

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



FYZIKA I

Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a nerovnoměrně zrychlený rotační pohyb

Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc.
Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D.
Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D.
Mgr. Art. Dagmar Mádrová

Ostrava 2013

© Prof. RNDr. Vilém Mádr, CSc., Prof. Ing. Libor Hlaváč, Ph.D., Doc. Ing. Irena Hlaváčová, Ph.D., Mgr. Art. Dagmar Mádrová

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3031-5



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ ROTAČNÍ POHYB	3
1.1	Úvod	4
1.2	Definice.....	4
1.2.1	Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení	4
1.2.2	Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.....	5
1.2.3	Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením	6
1.2.4	Velikost tečného a normálového zrychlení otáčivého pohybu	6
1.2.5	Klasifikace otáčivých pohybů	6
1.2.6	Pohyb rovnoměrný po kružnici.....	7
1.2.7	Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici	7
1.2.8	Moment síly.....	7
1.2.9	Moment dvou sil působících na dvě částice.....	8
1.2.10	Dvojice sil	9
1.2.11	Moment hybnosti.....	9
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	11



1 ROVNOMĚRNÝ, ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ A NEROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ ROTAČNÍ POHYB



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením

Pohyb rovnoměrný po kružnici

Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici



MOTIVACE:

S otáčivým pohybem částice nebo tělesa se setkáme v podstatě u každého pohybu tělesa. Výjimku tvoří pohyb částic nebo těles po přímce. S otáčivým pohybem je nutno počítat téměř ve všech technických problémech. Jde o rotaci turbíny, setrvačníků, dopravních vozidel, aj.



1.1 ÚVOD

Pro popis rovnoměrného, rovnoměrně zrychleného a nerovnoměrně zrychleného rotačního pohybu je třeba znalost základních veličin otáčivého pohybu, které jsou uvedeny v dalším textu.

1.2 DEFINICE

1.2.1 Úhlová dráha, úhlová rychlost a úhlové zrychlení

Při otáčivém pohybu hmotného bodu je trajektorií pohybu kružnice. Kromě kinematických veličin $\vec{r}$, $\vec{v}$ a $\vec{a}$ při vyšetřování otáčivých pohybů pracujeme s úhlovými veličinami $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ a $\vec{\varepsilon}$, které jsou také funkcí času.

Úhlová dráha je jako vektor vyjádřena funkční závislostí:

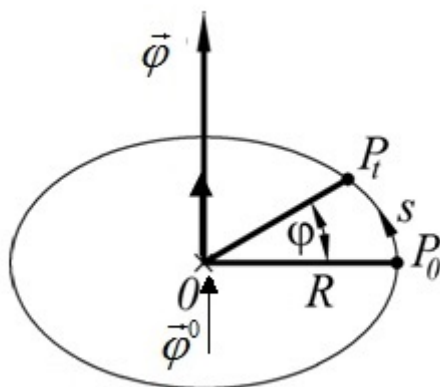
$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t) \quad (2.28)$$

Velikost úhlové dráhy je rovna velikosti středového úhlu φ příslušejícího oblouku délky s mezi polohami bodu P_0 v čase $t = 0$ s a P_t v následujícím čase t , kde $\varphi = \frac{s}{R}$.

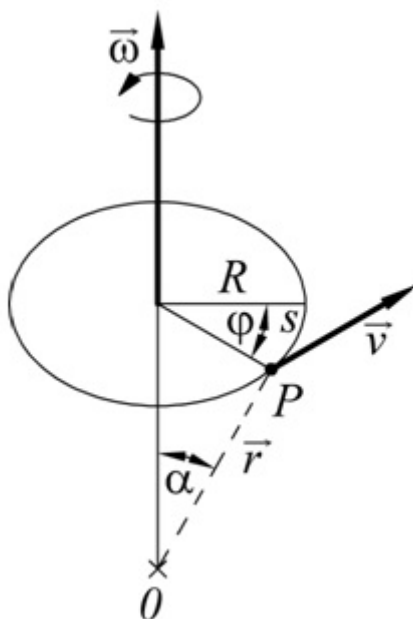
Platí

$$\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{\varphi}^0, \quad (2.29)$$

kde $\vec{\varphi}^0$ je jednotkový vektor kolmý na osu otáčení a je orientován na tu stranu, ze které vidíme otáčení bodu P v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček), viz obr. 2.13.



