče ρ je dán obecně vztahem

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (6.1)$$

Uvažujeme – li všechny tyto veličiny během deformace jako proměnné, pak pro totální diferenciál funkce (6.1) platí

$$dR = \frac{l}{S} \cdot d\rho + \frac{\rho}{S} \cdot dl - \frac{\rho \cdot l}{S^2} \cdot dS \quad (6.2)$$

Z rovnice (6.1) a (6.2) plyne vztah

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dS}{S} \quad (6.3)$$

Pro určitou konečnou změnu odporu R a úpravách můžeme rovnici (6.3) přepsat na tvar

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon \quad (6.4)$$

kde ε je poměrné prodloužení, veličina k se nazývá deformační součinitel (příp. k – faktor) a lze ji určit experimentálně (cejchovním měřením). Pro většinu běžně dostupných tenzometrů bývá $k \approx 2$ a pro jejich výrobu se používají materiály, pro které je tento k – faktor konstantní ve velkém rozsahu deformací. Změny odporu tenzometrů ΔR v důsledku jejich deformace při tenzometrických měřeních jsou velmi malé. Pro pružné deformace v rozsahu 10^{-6} až 10^{-3} a tenzometr s nominálním odporem 120Ω dle rovnice (6.4) získáme

$$\Delta R = R k \varepsilon = 120 \cdot 2 (10^{-6} \div 10^{-3}) = 2,4 (10^{-4} \div 10^{-1}) \Omega$$

Měření takovýchto malých odporových změn se prakticky provádí pomocí Wheatstonova můstku.

Podle druhu odporového materiálu lze tyto tenzometry rozdělit na:

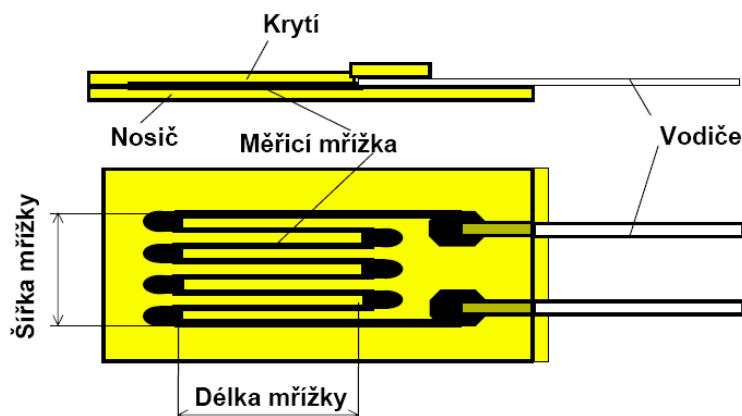
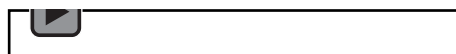
- uhlíkové
- polovodičové
- kovové (drátkové a fóliové)



Nejvíce používané jsou fóliové tenzometry. Tyto tenzometry jsou zhotoveny fotochemickým způsobem podobně jako plošné spoje z konstantanové anebo chromnikové fólie tloušťky 5 – 15 μm . Jejich výhodou oproti drátkovým tenzometrům je snadnější výroba tvarově složitějších snímačů, lepší odvod tepla, což umožňuje zvýšené proudové zatížení tenzometrů a tím i zvýšení jejich citlivosti a menší příčná citlivost. Příklad fóliového tenzometru je uveden na obr. 3.



Audio 1.4



Obrázek 3 Příklad provedení fóliového tenzometru

Podle tvaru mřížky a účelu měření se vyrábějí různé typy tenzometrů, z nichž nejčastěji používané jsou následující:

- Jednoduché tenzometry pro měření deformace v jednom směru (obr. 3).
- Tenzometrické kříže pro měření deformací ve dvou na sobě kolmých směrech.
- Tenzometrické šípky pro měření smykových napětí a kroutících momentů.
- Tenzometrické růžice pro zjištění velikosti a směru hlavních napětí na povrchu součásti (pravoúhlé resp. delta růžice).
- Membránové tenzometry pro měření napětí na membránách.
- Tenzometrické řetězce pro měření gradientu napětí.
- Růžice pro měření zbytkových napětí a další.

