INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA**
**FAKULTA STROJNÍ**

# FYZIKA I

## Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený translační pohyb

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

**Ostrava 2013**



ISBN 978-80-248-3031-5

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

# OBSAH

# 1 ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ TRANSLAČNÍ POHYB

**STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:**

Poloha částice, souřadnice a polohový vektor

Trajektorie pohybu

Průměrná a okamžitá rychlost

Průměrné a okamžité zrychlení

Tečné a normálové zrychlení

Pohyb přímočarý rovnoměrný

Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený

**MOTIVACE:**

Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený translační pohyb je důležitý pro všechny lidské činnosti. Polohu částice (tělesa) je nutné stanovit při popisu jakékoliv události. Z pojmů jako je dráha, rychlost a zrychlení se počítá při popisu jakéhokoliv tělesa, zejména při popisu dopravních prostředků, pohybu těles při manipulaci a popisu zvláštních druhů pojmů, při kterých částice nebo těleso vykovává posuvný pohyb.

## 1.1 ÚVOD

Pohyb částice z hlediska kinematiky lze popsat vyjádřením funkční závislosti parametrů vyjadřujících polohu částice na čase. Kinematika popisuje pohyb částice pomocí veličiny jako je dráha, rychlost, zrychlení.

## 1.2 DEFINICE

### 1.2.1 Souřadnice a polohový vektor částice

Polohu částice můžeme popsat souřadnicemi nebo polohovým vektorem $\vec{r}$ v dané souřadnicové soustavě.

Souřadnicemi se určuje místo (bod), v němž se částice nachází v určitém časovém okamžiku. Jsou to tři (trojrozměrný prostor) nebo dva (dvojrozměrný prostor) nezávislé parametry.

Ve fyzice používáme nejčastěji následující souřadnice v rovině:

- Kartézská (ortonormální) souřadnicová soustava (0; *x*, *y*).
- Polární souřadnicová soustava (0; *r*, $\varphi$), kde $\overline{0P} = r$ je tzv. průvodič (radiusvektor) bodu *P*, orientovaný úhel $\varphi$ je polární úhel a jeho velikost se nazývá argument.

Polohovým vektorem $\vec{r}$ (radiusvektorem) je určena poloha částice jen jednou rovnicí

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)} \text{ nebo } x = x\,(t),\ y = y\,(t),\ z = z\,(t) \tag{2.6}$$

Rovnice (2.6) se nazývají parametrické rovnice trajektorie pro posuvný pohyb (čas *t* je parametr).

Trajektorie pohybu je souhrn všech poloh, kterými projde částice při svém plynulém časovém postupu.

Polohový vektor $\vec{r}$ hmotného bodu *P* vzhledem k počátku souřadnicové soustavy 0 je orientovaná úsečka, jejíž počátek je v bodě 0 a konec v bodě *P*. V kartézské souřadnicové soustavě platí

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}} \tag{2.7}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory a *x*, *y*, *z* jsou kartézské souřadnice bodu *P*.

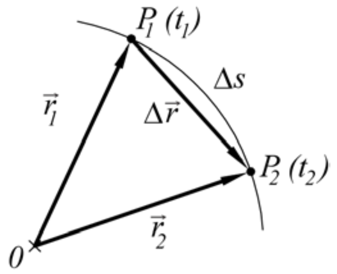
Pro určení směru vektoru $\vec{r}$ a jeho velikosti platí vztahy

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{r};\ \cos\beta = \frac{y}{r};\ \cos\gamma = \frac{z}{r};\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{2.8}$$

kde úhlům $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se říká směrové úhly a jejich kosinům směrové kosiny.

### 1.2.2 Průměrná a okamžitá rychlost

Rozdíl polohových vektorů ve dvou dostatečně blízkých časech $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (obr. 2.8) udává směr pohybu a velikost dráhy $\Delta s$ a to tím přesněji, čím je tento interval menší. Pak platí $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$. V limitě je shoda úplná, proto lze psát $|d\vec{r}| = ds$, kde $ds$ je tzv. element dráhy.




**Obr. 2.8 K popisu střední rychlosti**

K popisu pohybu je důležitá znalost změny dráhy za čas (rychlost) a změny rychlosti za čas (zrychlení).

