

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 4 – Náhodná veličina

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

© Mgr. Petr Otipka

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3034-6



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

4	NÁHODNÁ VELIČINA	3
4.1	Řešené úlohy	3
4.1.1	Úlohy k řešení	3
4.1.2	Výsledky úloh k řešení	4
4.1.3	Sada testovacích otázek.....	5
4.1.4	Správné odpovědi k testovacím otázkám	7



4 NÁHODNÁ VELIČINA

4.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

4.1.1 Úlohy k řešení

- 1.1. Třikrát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je $p = 0,7$. Určete:

a) pravděpodobnostní funkci počtu zásahů při třech nezávislých výsledcích,
b) distribuční funkci a její graf.

- 1.2. Náhodná veličina X je dána distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 3 \\ \frac{x}{3} - 1 & \text{pro } 3 \leq x < 6 \\ 1 & \text{pro } x \geq 6 \end{cases}$$

Určete $f(x)$, znázorněte graficky $f(x)$, $F(x)$ a $P(1,5 \leq X \leq 4)$.

- 1.3. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$$

Určete distribuční funkci

- 1.4. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ cx(1-x) & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

Určete koeficient c , distribuční funkci $F(x)$ a $P(X > 0,2)$.

- 1.5. Dva hráči hrají společenskou hru. Pravděpodobnost výhry hráče A je $2/3$, hráče B $1/3$. Hráči opakují hru tolikrát, až vyhraje hráč A. Určete zákon rozložení náhodné veličiny, která značí počet uskutečněných her.

- 1.6. Dokažte, že pro $n = 1, 2, \dots$ je výraz

$$p_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

pravděpodobnostní funkcí rozložení diskrétní náhodné veličiny. Určete pravděpodobnosti $P(X < 3)$, $P(X \leq 10)$.

- 1.7. Určete,

a) pro jaká A, B bude $F(x) = A + \frac{B}{1+x^2}$ funkcí rozložení náhodné proměnné pro

$$x \in (0, \infty),$$

b) příslušnou hustotu rozložení.

- 1.8. Která z uvedených funkcí je pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X , která nabývá hodnot 0, 2, 4, 6:

a) $p(x) = \frac{1}{x}$

b) $p(x) = \frac{c}{x+1}$



$$c) p(x) = \frac{x^2 - 4}{2}$$

1.9. Je funkce $F(x) = \sin x$ distribuční funkcí náhodné veličiny X v intervalu

a) $\langle 0, \pi \rangle$,

b) $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$?

1.10. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ C \cdot x \cdot e^{-x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Určete konstantu C , $P(0 \leq X < 2)$ a distribuční funkci.

1.11. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny, která značí součet ok při hodu

a) jednou kostkou,

b) dvěma kostkami,

c) třemi kostkami.

1.12. Určete,

a) pro jaké C bude funkce $F(x) = \sin Cx$ funkcí rozložení náhodné proměnné pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

b) příslušnou hustotu rozložení,

c) pravděpodobnost $P\left(\frac{\pi}{2} \leq X < \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.13. Náhodná veličina X je určena tabulkou:

X	-2	0	2	4	6
p	0,1	?	0,2	0,3	0,2

Určete hodnotu pravděpodobnosti pro $X = 0$, distribuční funkci a pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina nabude kladných hodnot.

1.14. Distribuční funkce Rayleighova rozdělení spojitě náhodné veličiny má tvar:

$$F(x) = C - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \text{ Určete konstantu } C \text{ a hustotu pravděpodobnosti } f(x).$$

1.15. Je funkce $F(x) = \sin x$ distribuční funkcí náhodné veličiny X v intervalu

a) $\langle 0, \pi \rangle$,

b) $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$?

4.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. $p(x) = \binom{3}{x} \cdot 0,7^x \cdot 0,3^{3-x}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



$$P(1,5) \leq X \leq 4 = \frac{1}{3}$$

$$1.3. \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$$

$$1.4. \quad c = 6$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X > 0,2) = 0,896$$

$$1.5. \quad p_k = 2 / 3^k$$

$$1.6. \quad P(X < 3) = 2 / 3 ; P(X \leq 10) = 10 / 11$$

$$1.7. \quad A = 1, B = -1, f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$1.8. \quad \text{pouze b) pro } c = 105/176$$

$$1.9. \quad \text{pouze b)}$$

$$1.10. \quad C = 1, P(0 \leq X < 2) = 1 - 3e^{-2}, F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$1.11. \quad a) 6, p_k = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$b) 36, p_k = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$$

$$c) 216, p_k = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1)$$

$$1.12. \quad a) C = \frac{1}{4}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{4} \cos \frac{x}{4} & \text{pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } x > 2\pi \end{cases}$$

$$c) \quad \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 0,5412$$

$$1.13. \quad P(X = 0) = 0,2, P(X > 7) = 0,7$$

$$1.14. \quad C = 1, f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

$$1.15. \quad b)$$

4.1.3 Sada testovacích otázek

T4.1. Je dána spojitá náhodná veličina a její distribuční funkce $F(x)$ a hustota pravděpodobnosti $f(x)$. Vyberte, jaký je mezi nimi vztah.

$$a) F(x) = f'(x)$$

$$b) f(x) = F'(x)$$

c) Mezi $F(x)$ a $f(x)$ neexistuje obecný matematický vztah.

T4.2. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí:



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{pro } x \in \langle 2; 2,5 \rangle \\ 1 & \text{pro } x > 2,5 \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot větších než 0?

- a) 0
- b) 1
- c) -4
- d) 0,5

T4.3. Čemu je rovna hodnota distribuční funkce $F(\infty)$?

- a) 0
- b) 1
- c) ∞

T4.4. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{pro } x \in \langle 2; 2,5 \rangle \\ 1 & \text{pro } x > 2,5 \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot větších než 5?

- a) 0
- b) 1
- c) 0,5
- d) 6

T4.5. Čemu je rovna hodnota výrazu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, kde $f(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny?

- a) 0
- b) 1
- c) ∞
- d) Nelze obecně rozhodnout.

T4.6. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobnosti:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	?	0,2	0,2

Čemu je rovna chybějící hodnota pravděpodobnosti pro $X = 1$?

- a) 0,2
- b) 0,4
- c) 0,6

T4.7. Distribuční funkce náhodné veličiny je

- a) rostoucí funkce.
- b) klesající funkce.
- c) nerostoucí funkce.
- d) neklesající funkce.
- e) funkce, která nemá žádnou z předchozích vlastností.

T4.8. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobnosti:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	?	0,2	0,2



Čemu je rovna hodnota distribuční funkce pro $X = 2$?

- a) 0,2
- b) 0,4
- c) 0,6

T4.9. Hustota pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny je

- a) rostoucí funkce.
- b) klesající funkce.
- c) nerostoucí funkce.
- d) neklesající funkce.
- e) funkce, která nemá žádnou z předchozích vlastností.

T4.10. Náhodná veličina X je

- a) reálná funkce definovaná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která každému elementárnímu jevu přiřadí číslo z tohoto intervalu.
- b) reálná funkce definovaná na množině reálných čísel, která každému reálnému číslu přiřadí elementární jev.
- c) reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

4.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

- T4.1. b)
- T4.2. b)
- T4.3. b)
- T4.4. a)
- T4.5. b)
- T4.6. b)
- T4.7. d)
- T4.8. c)
- T4.9. e)
- T4.10. c)