1.5 PEVNOSTNÍ PODMÍNKA PRO JEDNOOSÉ NAMÁHÁNÍ

Materiály křehké za pokojové teploty obvykle mají výrazně vyšší mez pevnosti v tlaku R_{md} než mez pevnosti v tahu R_{mt} na rozdíl od materiálů dobře tvárných, kdy je mez kluzu v tahu a v tlaku přibližně stejná.

Podmínka pevnosti pro tah/tlak se předepisuje:

- a) pro materiály ve stavu houževnatém



$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D$$

b) pro materiály ve stavu křehkém

$$\sigma_{D,d} \leq \sigma_{\max} \leq \sigma_{D,t}$$

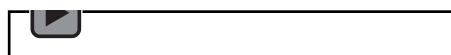
přičemž pro materiály ve stavu houževnatém je uvažováno $\sigma_{\max}$ v absolutní hodnotě. Jak si ukážeme v příští přednášce, charakter lomového chování téhož materiálu se mění s teplotou, proto je použito výstižnější označení materiál ve stavu houževnatém (křehkém) a nikoliv houževnatý (křehký) materiál.

Dovolené napětí se pro houževnaté (tvárné) materiály stanovuje z meze kluzu R_e podělením koeficientem bezpečnosti, který je vždy větší než 1.

U křehkých materiálů se analogicky dovolené napětí stanovuje z meze pevnosti R_m .



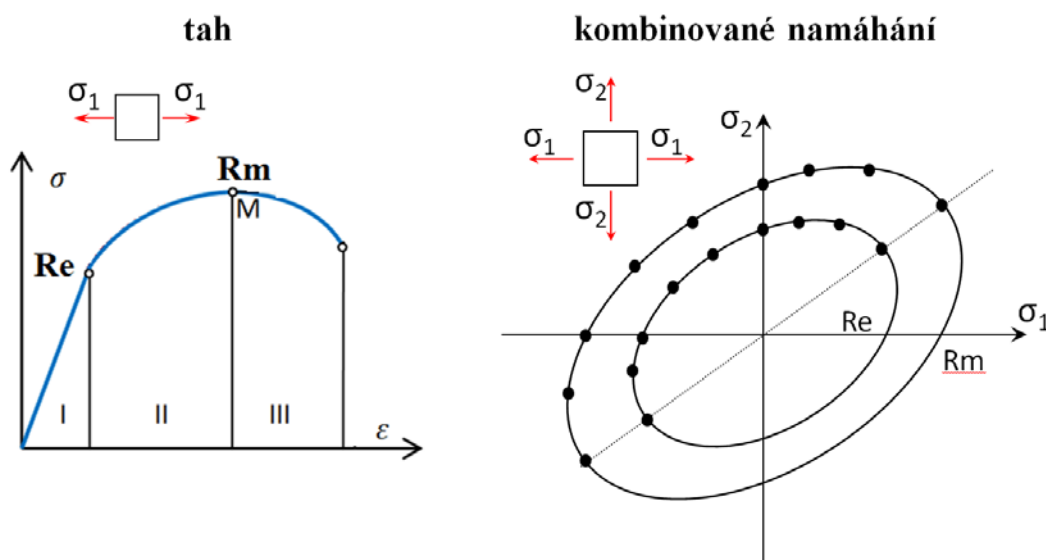
Audio 1.5



1.6 PEVNOSTNÍ PODMÍNKA PRO VÍCEOSÉ NAMÁHÁNÍ

V případě víceosého namáhání máme obecně tři hlavní napětí, proto je situace komplikovanější a potřebujeme nějakou „hypotézu pevnosti“.