Nachází-li se částice v čase $t_1$ v bodě $P_1$ (obr. 2.8) a v čase $t_2$ v bodě $P_2$ a je-li $\Delta s$ dosažená dráha mezi $P_1$ a $P_2$, pak pro $\Delta t = t_2 - t_1$ definujeme tzv. průměrnou rychlost (velikost rychlosti) mezi body $P_1$ a $P_2$

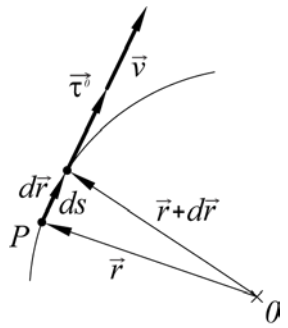
$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \tag{2.9}$$

Pro $\Delta t \to 0$ je

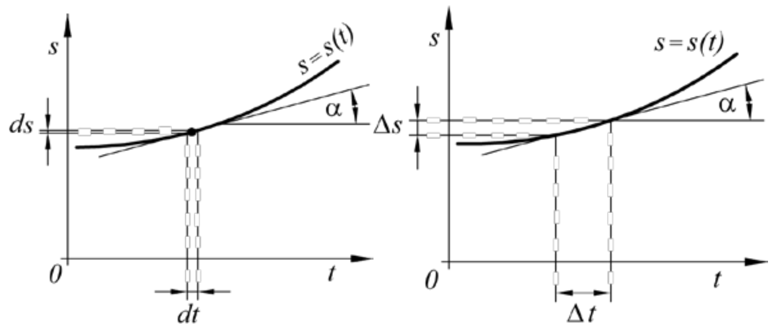
$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}} \tag{2.10}$$

a velikost okamžité rychlosti $v$ (obr. 2.9) vyjadřuje

**podíl elementárních přírůstků dráhy *ds* a času *dt***
**první derivaci dráhy podle času**
**časovou změnu dráhy.**




**Obr. 2.9 K popisu okamžité rychlosti**




**Obr. 2.10 Graf funkce *s* = *s* (*t*)**

Geometricky je podíl vyjadřující průměrnou rychlost roven směrnici sečny (tg $\alpha$), (obr. 2.10a) a podíl vyjadřující okamžitou rychlost roven směrnici tečny v grafu funkce $s = s\,(t)$ (obr. 2.10b). Vektorově

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}^{\,0}} \tag{2.11}$$

kde $\vec{\tau}^{\,0}$ je jednotkový vektor určený tečnou v daném bodě a směrem pohybu. Pak

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}} \tag{2.12}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},\ \text{kde}\ v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.13}$$

Velikost a směr rychlosti určují pomocí souřadnic rychlosti $v_x$, $v_y$, $v_z$ vztahy

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},\quad \cos\alpha = \frac{v_x}{v},\quad \cos\beta = \frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}} \tag{2.14}$$

### 1.2.3 Průměrné a okamžité zrychlení

Má-li částice v čase $t_1$ rychlost $\vec{v}_1$ a v čase $t_2$ rychlost $\vec{v}_2$, pak pro $\Delta t = t_2 - t_1$ a $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ definujeme

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \tag{2.15}$$

jako průměrné zrychlení na úseku trajektorie mezi body $P_1$ a $P_2$.

Pro $\Delta t \to 0$ je

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} \tag{2.16}$$

vektor okamžitého zrychlení a vyjadřuje

**podíl elementárních přírůstků rychlosti $d\vec{v}$ a času $dt$**
**první derivaci rychlosti podle času**
**časovou změnu rychlosti**
**druhou derivaci polohového vektoru podle času.**

Geometricky je podíl vyjadřující průměrné zrychlení roven směrnicí sečny a podíl vyjadřující okamžité zrychlení roven směrnici tečny v grafu $v = v\,(t)$.

V souřadnicích

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \tag{2.17}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \text{kde} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}} \tag{2.18}$$

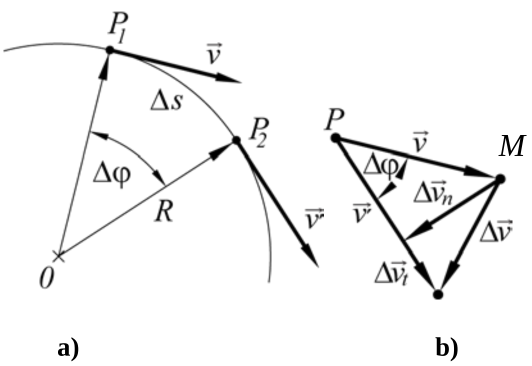
Velikost a směr zrychlení určují vztahy

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \ \cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a},} \tag{2.19}$$

Jednotka dráhy $[s]$ = m, rychlosti $[v]$ = m·s$^{-1}$, zrychlení $[a]$ = m·s$^{-2}$.

