

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 2 – Pravděpodobnost jevů

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

© Mgr. Petr Otipka

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3034-6



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

2	PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ.....	3
2.1	Řešené úlohy	3
2.1.1	Úlohy k řešení	5
2.1.2	Výsledky úloh k řešení	6
2.1.3	Sada testovacích otázek.....	7
2.1.4	Správné odpovědi k testovacím otázkám	8



2 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ

2.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 2.5.1

Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:

a) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

b) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

Řešení: ad a)

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k "alespoň dvě mají stejnou hodnotu" je "každá má jinou hodnotu":

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = 0,75$$

ad b)

Dohromady za 700 Kč, tzn. jedna za 100 Kč a dvě za 300 Kč nebo dvě za 100 Kč a jedna za 500 Kč:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24} = 0,291\bar{6}$$

Příklad 2.5.2.

Dva střelci vystřelí po jedné ráně. Pravděpodobnosti zásahu cíle jsou po řadě 0,6 a 0,9. Určete pravděpodobnost toho, že alespoň jeden střelec zasáhne cíl.

Řešení:

jev A: alespoň jeden zasáhne cíl

jev B: cíl zasáhne první střelec

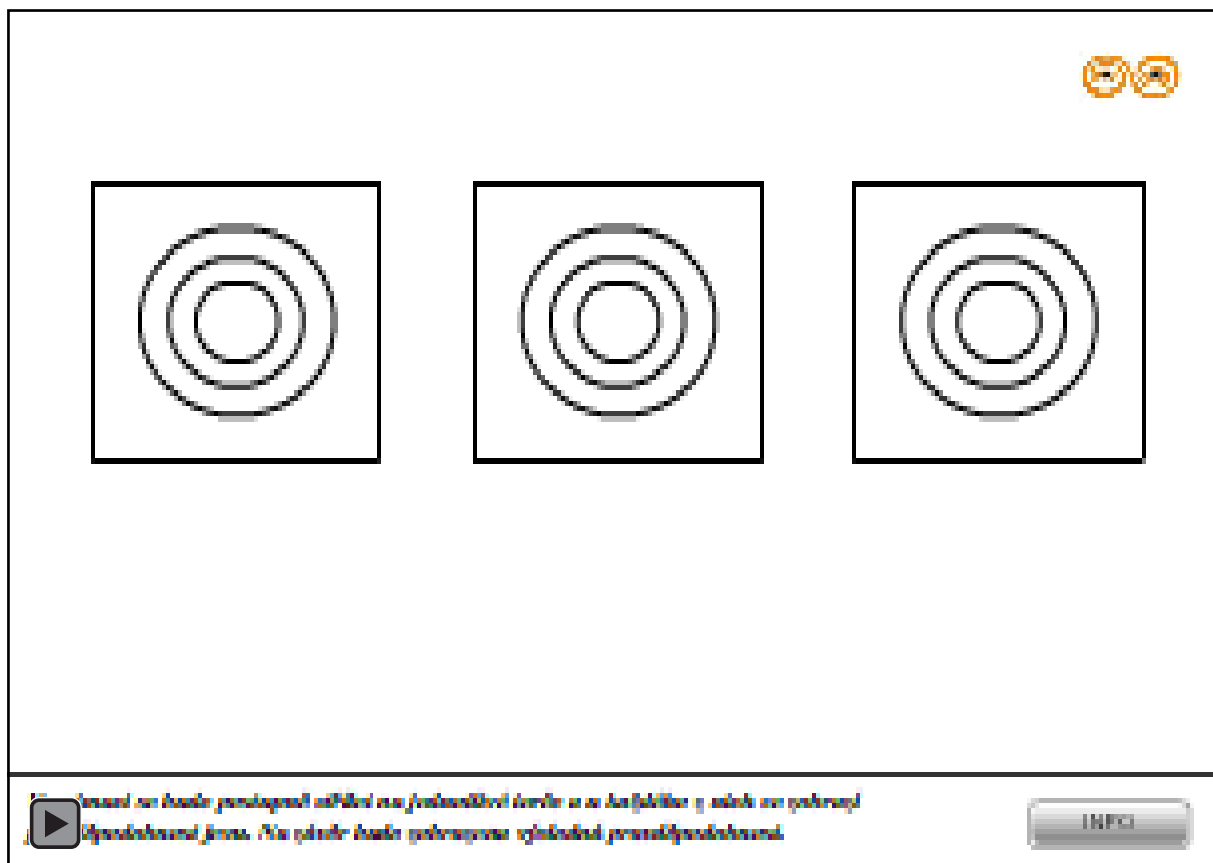
jev C: cíl zasáhne druhý střelec

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C + B \cdot C) = P(B \cdot \bar{C}) + P(\bar{B} \cdot C) + P(B \cdot C) = \\ &= P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) \\ &= 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,9 = 0,96 \end{aligned}$$

nebo:

$$P(A) = 1 - P(\bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 1 - 0,4 \cdot 0,1 = 0,96$$





Animce 2.1

Příklad 2.5.3.

Narozeninový problém I. Spočítejte pravděpodobnost, že žádní dva lidé z patnáctičlenné skupiny nemají narozeniny ve stejný den roku. Ignorujte 29.únor.

Řešení: Označme $P(n)$...pravděpodobnost, že dva lidé z n -členné skupiny nemají narozeniny ve stejný den.

$n = 2$

První člověk má narozeniny libovolný den v roce. Pravděpodobnost, že druhý člověk nemá narozeniny tentýž den je:

$$P(2) = \frac{364}{365}$$

$n = 3$

Navážeme-li na předchozí úvahu, pak:

$$P(3) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$$

Obdobně tedy:



$$P(4) = P(3) \cdot \frac{362}{365}$$

$$\vdots$$

$$P(n) = \frac{P(n-1) \cdot [365 - (n-1)]}{365}$$

$$P(n) = \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot [365 - (n-1)]}{365^{n-1}}$$

$$P(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot [365 - (n-1)] \cdot (365 - n)!}{365 \cdot 365^{n-1} \cdot (365 - n)!} = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}$$

Takže jsme odvodili obecný vzorec, nyní pro $n = 15$:

$$P(15) = \frac{365!}{365^{15} \cdot 350!} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 351}{365^{15}} \approx 0,747$$

Příklad 2.5.4.

Narozeninový problém II. (Richard von Mises, 1939). Kolik lidí se musí nacházet v místnosti, aby, ignorující 29. únor, dva z nich měli narozeniny ve stejný den roku s pravděpodobností alespoň 50%.

Řešení: Označme $\bar{P}(n)$...pravděpodobnost, že dva lidé z n -členné skupiny mají narozeniny ve stejný den. Využijeme řešení předchozího příkladu. Stačí si uvědomit, že: $\bar{P}(n) = 1 - P(n)$, tedy:

$$\bar{P}(n) = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}$$

Lehce zjistíme, že $\bar{P}(n) > 0,5$ poprvé pro $n = 23$ ($\bar{P}(23) = 0,507$)

V místnosti se tedy musí nacházet alespoň 23 lidí.

2.1.1 Úlohy k řešení

- 1.1. Dokažte, že jevy $\bar{A}, A.B, A.\bar{B}$ tvoří úplnou skupinu disjunktních jevů.
- 1.2. Dokažte, že $\bar{A}.B + A.\bar{B} + \bar{A}.\bar{B} = (\bar{A}.B)$.
- 1.3. Dokažte, že jevy $A, B, \overline{A+B}$ tvoří úplnou skupinu vzájemně neslučitelných jevů.
- 1.4. Jev A znamená, že z 10-ti automobilů byly prodány:
 - a) alespoň 3
 - b) alespoň 5
 - c) žádný
 - d) právě 4
 - e) aspoň 6 a nejvýše 8
 - f) žádný nebo alespoň 3
 Kolik automobilů bylo prodáno, jestliže nastal jev $\bar{A}$?
- 1.5. Student udělá zkoušku (jev A), jestliže napíše úspěšně písemku (jev B) a zodpoví při ústní zkoušce alespoň jednu ze tří otázek (jevy C_1, C_2, C_3). Vyjádřete jev A pomocí jevů B, C_1, C_2, C_3 .
- 1.6. Dva závodníci zdolají určitou vzdálenost ve stanoveném čase s pravděpodobností 0,8 a 0,9. Určete pravděpodobnost, že ve stanoveném čase dosáhne cíle alespoň jeden závodník.