Hypotézy pevnosti jsou platné pro daný typ materiálu (houževnatý, křehký, krystalický, polykrystalický, izotropní, anizotropní, amorfni, ...), daný způsob zatěžování (staticky, dynamicky, teplotně, ...), velikost konstrukce (větší těleso má více vnitřních i vnějších vad), přičemž se obvykle vztahují k limitnímu stavu dosažení meze kluzu či dosažení meze pevnosti (obr. 4).



Obrázek 4 Charakteristické hodnoty ve smluvním diagramu (vlevo) a znázornění mezních čar pro dvojsovu napjatost

Prostorová napjatost v tělese z izotropního a homogenního materiálu je dána buď šesti složkami napětí σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} a τ_{zx} ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému



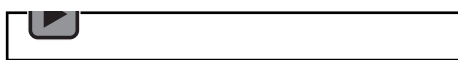
nebo třemi hlavními napětími $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ v systému hlavních napětí (souřadné osy jsou normálami hlavních rovin, tzv. hlavní souřadnicový systém). Prostor určený hlavním souřadnicovým systémem se nazývá Haighův prostor. Pro trojosou napjatost je přechod od elastického k plastickému chování a hranice celistvosti materiálu dána mezními plochami. Pro dvojosou napjatost je $\sigma_3 = 0$ a uvedené hranice jsou mezními čarami (obr. 4 vpravo).

Haighovy mezní plochy se stanovují fyzikálním přístupem (úvaha meziatomových vazeb, dislokační teorie atd.), experimentálně (zkoušky při různých typech napjatostí – nejčastěji kombinované namáhání – tah, krut, vnitřní přetlak), hypotetickým přístupem, viz další sekce, nebo jejich kombinacemi.

Nejčastěji se objevuje u hypotéz pevnosti pro víceosé namáhání tato základní myšlenka: Získaný napěťový stav převádíme na ekvivalentní jednoosý napěťový stav – stanovujeme tzv. redukované (ekvivalentní) napětí (obr. 5).



Audio 1.6



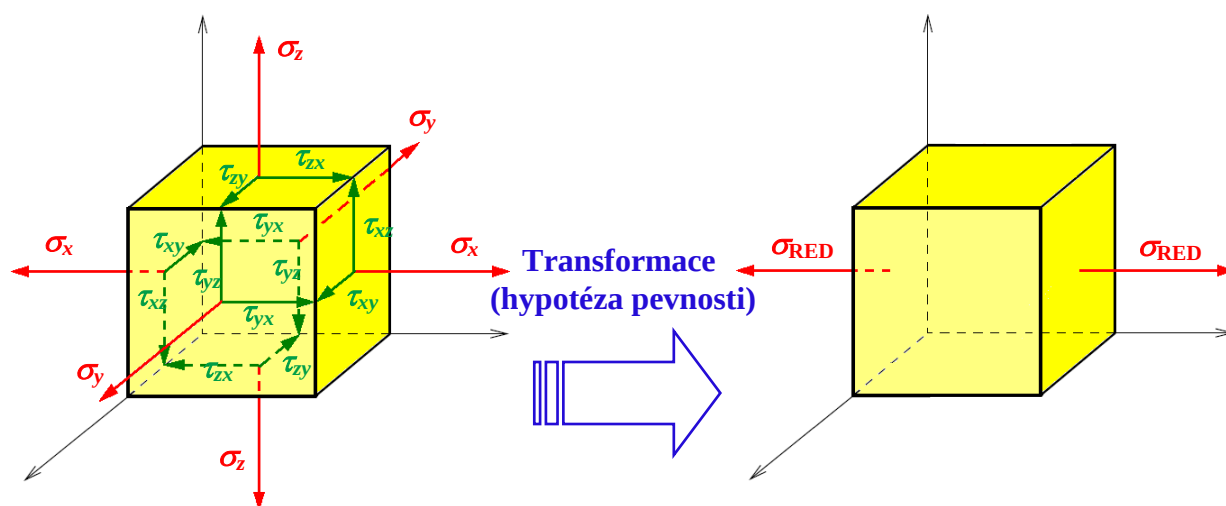
Podmínka pevnosti pro víceosé namáhání se pak předepisuje takto:

- a) pro materiály ve stavu houževnatém

$$\sigma_{red} \leq \sigma_D$$

- b) pro materiály ve stavu křehkém

$$\sigma_{D,d} \leq \sigma_{red} \leq \sigma_{D,t}$$



Obrázek 5 Převodění prostorové napjatosti na ekvivalentní jednoosou napjatost

V dalším textu je věnována pozornost jen izotropním a homogenním materiálům pro statické způsoby zatěžování bez uvažování vlivu teploty. Prezentovány budou jen nejpoužívanější hypotézy.



