

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 1 - Kombinatorika

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

© Mgr. Petr Otipka

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3034-6



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ 1- KOMBINATORIKA	3
1.1	Řešené úlohy	3
1.1.1	Úlohy k řešení	4
1.1.2	Výsledky úloh k řešení	6
1.1.3	Sada testovacích otázek.....	6
1.1.4	Správné odpovědi k testovacím otázkám	8



CVIČENÍ 1- KOMBINATORIKA

1.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 1.4.1.

Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 polí vybrat 3 různá pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?

Řešení: Některé úlohy je vhodné (nejen) v kombinatorice řešit pomocí opačného jevu. Nejdříve spočteme, kolika způsoby je možné vybrat tři pole stejné barvy:

Na začátku vybereme libovolné pole – máme tedy 64 možností. Jestliže chceme při druhém pokusu vybrat pole stejné barvy, musíme zvolit některé ze zbývajících 31 polí této barvy (jedno pole jsme již vybrali v předchozím pokusu). Při třetím výběru pak máme k dispozici 30 polí této barvy. Počet všech možností, jak vybrat tři políčka stejné barvy je tedy: $64 \cdot 31 \cdot 30$. Odečteme-li nyní tyto možnosti od všech možností výběru, kterých je zřejmě $64 \cdot 63 \cdot 62$, obdržíme počet způsobů, jak vybrat pole tak, aby všechna tři neměla stejnou barvu:

$$64 \cdot 63 \cdot 62 - 64 \cdot 31 \cdot 30 = 190464 \text{ možností.}$$

Dále je třeba si uvědomit, že při tomto řešení jsme zohledňovali pořadí pokusů, což ovšem ze zadání nevyplývá. Skutečný počet možností je pak šestkrát menší (všem permutacím z daných

tří polí odpovídá jedna možnost): $\frac{190464}{6} = 31744$ způsobů.

Tuto úlohu je samozřejmě možné řešit i přímým výpočtem:

Při prvním pokusu máme opět 64 možností výběru. Při druhém pokusu vybereme buď pole jiné barvy (32 možností) nebo pole stejné barvy (31 možností). U třetího výběru můžeme zvolit libovolné zbývajících pole, mají-li dvě předchozí rozdílnou barvu (62 možností), nebo pokud jsou dvě již vybraná pole stejné barvy, musíme zvolit pole jiné barvy (32 možností). Tedy počet všech možností je:

$$64 \cdot 32 \cdot 62 + 64 \cdot 31 \cdot 32 = 190464 \dots$$

Příklad 1.4.2.

Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

- a) pětímístná, sudá
- b) pětímístná, končící dvojčíslím 21
- c) pětímístná, menší než 30000
- d) trojmístná lichá
- e) čtyřmístná, větší než 2000
- f) dvojmístná nebo trojmístná

Řešení: ad a)

Sudá - to v tomto případě znamená, že končí ciframi 2 nebo 4 (XXXX2, XXXX4) - tzn. dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývajících čtyři cifry, takže výsledek:

$$a = 2 \cdot P(4) = 48$$

ad b)

Máme číslo XXX21. Tedy na třech pozicích permutují tři cifry:

$$b = P(3) = 6$$

ad c)

Menší než 30000, to jsou čísla začínající ciframi 1 nebo 2, tedy dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývajících čtyři cifry:

$$c = 2 \cdot P(4) = 48$$

ad d)

Lichá, tedy končí ciframi 1, 3, 5 - tři možnosti. Na zbývajících dvou pozicích se mohou vyskytovat některé ze zbývajících čtyř cifer, přičemž záleží na pořadí - jedná se o variace druhé třídy ze čtyř prvků.



$$d = 3 \cdot V_2(4) = 36$$

ad e)

obdobně jako u předchozích:

$$e = 4 \cdot V_3(4) = 96$$

ad f)

$$f = V_2(5) + V_3(5) = 80$$

Příklad 1.4.3.

Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže

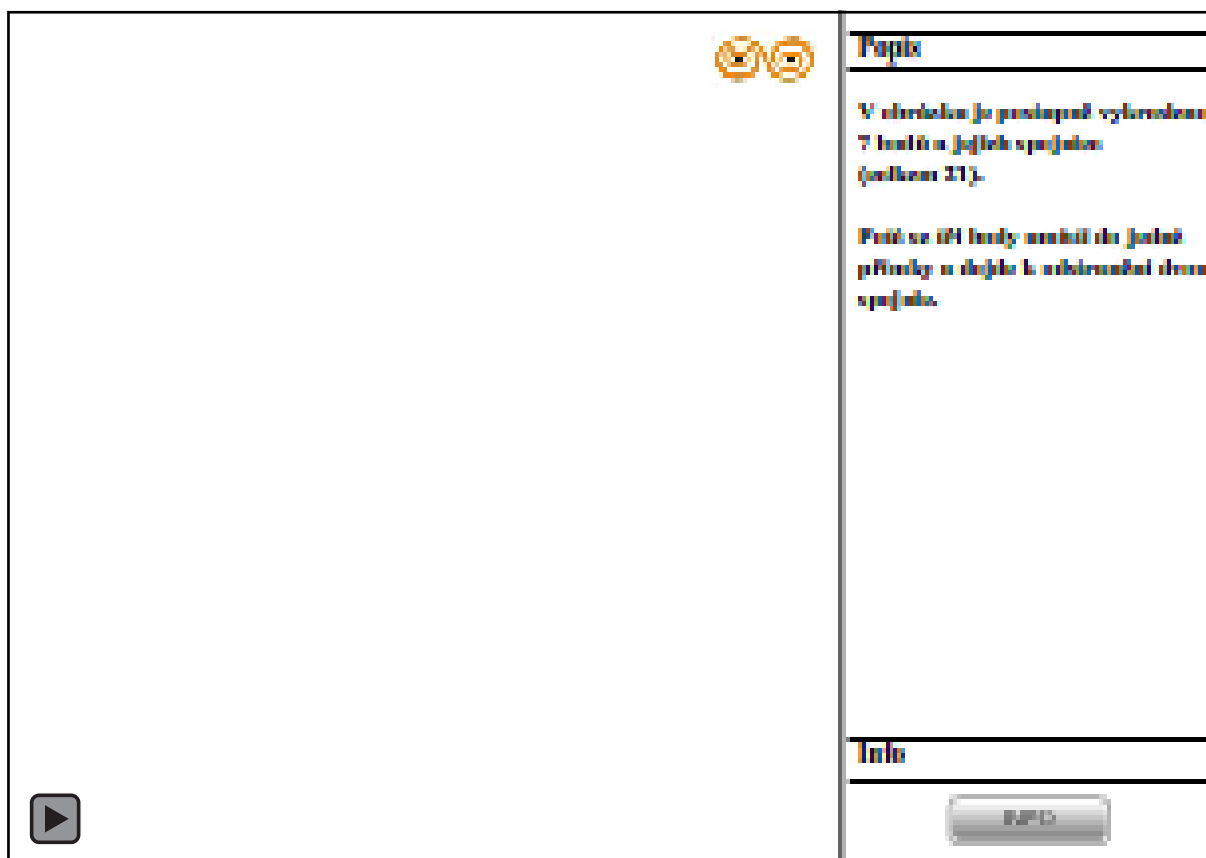
a) žádné tři z nich neleží v přímce,

b) tři z nich leží v jedné přímce?

Řešení: ad a) Jedná se o typický příklad na kombinace bez opakování. Ze sedmi prvků vytváříme dvojice, přičemž ve dvojici nezáleží na pořadí (je jedno zda spojíme první bod s druhým nebo druhý s prvním) a prvky se nemohou opakovat (spojením jednoho z bodů se sebou samým není určena přímka). Počet všech možností tedy odpovídá počtu kombinací druhé třídy ze sedmi prvků:

$$C_2(7) = \binom{7}{2} = 21.$$

ad b) Leží-li tři body v jedné přímce, pak v rámci této trojice přicházíme o dvě možnosti (mohu jimi proložit jedinou přímku – na rozdíl od případu, kdy v jedné přímce neleží a mohu jimi proložit tři přímky). Počet všech dalších možností je stejný. Výsledek je pak roven $21 - 2 = 19$ možností.



