



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 3 – Pravděpodobnost jevů

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

© Mgr. Petr Otipka

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3034-6



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

3	PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ	3
3.1	Řešené úlohy	3
3.1.1	Úlohy k řešení	3
3.1.2	Výsledky úloh k řešení	5
3.1.3	Sada testovacích otázek.....	6
3.1.4	Správné odpovědi k testovacím otázkám	7



3 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ

3.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 3.4.1.

Menza VŠB zakoupila 12 chladniček z 1. závodu, 20 z 2. závodu a 18 z 3. závodu. Pravděpodobnost, že chladnička je výborné jakosti, pochází-li z 1. závodu je 0,9, z 2. závodu 0,6 a z 3. závodu 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti?

Řešení: jev A ...náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti

jev B_i ... náhodně vybraná chladnička pochází z i -tého závodu

Chladniček je dohromady 50.

$$A = (A.B_1) + (A.B_2) + (A.B_3)$$

$$P(A) = P(A.B_1) + P(A.B_2) + P(A.B_3)$$

$$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$$

$$P(A) = \frac{12}{50}.0,9 + \frac{20}{50}.0,6 + \frac{18}{50}.0,9 = 0,78$$

Příklad 3.4.2.

Ve společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 190 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

Řešení: jev A ...vybraný člověk je vyšší než 190 cm

jev B_1 ...vybraný člověk je muž

jev B_2 ...vybraný člověk je žena

$$P(A) = P(A.B_1) + P(A.B_2) = 0,45.0,05 + 0,55.0,01 = 0,028$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(A.B_2)}{P(A)} = \frac{0,55.0,01}{0,028} = 0,196$$

Příklad 3.4.3.

Vypočtete, co je pravděpodobnější? Vyhrát v tenise se stejně silným soupeřem 3 zápasy ze 4 nebo 6 zápasů z osmi?

Řešení: Tenisové zápasy jsou vlastně opakované nezávislé pokusy. Hrajeme-li se stejně silným soupeřem je pravděpodobnost výhry v každém zápase $p = 0,5$, takže:

Pravděpodobnost, že vyhrájeme 3 zápasy ze 4:

$$P(A_3) = \binom{4}{3}.0,5^3.0,5^1 = 4.0,5^4 = 0,25$$

Pravděpodobnost, že vyhrájeme 6 zápasů z 8:

$$P(A_6) = \binom{8}{6}.0,5^6.0,5^2 = 28.0,5^8 = 0,109$$

Pravděpodobnější je tedy zvítězit ve třech zápasech ze čtyř.

3.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Házíme dvěma kostkami. Vypočtete, jaká je pravděpodobnost toho, že:

a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.

b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.



- 1.2. Z výrobků určitého druhu dosahuje 95 % předepsanou kvalitu. V určitém závodě, který vyrábí 80 % celkové produkce však předepsanou kvalitu má 98 % výrobků. Mějme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben ve výše uvedeném závodě?
- 1.3. Součástky, ze kterých se montují stroje, dodávají tři závody. Je známo, že první má 0,3 % zmetků, druhý 0,2 % zmetků a třetí 0,4 %. Přitom první závod dodal 1000, druhý 2000 a třetí 2500 součástek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka bude zmetek?
- 1.4. Máme 4 krabice. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule, ve čtvrté 5 bílých a 1 černá koule. Náhodně vybereme jednu krabici a vytáhneme 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že kulička je bílá?
- 1.5. V dílně pracuje 10 dělníků, kteří vyrobí za směnu stejný počet výrobků. Pět z nich vyrobí 96 % standardních, tři z nich 90 % standardních a dva 85 % standardních. Všechny výrobky jdou do skladu. Náhodně jsme vybrali jeden výrobek a zjistili, že je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo z prvních pěti dělníků?
- 1.6. Sportovní střelec zasáhne cíl při každém výstřelu s pravděpodobností $p = 0,8$. Vypočtěte pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v cíli
 - a) právě 2 zásahy,
 - b) nejvýše jeden zásah,
 - c) alespoň 2 zásahy.
- 1.7. Na dvojkolejním železničním mostě se potkají v průběhu 24 hodin dva protijedoucí vlaky s pravděpodobností 0,2. Určete pravděpodobnost toho, že v průběhu týdne se dva vlaky na mostě potkají
 - a) maximálně třikrát,
 - b) nejméně třikrát,
 - c) právě třikrát.
 - d) Určete, kolikrát se vlaky potkají s největší pravděpodobností.
- 1.8. Písemná zkouška z matematiky obsahuje 5 příkladů. Pravděpodobnost spočítání jednoho příkladu je 0,8. Určete, jaká je pravděpodobnost, že student uspěje, stačí-li, aby spočítal aspoň 3 příklady.
- 1.9. Pravděpodobnost toho, že televizní obrazovka vydrží bez poruchy 3000 hodin provozu, je 0,4.
 - a) Jaká je pravděpodobnost toho, že alespoň jedna z pěti stejných obrazovek vydrží bez poruchy 3000 hodin?
 - b) Jaký nejpravděpodobnější počet z pěti obrazovek vydrží stanovený počet hodin bez poruchy?
- 1.10. Předpokládejme, že v populaci se vyskytují 4 % homosexuálně zaměřených jedinců. Jaká je pravděpodobnost, že ve 20-ti členné studijní skupině bude alespoň jeden takto zaměřený jedinec?
- 1.11. V rodině je n dětí. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Určete počet dětí tak, aby mezi nimi byl aspoň jeden chlapec s pravděpodobností alespoň 0,99.
- 1.12. Pravděpodobnost toho, že v některém okamžiku během jednoho roku bude na určitou konstrukci působit současně maximální zatížení pohyblivé a maximální zatížení větrem, činí $3 \cdot 10^{-8}$. Tato pravděpodobnost se během let nemění. Životnost konstrukce je 100 let. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu trvání konstrukce se obě zatížení ve svých maximálních hodnotách střetnou alespoň jednou?
- 1.13. Karetní hru o 52 kartách dělíme libovolně na dvě stejné části. Jaká je pravděpodobnost, že v každé části budou dvě esa?