Z rozkladu vektoru zrychlení $\vec{a}$ do dvou na sebe kolmých složek (směr tečny ke křivce a směr hlavní normály) najdeme vztahy pro tzv. tečné a normálové zrychlení.

Na trajektorii v obr. 2.11a) zvolme dva body $P_1$ a $P_2$ a vektory rychlosti $\vec{v}$ a $\vec{v}'$. Posuňme vektory rychlosti $\vec{v}$ a $\vec{v}'$ do jednoho bodu $P$ a jejich rozdíl označme $\Delta\vec{v}$ (obr. 2.11b). Rozložme vektor $\Delta\vec{v}$ na $\Delta\vec{v}_t$ ve směru vektoru $\vec{v}'$ a na $\Delta\vec{v}_n$ tak, že z bodu $M$ spustíme kolmici na vektor rychlosti $\vec{v}'$.




**Obr. 2.11 K určení tečného a normálového zrychlení**

Pak platí:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n \tag{2.20}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n} \tag{2.21}$$

Z obr. 2.11b) plyne $\Delta v_t = v' - v\cos\Delta\varphi$ . Pak

$$a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

poněvadž $\cos\Delta\varphi$ v limitě pro $\Delta t \to 0$ konverguje k jedné.

### 1.2.4 Tečné a normálové zrychlení

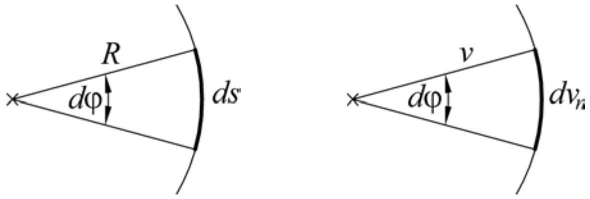
Tečné zrychlení $\vec{a}_t$ souvisí se změnou velikosti rychlosti a má směr jednotkového vektoru $\vec{\tau}^{\,0}$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^{\,0} \tag{2.22}$$

Normálové zrychlení $\vec{a}_n$ souvisí se změnou zakřivení trajektorie a má směr jednotkového vektoru $\vec{R}^0$ (normály ke křivce)

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt}\vec{R}^0 \tag{2.23}$$

Podle obr. 2.12 a), b) platí




a) b)

**Obr. 2.12 K určení délky oblouku křivky**

$$ds = R d\varphi$$

$$dv_n = v d\varphi$$

odtud

$$dv_n = v\frac{ds}{R}$$

Pak pro normálové zrychlení je

$$a_n = \frac{vds}{Rdt} = \frac{v^2}{R}\,,\;\; \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{R}^0, \tag{2.24}$$

kde $\vec{R}^0$ je jednotkový vektor ve směru hlavní normály křivky orientovaný ke středu křivosti.

Zrychlení lze vyjádřit pomocí tečného a normálového zrychlení ve tvaru

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{v}^0 + \frac{v^2}{R}\vec{R}^0 \tag{2.25}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}} \tag{2.26}$$

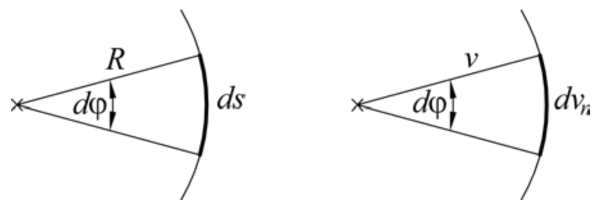
### 1.2.5 Charakteristika pohybu podle rychlosti a zrychlení

Tečné zrychlení $\vec{a}_t$ souvisí se změnou velikosti rychlosti a má směr jednotkového vektoru $\vec{\tau}^0$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0 \tag{2.22}$$

Normálové zrychlení $\vec{a}_n$ souvisí se změnou zakřivení trajektorie a má směr jednotkového vektoru $\vec{R}^0$ (normály ke křivce)

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{dv_n}{dt}\vec{R}^0 \tag{2.23}$$




**a) b)**

**Obr. 2.12 K určení délky oblouku křivky**

Podle obr. 2.12 a), b) platí

$$ds = Rd\varphi$$

$$dv_n = vd\varphi$$

odtud

$$dv_n = v\frac{ds}{R}$$

Pak pro normálové zrychlení je

$$a_n = \frac{vds}{Rdt} = \frac{v^2}{R}\,,\ \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{R}^0\,, \qquad (2.24)$$

kde $\vec{R}^0$ je jednotkový vektor ve směru hlavní normály křivky orientovaný ke středu křivosti.