Příklad 1.4.3.

V rovině je postupně vykresleno 7 bodů a jejich spojení (celkem 21).

Při 6. bodě vzniká do jedné přímky a spojíme-li ostatní dva spojíme.

Info

NPS

Animace 1.1

1.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Zjednodušte a vypočtěte:



$$\binom{4}{2} + \binom{6}{2} - \binom{7}{2} =$$

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} =$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{2(n+2)!}{n!} =$$

$$\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{n^2 - 4}{(n+2)!} =$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} - \frac{2(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$\binom{x+2}{x} + \binom{x+3}{x+1} = 64$$

$$\binom{x+3}{x+1} - 2\binom{x+2}{x} + 3\binom{x+4}{x+2} = 75$$

- 1.2. Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 15 \rangle$.
- 1.3. Ze 7 prvků bylo vytvořeno 2401 variací s opakováním stejné třídy. Kolik prvků obsahuje jedna variace?
- 1.4. Jsou dány cifry: 0, 1, 2, 3, 4. Splňte úkoly řešeného příkladu 1.4.2 tak, že cifry se nesmí opakovat a číslo nemůže začínat nulou.
- 1.5. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiperných přirozených čísel?
- 1.6. Kolik prvků dá 120 kombinací druhé třídy s opakováním?
- 1.7. Kolik je dáno prvků, jestliže variací třetí třídy z nich utvořených je pětkrát více než variací druhé třídy?
- 1.8. Z kolika prvků lze vytvořit 90 variací druhé třídy?
- 1.9. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací čtyřicetdvakrát. Určete počet prvků.
- 1.10. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit
 - a) 10 pohlednic,
 - b) 5 pohlednic,
 - c) 5 různých pohlednic?
- 1.11. Na hokejovém turnaji, kterého se účastní 8 družstev, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?
- 1.12. Z 5 bílých a 4 červených kuliček tvoříme trojice tak, aby v každé trojici byly vždy 2 bílé a 1 červená kulička.. Kolik trojic splňujících tuto podmínku lze vytvořit?
- 1.13. V turistickém oddílu "Hbitý svišť" je 10 dívek a 8 chlapců. Určete, kolika způsoby mohou sestavit volejbalový tým (má šest členů), ve kterém budou hrát.
 - a) právě dvě dívky.
 - b) maximálně dva chlapci?
- 1.14. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?
- 1.15. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.
 - a) Kolika způsoby je lze přesadit?
 - b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?
 - c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?



- d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?
- 1.16. Student má v knihovně 4 různé učebnice pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?
- 1.17. Kolik různých permutací lze vytvořit použitím všech písmen slova
a) statistika,
b) matematika?
- 1.18. V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.
- 1.19. Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 polí vybrat 3 pole tak, aby všechna neležela v jednom sloupci?
- 1.20. Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

1.1.2 Výsledky úloh k řešení

- 1.1. 0, 56, 2, 0, 2, 6, 4
1.2. 560
1.3. 4
1.4. 60, 4, 48, 18, 72, 24, 78, 64
1.5. 90000
1.6. 15
1.7. 7
1.8. 10
1.9. 7
1.10. 8008; 462; 21
1.11. 28
1.12. 40
1.13. 3150; 8106
1.14. 90
1.15. 720; 240; 240; 96
1.16. 1728
1.17. 75600; 151200
1.18. 231
1.19. 41216
1.20. 10

1.1.3 Sada testovacích otázek

- T1.1. Jsou dána dvě přirozená čísla $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$; n, k jsou přirozená čísla, $n > k$. Které z těchto dvou čísel je větší?
a) $\binom{n}{k}$
b) $\binom{n}{k+1}$
c) Nelze obecně rozhodnout
- T1.2. Z dvaceti studentů chceme vybrat tři, kteří půjdou do studentského sportovního klubu vykonávat funkce předsedy, místopředsedy a pokladníka. Kolika způsoby to lze provést?