1.7 HYPOTÉZY PEVNOSTI PRO MATERIÁLY VE STAVU KŘEHKÉM

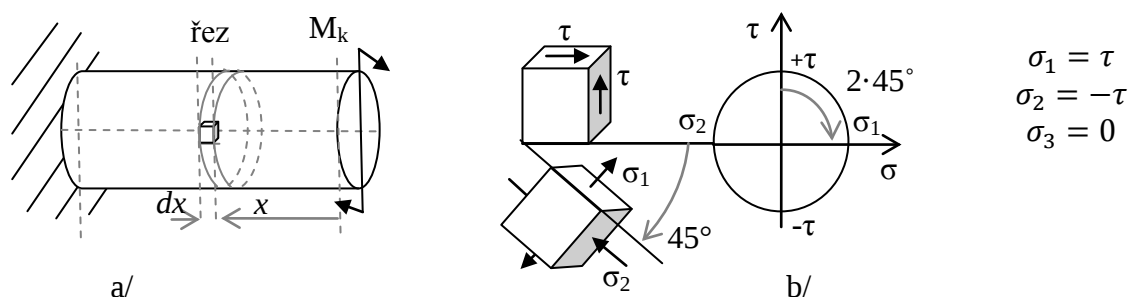
RANKINOVA HYPOTÉZA

Je také nazývána hypotézou maximálních normálových napětí – z hlediska mezního stavu je určující největší respektive nejmenší hlavní napětí.

Pro podmínku pevnosti pak platí:

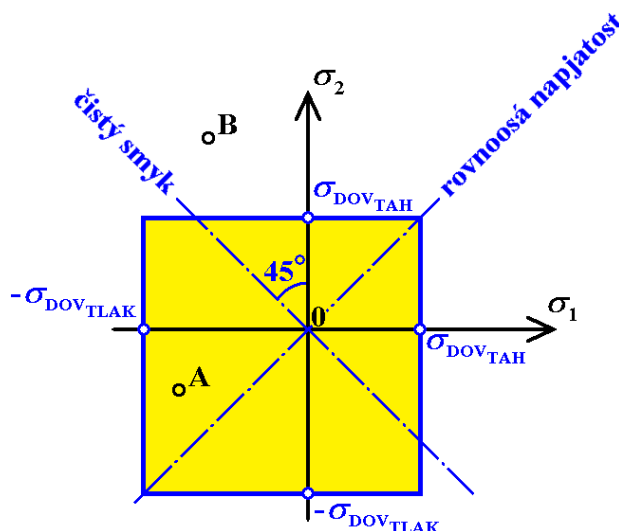
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}, \\ -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}, \\ -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_3 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Platnost hypotézy lze prezentovat jednoduchým experimentem s křídou. Pro namáhání tahem se křída zlomí v rovině příčného řezu, což odpovídá rovině maximálního hlavního napětí σ_1 (viz přednáška 5). V případě namáhání krutem dojde k lomu přibližně pod úhlem 45° , což opět odpovídá rovině maximálního hlavního napětí σ_1 , jak je patrné z Mohrovy kružnice pro prostý smyk (speciální případ rovinné napjatosti – tentýž způsob konstrukce), uvedené na obr. 6.