Obr. 2.13 K definici úhlové dráhy $\vec{\varphi}$

Obr. 2.14 K určení vztahu mezi obvodovou (v) a úhlovou (φ) rychlostí

Úhlovou rychlost $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ definujeme jako časovou změnu úhlové dráhy $\vec{\varphi}$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

(2.30)

Platí $\vec{\omega} = \omega \vec{\varphi}^0$, kde $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t)$ definujeme jako časovou změnu úhlové rychlosti $\vec{\omega}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

(2.31)

Platí $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{\varphi}^0$, kde $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Úhlové zrychlení lze vyjádřit i jinak

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \quad (2.32)$$

Jednotka úhlové dráhy $[\varphi] = \text{rad}$, úhlové rychlosti $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, úhlového zrychlení $[\varepsilon] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.2.2 Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Odvodíme vztah mezi obvodovou $\vec{v}$ a úhlovou $\vec{\omega}$ rychlostí. V obr. 2.14 jsou vyznačeny veličiny charakterizující pohyb částice v bodě P . Poloha bodu P je určena vůči počátku O polohovým vektorem $\vec{r}$, který s osou rotace svírá úhel α . Z definice velikosti okamžité rychlosti (2.10) a použitím vztahu $ds = R d\varphi$ plyne



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Z obr. 2.14 také plyne, že $R = r \sin \alpha$, pak

$$\boxed{v = r \omega \sin \alpha} \quad a \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (2.33)$$

1.2.3 Vztah mezi obvodovým a úhlovým zrychlením

Dále odvodíme vztah mezi obvodovým $\vec{a}$ a úhlovým $\vec{\varepsilon}$ zrychlením. Z definice (2.16) plyne

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.34)$$

Vektor $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ je vektor kolmý k $\vec{r}$ a ose rotace, v níž leží $\vec{\omega}$, tj. má stejný směr s vektorem $\vec{v}$. Je to vektor tečného zrychlení $\vec{a}_t$.

Vektor $\vec{\omega} \times \vec{v}$ je vektor kolmý na $\vec{\omega}$ a $\vec{v}$ a má směr do středu křivosti. Je to vektor normálového zrychlení $\vec{a}_n$.

1.2.4 Velikost tečného a normálového zrychlení otáčivého pohybu

Velikosti tečného a normálového zrychlení jsou:

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2} \quad \text{nebo} \quad \boxed{a_n = v \frac{v}{R} = v\omega} \quad (2.36)$$

1.2.5 Klasifikace otáčivých pohybů

Klasifikace vychází z analogie vztahů mezi veličinami φ, ω a ε u otáčivých pohybů a veličinami s, v a a u pohybů posuvných. Stejný otáčivý pohyb popsán veličinami φ, ω a ε konají všechny body tělesa (vyjma středu otáčení) – kapitola 2.1.2.

Z definice úhlového zrychlení ε lze určit závislost $\omega = \omega(t)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \varepsilon dt, \quad \int d\omega = \int \varepsilon dt$$

$$\boxed{\omega = \int \varepsilon dt + konst.}$$

(2.42)

Z definice úhlové rychlosti ω lze určit závislost $\varphi = \varphi(t)$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad d\varphi = \omega dt, \quad \int d\varphi = \int \omega dt$$



$$\varphi = \int \omega dt + konst.$$

(2.43)

1.2.6 Pohyb rovnoměrný po kružnici

Pohyb rovnoměrný po kružnici:

$$\varepsilon = 0$$

$$\omega = \int 0 dt = konst.$$

$$\varphi = \omega \int dt = \omega t + C, \text{ kde } C = \varphi_0$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

(2.44)

Pro $\varphi_0 = 0$ je $\varphi = \omega t$ a pro $\varphi = 2\pi$ je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\frac{1}{T} = f$$

a

(2.45)

kde T je perioda (doba, za kterou se částice otočí o plný úhel) a f je frekvence.

1.2.7 Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici

Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici:

$$\varepsilon = konst.$$

$$\omega = \varepsilon \int dt = \varepsilon t + C_1, \text{ kde } C_1 = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

(2.46)

a dosazením (2.46) do vztahu (2.43)

$$\varphi = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + C_2, \text{ kde } C_2 = \varphi_0$$

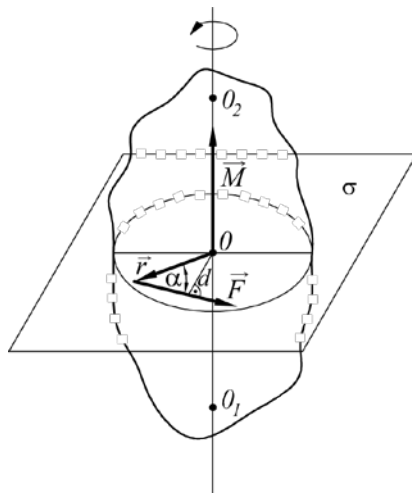
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$$

(2.47)

1.2.8 Moment síly

Označme $\vec{F}$ výslednici vnějších sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy $O_1 O_2$ (obr. 2.33). Předpokládejme, že vektorová přímka síly $\vec{F}$ neprotíná osu otáčení a není s ní rovnoběžná, dále že leží v rovině σ kolmé k ose otáčení.