- T1.3. Na úřadě se tvoří řada pěti lidí, tři z nich jsou ženy. Kolika způsoby se může vytvořit, chtějí-li ženy stát bezprostředně za sebou?
- T1.4. Na chmelovou brigádu přijel stejný počet studentů a studentek. Kolik brigádníků je celkem, můžeme-li z nich sestavit 441 párů (pár = student + studentka).
 a) 40
 b) 41
 c) 42
 d) 44
- T1.5. Z pěti prvků vytváříme pětice, přičemž záleží na pořadí a prvky se mohou libovolně opakovat. Vytváříme tedy:
 a) permutace z pěti prvků.
 b) permutace s opakováním z pěti prvků.
 c) variace 5-té třídy z pěti prvků s opakováním.
- T1.6. Kolik je dáno prvků, jestliže počet variací druhé třídy z těchto prvků je dvanáctkrát menší než počet variací čtvrté třídy z týchž prvků.
 a) 6
 b) 8
 c) 10
- T1.7. Kolik prvků dá 55 kombinací druhé třídy?
 a) 7
 b) 9
 c) 11
- T1.8. Vyřešte rovnici:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{x+1}{x-1} - \binom{5}{3} \cdot \binom{x+1}{x} + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 0$$
- T1.9. Z určitého počtu uchazečů mají být vybráni tři. Kdyby bylo uchazečů o dva méně, zmenšil by se počet možností výběru pětkrát. Kolik je uchazečů?
- T1.10. Kombinace k -té třídy z n prvků jsou
 a) uspořádané skupiny po k prvcích.
 b) skupiny po k prvcích vybraných z n prvků bez ohledu na uspořádání.
 c) uspořádané skupiny po n prvcích.
- T1.11. Čemu je rovno číslo $\binom{n}{0}$?
 a) 0
 b) 1
 c) n
- T1.12. Z dvaceti studentů chceme vybrat tři, kteří půjdou před školu odklízet sněh. Kolika způsoby to lze provést?
- T1.13. Seřaďte podle od největšího po nejmenší tři čísla $C_2(5)$, $V_2(5)$, $P(5)$.
 a) $C_2(5)$, $V_2(5)$, $P(5)$
 b) $P(5)$, $C_2(5)$, $V_2(5)$
 c) $P(5)$, $V_2(5)$, $C_2(5)$
- T1.14. Variace k -té třídy z n prvků jsou
 a) uspořádané skupiny po k prvcích.
 b) skupiny po k prvcích vybraných z n prvků bez ohledu na uspořádání.
 c) uspořádané skupiny po n prvcích.
- T1.15. Kolik trojčíslných čísel lze vytvořit z cifer 1, 2, 3?
 a) 3
 b) 6
 c) 9



T1.16. Kolik čtyřciferných čísel lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 3?

- a) 16
- b) 18
- c) 12

T1.17. Z kolika prvků je možné vytvořit 420 variací druhé třídy bez opakování?

- a) 20
- b) 21
- c) 22

T1.18. Jestliže se počet prvků zvětší o dva, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Kolik prvků bylo dáno?

T1.19. Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná družstva?

T1.20. Vyřešte rovnici:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{x+1}{x-1} - \binom{6}{4} \cdot \binom{x+2}{x+1} = \binom{6}{5}$$

1.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T1.1. c)

T1.2. 6840

T1.3. 36

T1.4. c)

T1.5. c)

T1.6. a)

T1.7. c)

T1.8. $x = 2$

T1.9. 6

T1.10. b)

T1.11. b)

T1.12. 1140

T1.13. c)

T1.14. a)

T1.15. b)

T1.16. b)

T1.17. b)

T1.18. 2

T1.19. 924

T1.20. $x = 6$