- 1.7. Házíme současně třemi hracími kostkami a sčítáme bodové hodnoty. Který ze součtů 11 nebo 12 je pravděpodobnější?
- 1.8. Házíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že podruhé padne více oček než poprvé?
- 1.9. Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut. 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda?
- 1.10. V osudí jsou 4 černé a 6 modrých koulí. Náhodně vybereme 4. Jaká je pravděpodobnost, že
 - a) 3 budou modré a jedna černá?
 - b) alespoň 3 vytažené koule budou modré?
 - c) mezi vytaženými koulemi je více černých?
- 1.11. Do výtahu v sedmipodlažním domě nastoupili v 1. podlaží tři lidé. Každý z nich se stejnou pravděpodobností může vystoupit v libovolném podlaží počínaje druhým. Najděte pravděpodobnost následujících jevů:

A - všichni cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží

B - všichni cestující vystoupí současně

C - cestující vystoupí v různých podlažích
- 1.12. Dva hráči házejí mincí. Vyhrává ten, komu dřív padne líc. Určete pravděpodobnost výhry každého hráče.
- 1.13. V osudí je 10 koulí - 3 bílé a 7 černých. Pětkrát táhneme po jedné kouli, po každém tahu ji vrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že budou taženy buď všechny koule bílé, nebo všechny černé.
- 1.14. Máme dřevěnou krychli, jejíž stěny jsou červeně obarveny. Rozřežeme ji na 125 stejných krychliček, které vzájemně promícháme. Potom náhodně vybereme jednu krychličku. Jaká bude pravděpodobnost, že vybraná krychlička bude mít dvě stěny červeně natřené?
- 1.15. Tyč délky 10m je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?
- 1.16. Na dané kružnici o poloměru r náhodně zvolíme dva body A, B . Určete pravděpodobnost toho, že délka úsečky AB nebude větší než poloměr kružnice.
- 1.17. Z intervalu $\langle 0,8 \rangle$ náhodně vybereme čísla x a y . Jaká je pravděpodobnost, že $y \leq x^3$?
- 1.18. Určete pravděpodobnost toho, že součet náhodně zvolených reálných čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ větší než jedna a současně jejich součin není větší než $\frac{2}{9}$.
- 1.19. Dva lidé se dohodli, že se setkají na stanoveném místě mezi 18:00 h. a 18:45 hod. Ten, kdo přijde první, počká na druhého 15 minut. Určete pravděpodobnost toho, že se setkají, je-li příchod obou kdykoliv ve stanoveném čase stejně možný.
- 1.20. Stanovte pravděpodobnost toho, že výraz $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x \cdot y - 1}}$ je v libovolném bodě (x, y) definován, může-li x a y nabýt se stejnou pravděpodobností libovolné hodnoty z oboru $|x| \leq 2, |y| \leq 2$.