- 1.14. Pět žárovek ze sta se namátkou kontroluje. Při výběru žárovky nevracíme. Vyskytne-li se mezi pěti kontrolovanými zmetek, je celá stovka vyřazena jako zmetkovitá. Jaká je pravděpodobnost, že daných sto žárovek bude vyřazeno, víme-li, že je mezi nimi 6 zmetků?
- 1.15. Na stavbu byly dovezeny cihly ze tří cihelen a složeny na společné skládce. Jejich množství jsou v poměru 1:2:2. Cihly vyrobené jednotlivými cihelnami vyhoví předepsaným normám jakosti s pravděpodobností rovnou postupně 0,80, 0,65, 0,72. Ze skládky cihel náhodně vybereme jeden kus, abychom laboratorně zjistili, zda splňuje předepsané požadavky. Jaká je pravděpodobnost toho, že cihla bude mít předepsanou kvalitu?
- 1.16. Studijní skupina, v níž je 6 studentek a 18 studentů, se pro laboratorní cvičení náhodně rozděluje na 6 skupin po čtyřech. Jaká je pravděpodobnost, že v každé skupině bude studentka?
- 1.17. Z osudí, v němž je 10 koulí bílých a 2 červené, táhneme n -krát po jedné kouli a po každém tahu ji vrátíme zpět. Určete nejmenší hodnotu n tak, aby pravděpodobnost jevu, že alespoň jednou vytáhneme červenou kouli, byla větší než $1/2$.
- 1.18. Tři rovnocenní hráči A, B, C hrají společenskou hru. Určete, zda je pravděpodobnější, že hráč A vyhraje 3 ze 4 nebo 5 z 8 partií.
- 1.19. Mějme terč tvořený dvěma soustřednými kružnicemi o poloměrech $2r$ a $3r$. Předpokládáme stejnou pravděpodobnost zásahu do libovolného bodu terče. Určete pravděpodobnost toho, že ze tří zásahů terče bude jeden zásah do vnitřního kruhu.
- 1.20. Pravděpodobnost toho, že množství odebraného elektrického proudu v určitém závodě je normální (nepřesáhne plánovanou spotřebu za 24 hod.), je rovna $3/4$. Stanovte pravděpodobnost, že v nejbližších šesti dnech bude alespoň po dobu tří dnů odběr proudu normální.