Obr. 2.33 K definici momentu síly

Velikost momentu síly M je součin velikosti síly F a kolmé vzdálenosti bodu O od vektorové přímky vektoru $\vec{F}$ v rovině σ , tzv. ramene síly d

$$M = Fd$$

(2.140)

Z obr. 2.33 je $d = r \sin \alpha$, pak

$$M = rF \sin \alpha$$

(2.141)

což je velikost vektorového součinu polohového vektoru $\vec{r}$ působíště síly a vektoru síly $\vec{F}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(2.142)

kde $\vec{M}$ je moment síly $\vec{F}$ vzhledem k bodu O .

V souřadnicích

$$M_x = y F_z - z F_y$$

$$M_y = z F_x - x F_z$$

$$M_z = x F_y - y F_x$$

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je $\sin \alpha = 1$ a $M = Fr$.

Směr vektoru $\vec{M}$ určuje směr vektoru úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$, jež by charakterizovalo rotační pohyb částice, vyvolaný tímto momentem. Je proto velmi důležitou veličinou při sledování a popisu rotačních pohybů.

1.2.9 Moment dvou sil působících na dvě částice

Výsledný moment dvou sil $\vec{F}_{12}$ a $\vec{F}_{21}$ působících na dvě částice podle obr. 2.34 je

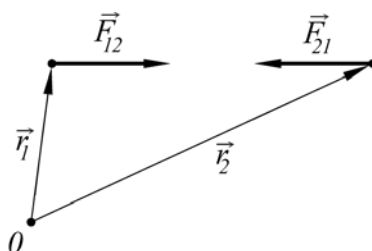
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

a s ohledem na $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ je



$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0}, \quad (2.143)$$

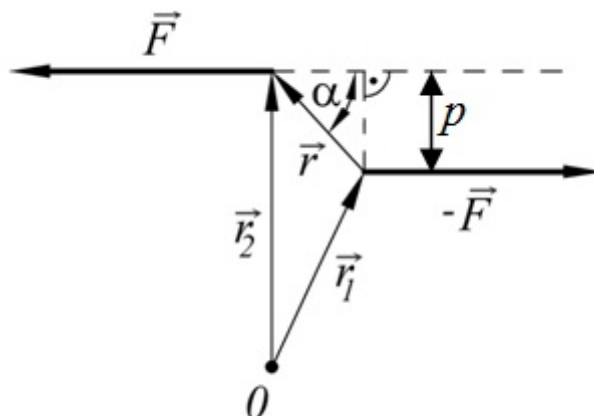
neboť vektor $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ je rovnoběžný s vektorem $\vec{F}_{12}$.



Obr. 2.34 K výpočtu momentu dvou sil

Obr. 2.35

K výpočtu momentu dvojice sil



Obr. 2.35 K výpočtu momentu dvojice sil

1.2.10 Dvojice sil

Určíme výsledný moment dvou rovnoběžných stejně velikých sil opačně orientovaných, které působí v různých bodech tuhého tělesa (obr. 2.35). Nazývají se dvojice sil.

Z obr. 2.35 $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$ a podle definice momentu sil je

$$\vec{M}_d = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F} = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + (\vec{r}_1 + \vec{r}) \times \vec{F} = -\vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_d = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}_d| = r F \sin \alpha = p F$$

(2.144)

kde $p = r \sin \alpha$ je rameno dvojice sil (obr. 2.35).

1.2.11 Moment hybnosti

Moment hybnosti $\vec{b}$ částice je definován jako vektorový součin polohového vektoru $\vec{r}$ částice a její hybnosti $\vec{p}$ (obr. 2.36) a uvádí se někdy jako točivost.

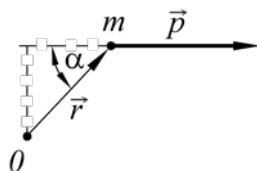


(2.145)

Jeho velikost

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

$$b = r p \sin \alpha = r m v \sin \alpha \quad (2.146)$$



Obr. 2.36 K definici momentu hybnosti částice

Jednotky:

$$[M] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m}$$

$$[b] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Veličiny otáčivého pohybu
- Odvození vztahu mezi obvodovou a úhlovou rychlostí
- Odvození vztahu mezi obvodovým a úhlovým zrychlením
- Klasifikace otáčivých pohybů
- Moment síly, dvojice sil a moment hybnosti