Obrázek 6 Transformace prostorové napjatosti na ekvivalentní jednoosou napjatost

Pro napjatosti blízké hydrostatickému tlaku ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$) však tato hypotéza odporuje naměřeným výsledkům. Grafická interpretace této hypotézy je pro rovinnou napjatost znázorněna na obr.7, kde bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obrázek 7 Mezní čáry pro Rankinovu hypotézu (rovinná napjatost)

MOHROVA HYPOTÉZA

V tomto případě její lineární varianta, známá také jako Mohr-Coulomb, se používá pro materiály, jejichž pevnost v tahu je menší než pevnost v tlaku. Není vhodná pro napjatosti blízké rovnoměrnému tahu. Tato hypotéza respektuje vliv normálových i smykových napětí. Podmínka pevnosti

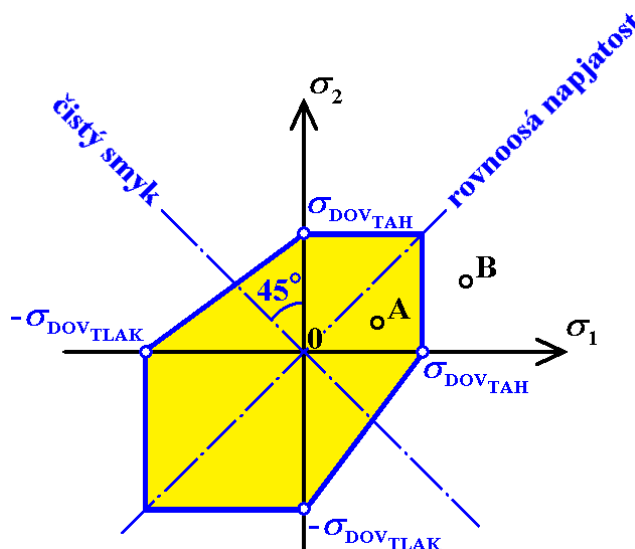
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{DOV_TAH}}}{\sigma_{\text{DOV_TLAK}}} \sigma_2 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}, \\ -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_2 - \frac{\sigma_{\text{DOV_TAH}}}{\sigma_{\text{DOV_TLAK}}} \sigma_3 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}, \\ -\sigma_{\text{DOV_TLAK}} &\leq \sigma_3 - \frac{\sigma_{\text{DOV_TAH}}}{\sigma_{\text{DOV_TLAK}}} \sigma_1 \leq \sigma_{\text{DOV_TAH}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

vychází z Mohrovy kružnice pro dovolené tahové a Mohrovy kružnice pro dovolené tlakové namáhání. Grafická interpretace této hypotézy je pro rovinnou napjatost znázorněna na obr.8, kde bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Audio 1.7





Obrázek 8

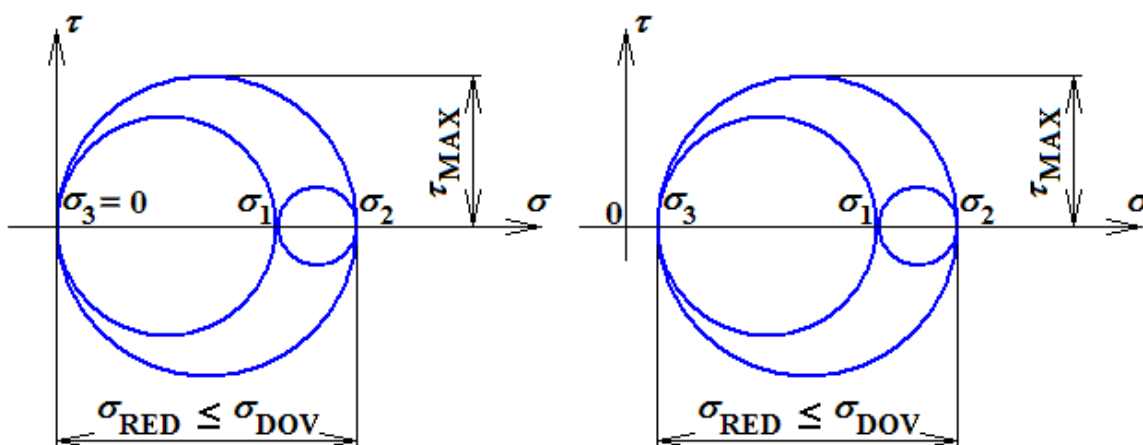
Mezní čáry pro Mohrovu hypotézu (rovinná napjatost)