3.1.2 Výsledky úloh k řešení

- 1.1. 0,33; 0,33
- 1.2. 0,825
- 1.3. 0,003
- 1.4. 0,53
- 1.5. 0,52
- 1.6. 0,0512; 0,0067; 0,9932
- 1.7. a) $p(x \leq 3) = \sum C_i(7) \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{7-i}, i = 0, \dots, 3$
b) $p(x \geq 3) = 1 - \sum C_i(7) \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{7-i}, i = 0, \dots, 2$
c) $p(x=3) = C_3(7) \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 \approx 0,11469$
d) $(n+1) \cdot p - 1 \leq x \leq (n+1) \cdot p \rightarrow x = 1$
- 1.8. 0,942
- 1.9. a) $1 - C_0(5) \cdot (1 - 0,4)^5 \approx 0,92224$
b) $x = 2$
- 1.10. 0,558
- 1.11. 7
- 1.12. $3 \cdot 10^{-6}$
- 1.13. 0,390156
- 1.14. $1 - 94/100 \cdot 93/99 \cdot 92/98 \cdot 91/97 \cdot 90/96 =$
 $= 1 - C_5(94) / C_5(100) = 0,270914$
- 1.15. 0,708
- 1.16. $C_1(6)C_3(18)/C_4(24) \cdot C_1(5) \cdot C_3(15)/C_4(20) \cdot C_1(4) \cdot C_3(12)/C_4(16) \cdot$



- $*C_1(3)*C_3(9)/C_4(12)*C_1(2)*C_3(6)/C_4(8)*C_1(1)*C_3(3)/C_4(4) = 0,0304318$
- 1.17. $1 - (5/6)^n > 1/2$; $n_{\min} = 4$
- 1.18. $p_{3/4} = C_3(4)*(1/3)*(2/3) = 8/11 = 0,0987654$
 $p_{5/8} = C_5(8)*(1/5)^5*(2/3)^3 = 448/6581 = 0,0682822$
- 1.19. 0,411522
- 1.20. $1 - (C_0(6)*(3/4)^0*(1/6)^6 + C_1(6)*(3/4)^1*(1/4)^5 + C_2(6)*(3/4)^2*(1/4)^4) = 0,9624$

3.1.3 Sada testovacích otázek

- T3.1. Pravděpodobnost uskutečnění jevu A za předpokladu, že nastal jev B , se zapisuje
- $P(A/B)$ a nazývá se úplná pravděpodobnost.
 - $P(A/B)$ a nazývá se podmíněná pravděpodobnost.
 - $P(A \cap B)$ a nazývá se úplná pravděpodobnost.
- T3.2. Každý pátý zákazník v supermarketu použije při placení platební kartu. V řadě u pokladny stojí před vámi tři zákazníci. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z nich bude platit kartou? Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.
- 0,5
 - 0,6
 - 0,7
- T3.3. Který z následujících opakovaných pokusů je závislý?
- Střelba do terče.
 - Střelba do davu.
 - Hod kostkou.
 - Hod navrtanou kostkou.
- T3.4. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti hracími kostkami padnou pouze lichá čísla?
- přibližně 1,5%
 - přibližně 2%
 - přibližně 2,5%
 - přibližně 3%
- T3.5. Který z následujících opakovaných pokusů je nezávislý?
- Výběr karet z balíčku.
 - Tahání různobarevných králíků z klobouku.
 - Hod navrtanou kostkou.
- T3.6. Opilec stojí na okraji výkopu, aniž by o tom věděl. S pravděpodobností 0,5 udělá krok vpřed a s pravděpodobností 0,5 krok vzad. Jaká je pravděpodobnost, že spadne do výkopu nejpozději po třech krocích?
- 57,5%
 - 62,5%
 - 66,6%
- T3.7. Jsou-li náhodné jevy A , B nezávislé, pak platí
- $A \cap B = \emptyset$
 - $A \cup B = I$
 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- T3.8. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,51, pravděpodobnost narození děvčete je 0,49. Rodina má dvě děti. Pak
- je pravděpodobnější, že obě děti budou stejného pohlaví.
 - je pravděpodobnější, že děti budou různého pohlaví.
 - možnosti a), b) jsou stejně pravděpodobné.



T3.9. Jsou-li náhodné jevy A, B neslučitelné, pak platí

- a) $A \cap B = \emptyset$
- b) $A \cup B = I$
- c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

T3.10. V přednáškové místnosti sedí 100 studentů. Mezi nimi je 60 mužů a 40 žen. Přednáška zajímá $\frac{2}{3}$ přítomných mužů a polovinu přítomných žen. Náhodně vybereme jednoho z přítomných, kterého přednáška zajímá. Jaká je pravděpodobnost, že je to muž?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{3}{5}$

3.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

- T3.1. b)
- T3.2. a)
- T3.3. b)
- T3.4. a)
- T3.5. c)
- T3.6. b)
- T3.7. c)
- T3.8. a)
- T3.9. d)
- T3.10. b)
- T3.11. b)
- T3.12. a)
- T3.13. b)
- T3.14. a)
- T3.15. c)
- T3.16. b)
- T3.17. c)
- T3.18. a)
- T3.19. d)
- T3.20. b)