2.1.2 Výsledky úloh k řešení

- 1.1. -
- 1.2. -
- 1.3. -
- 1.4. a) nejvýše 2
b) nejvýše 4
c) aspoň 1
d) nejvýše 3 nebo aspoň 5
e) nejvýše 5 nebo aspoň 9



- f) jeden nebo dva
- 1.5. $A = B.(C_1 + C_2 + C_3)$
 - 1.6. 0,98
 - 1.7. 11
 - 1.8. $\frac{15}{36}$
 - 1.9. 0,142
 - 1.10. 0,38; 0,452; 0,119
 - 1.11. $p(A) = 1/6^3$
 $p(B) = 6 / 6^3$
 $p(C) = C_3(6) / 6^3$
 - 1.12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
 - 1.13. 0,1705
 - 1.14. 0,288
 - 1.15. 0,2
 - 1.16. $\frac{1}{3}$
 - 1.17. 0,812
 - 1.18. 0,487
 - 1.19. $\frac{5}{9}$
 - 1.20. 0,2017

2.1.3 Sada testovacích otázek

- T2.1. Jsou dány dva jevy A, B , přičemž $A \subset B$. Pak platí:
- a) $A.B = A$
 - b) $A.B = B$
 - c) $A.B = A + B$
- T2.2. Na pole čtvercového tvaru o hraně délky 100m se řítí parašutista, kterému se nerozevřel padák. Na poli stojí stoh čtvercového tvaru o hraně délky 10m. Jaká je pravděpodobnost, že parašutista přežije pád (tj. spadne do stohu)?
- a) 0,1
 - b) 0,01
 - c) 0,001
- T2.3. Součin jevů A, B je jev, který nastane právě tehdy když
- a) nastane jev A a nenastane jev B .
 - b) nastane alespoň jeden z jevů A, B .
 - c) nastanou oba jevy současně.
- T2.4. O náhodných jevech A a B jsou známy následující skutečnosti:
- pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů A a B , je $3/4$
 - pravděpodobnost, že oba jevy A a B nastanou současně, je $1/4$
 - pravděpodobnost, že nenastane jev A je $2/3$
- Jaká je pravděpodobnost jevu B ?
- a) $\frac{1}{3}$
 - b) $\frac{2}{3}$



- c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{3}{4}$
- T2.5. Náhodné jevy A, B se nazývají neslučitelné, jestliže platí
 a) $A \cap B = \emptyset$
 b) $A \cup B = I$
 c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- T2.6. Ve frontě na úřadě stojí 6 lidí, z toho 4 ženy. Jaká je pravděpodobnost, že ženy stojí bezprostředně za sebou?
- T2.7. Rozdíl jevů A, B je jev, který nastane právě tehdy když
 a) nastane jev A a nenastane jev B .
 b) nastane alespoň jeden z jevů A, B .
 c) nastanou oba jevy současně.
 d) nastane jev B a nenastane jev A .
- T2.8. Dva policisté vystřelí každý po jedné ráně na delikventa. Pravděpodobnost, že lumpa zasáhne první policista je 0,9, druhý policista 0,8. Určete pravděpodobnost, že delikvent bude zasažen.
- T2.9. Ve kterém z následujících případů můžeme pro výpočet pravděpodobnosti použít klasickou definici pravděpodobnosti?
 a) Střelba do terče.
 b) Střelba do davu.
 c) Hod kostkou.
 d) Hod navrtnanou kostkou.
- T2.10. Necht' A, B jsou dva náhodné jevy. Pak platí:
 a) $A + A \cdot B = I$
 b) $A + A \cdot B = A$
 c) $A + A \cdot B = B$
- T2.11. Součet jevů A, B je jev, který nastane právě tehdy když
 a) nastane jev A a nenastane jev B .
 b) nastane alespoň jeden z jevů A, B .
 c) nastanou oba jevy současně.
 d) nastane jev B a nenastane jev A .

2.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

- T2.1. a)
 T2.2. b)
 T2.3. c)
 T2.4. b)
 T2.5. a)
 T2.6. 0,2
 T2.7. a)
 T2.8. 0,98
 T2.9. c)
 T2.10. b)
 T2.11. b)
 T2.12. a)
 T2.13. b)
 T2.14. c)



- T2.15. *b*)
- T2.16. *a*)
- T2.17. 0,2
- T2.18. *a*)
- T2.19. 0,98
- T2.20. *c*)
- T2.21. *b*)
- T2.22. *b*)