1.8 HYPOTÉZY PEVNOSTI PRO MATERIÁLY VE STAVU HOUŽEVNATÉM

Guestova hypotéza

Jedná se o hypotézu maximálních smykových napětí (Guest, Tresca, Guest-Tresca-Coulomb) – k meznímu stavu dochází, když největší smykové napětí dosáhne dovolené hodnoty. Jestliže si uvědomíme, jak se stanoví maximální smykové napětí z Mohrova zobrazení (obr. 9), můžeme podmínku pevnosti vyjádřit takto

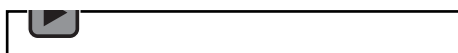
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{DOV}, \\ -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_{DOV}, \\ -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_{DOV}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

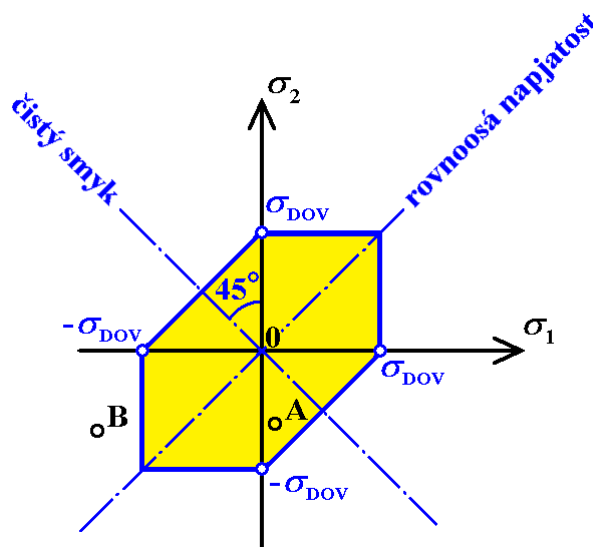


Obrázek 9 Stanovení maximálních smykových napětí pro případ rovinné (vlevo) a prostorové napjatosti

Grafická interpretace této hypotézy je pro rovinnou napjatost znázorněna na obr.10, kde bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti. Guestova hypotéza patří mezi nejpoužívanější hypotézy. Její výhodou je jednoduchost aplikace.

Audio 1.8





Obrázek 10 Mezní čáry pro Guestovu hypotézu (rovinná napjatost)

Hypotéza Beltramiho

Hypotéza maximální hustoty celkové deformační energie (Beltrami, Beltrami-Haigh, Beltrami-Mises-Hencky, BMH) – k meznímu stavu dochází, jestliže hustota celkové deformační energie U_0 dosáhne dovolené hodnoty U_{0DOV} .



Audio 1.9



K vysvětlení pojmu deformační energie budeme uvažovat případ prostého tahu a kvazistatické zatěžování, pak lze zanedbat kinetickou složku energie. Veškerá práce vnější síly W [J] se přemění v deformační energii (tj. v potenciální energii deformace) U [J] akumulovanou v tělese. Pro výslednou práci na diferenciálu objemu $dx dy dz = dV$ pak platí

$$dW = dU = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon dx dy dz = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon dV \quad (6.8)$$

Hustota deformační energie je pak deformační energie vztažená na jednotkový objem

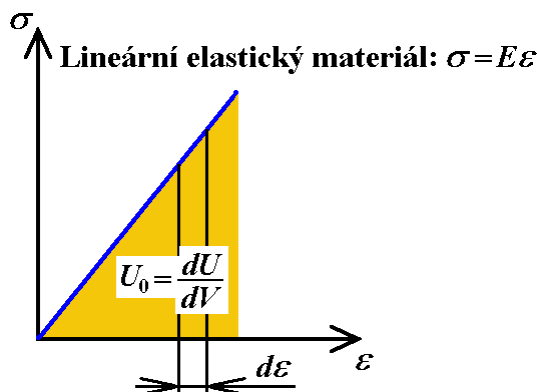
$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad (6.9)$$

Pro lineárně pružný materiál, lze po aplikaci Hookeova zákona psát

$$U_0 = \int_0^\varepsilon E \varepsilon d\varepsilon = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (6.10)$$

Hustotu deformační energie tedy reprezentuje plocha vystínované oblasti v Obr.11.