Zrychlení lze vyjádřit pomocí tečného a normálového zrychlení ve tvaru

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{v}^0 + \frac{v^2}{R}\vec{R}^0 \qquad (2.25)$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}} \qquad (2.26)$$

### 1.2.6 Klasifikace posuvných pohybů

Z definice rychlosti (2.11) plyne nejjednodušší klasifikace posuvných pohybů částice. Je-li jednotkový vektor rychlost $\vec{\tau}^0 = konst.$, pohyby jsou přímočaré, $\vec{\tau}^0 \neq konst.$, pohyby jsou křivočaré. V následujícím odstavci budeme řešit přímočaré pohyby jako funkční závislosti kinematických veličin dráhy *s*, rychlosti *v*, zrychlení *a* na čase *t*.

Z definice zrychlení *a* lze určit závislost $v = v\,(t)$

$$a = \frac{dv}{dt},\quad dv = adt,\quad \int dv = \int adt$$

$$\boxed{v = \int adt + konst.} \qquad (2.37)$$

Z definice rychlosti *v* lze určit závislost $s = s\,(t)$

$$v = \frac{ds}{dt},\quad ds = vdt,\quad \int ds = \int vdt$$

$$\boxed{s = \int vdt + konst.} \qquad (2.38)$$

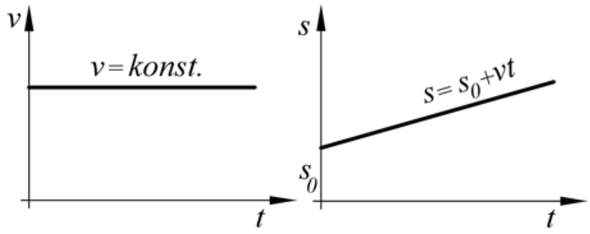
**Pohyb přímočarý rovnoměrný:**

$$a = 0$$

$$v = \int 0dt = konst.\quad s = v\int dt = vt + C,\quad C = s_0 \quad \boxed{s = s_0 + vt} \qquad (2.39)$$

Kde $s_0$ je počáteční dráha.

Grafy pro přímočarý rovnoměrný pohyb jsou na obr. 2.15.




**Obr. 2.15 Graf funkce *v = v (t)* a *s = s (t)* pro přímočarý rovnoměrný pohyb**

**<u>Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený</u>:**

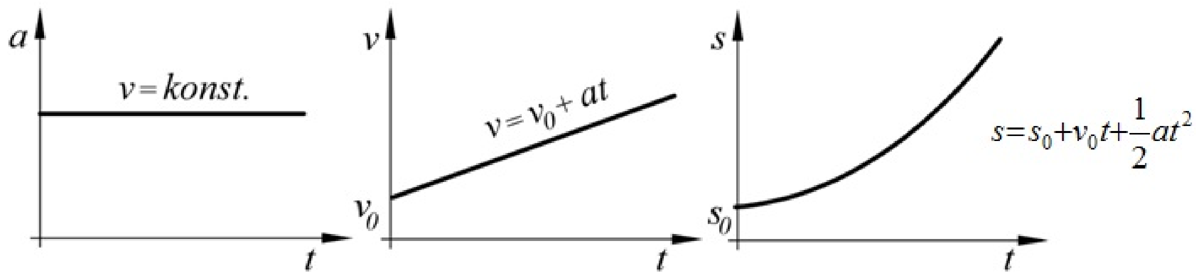
$$\boxed{a = konst.}$$

$$v = a\int dt = at + C_1,\ \ C_1 = v_0 \qquad \boxed{v = v_0 + at} \tag{2.40}$$

a dosazením (2.40) do vztahu (2.38)

$$s = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2,\ \ C_2 = s_0 \qquad \boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \tag{2.41}$$

Grafy pro přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb jsou na obr. 2.16.




**Obr. 2.16 Graf funkce *a* = *a*(*t*), *v* = *v*(*t*) a *s* = *s*(*t*) pro přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb**

# 2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Kartézské a polární souřadnice, parametrické rovnice trajektorie pro posuvný pohyb
- Charakteristika pohybu částic podle rychlosti a podle zrychlení
- Klasifikace posuvných pohybů