Obrázek 11 Znázornění hustoty deformační energie v tahovém diagramu

Hustotu celkové deformační energie pro trojosou napjatost můžeme vyjádřit s využitím principu superpozice. Vyjádříme-li napjatost v uvažovaném bodě tělesa pomocí hlavních napětí, můžeme hustotu celkové deformační energie napsat jako součet hustot deformační energie pro tři jednoosé případy namáhání

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 \quad (6.11)$$

Aplikujeme-li nyní obecný Hookeův zákon získáme

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_1 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{2} \sigma_2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{1}{2} \sigma_3 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \quad (6.12)$$

respektive po úpravě

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (6.13)$$

Pro případ tahu na úrovni dovoleného napětí ($\sigma_1 = \sigma_{DOV}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) pak plyne

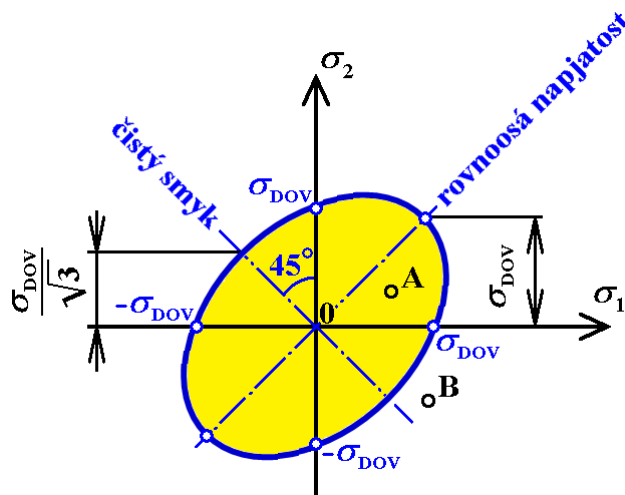
$$U_{0DOV} = \frac{\sigma_{DOV}^2}{2E} \quad (6.14)$$

Dle definice musí platit $U_0 \leq U_{0DOV}$, tudíž podmínku pevnosti získáme srovnáním výrazů (6.13) a (6.14), pak

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{DOV} \quad (6.15)$$

Grafická interpretace Beltramiho hypotézy je pro rovinnou napjatost znázorněna na obr. 12, kde bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.





Obrázek 13 Mezní čára pro HMH hypotézu (rovinná napjatost)

2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL, Praha, 1971, pp. 376.
- [2] TREBUŇA, F., ŠIMČÁK, F.: Odolnosť prvkov mechanických sústav, Edícia odbornej a vedckej literatúry, Technická univerzita v Košiciach, Košice, 2004, Slovensko, ISBN 80-8073-148-9
- [3] LENERT, J.: Pružnost a pevnost I, 1. vyd., VŠB-TU Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-392-3.
- [4] KUBA, F.: Pružnost a pevnost (základní část), VŠB-TU Ostrava, 5. vydání, 1990, pp. 385.
- [5] KRČÁL, O., FRYDRÝŠEK, K., ADÁMKOVÁ, L.: Příklady z pružnosti a pevnosti 1 (část 1), VŠB-TU Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1826-9, Ostrava, 2008, pp. 124.

Internet

- [6] Katedra pružnosti a pevnosti VŠB-TU Ostrava
Studijní materiály vybraných předmětů, moduly Nauka o materiálu a Pružnost a pevnost
<http://www.339.vsb.cz/>
- [7] Matematika pro inženýry 21 století
Modul Pružnost a pevnost
<http://mi21.vsb.cz/modul/pruznost-pevnost>

