INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 3

1.1 Řešení nehomogenní lineární DR s konstantními koeficienty 4

1.1.1 Metoda neurčitých koeficientů 4

1.1.2 Lagrangeova metoda variace konstant 9

2 POUŽITÁ LITERATURA 13

1 NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Nehomogenní LDR 2. řádu - Lagrangeova metoda variace konstant

Metoda neurčitých koeficientů

MOTIVACE:

Jelikož se v mnoha technických aplikacích (např. pohybová rovnice hmotného bodu, pohybová rovnice pro harmonické buzení, aplikace v dynamice rotorových soustav,...) setkáváme i s nehomogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu, naučíme se tyto rovnice vyřešit. Ukážeme si dvě metody pro nalezení řešení - obecnou metodu a metodu pro speciální typy rovnic.

CÍL:

Poznat speciální pravou stranu a umět správně napsat odhadovaný tvar řešení k příslušné pravé straně. Dokázat vyřešit nehomogenní lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty s využitím Lagrangeovy metody variace konstant.

1.1 ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DR S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Mějme úplnou rovnici $Ay'' + By' + Cy = D(x)$, tj. $D(x) \neq 0$.

Obecné řešení úplné rovnice má tvar: $y = y_0 + \hat{y}$,

kde y_0 je řešení příslušné zkrácené rovnice a $\hat{y}$ je partikulární řešení úplné rovnice příslušné pravé straně $D(x)$.

Nalézt y_0 umíme, takže zbývá nalézt partikulární řešení.

To je možno pomocí dvou metod:

1. Lagrangeova metoda variace konstant (univerzální metoda použitelná pro každou lineární diferenciální rovnici)
2. metoda neurčitých koeficientů (metoda použitelná pouze v případě speciálního tvaru pravé strany)

Audio 1.1 Metody pro řešení nehomogenních LDR

1.1.1 Metoda neurčitých koeficientů

Pro některé funkce $D(x)$ (tzv. speciální pravé strany) můžeme tvar partikulárního řešení předem odhadnout a následně jednoduše dopočítat. Tvar speciální pravé strany je dán v následující větě.

Věta: Nechť pravá strana lineární DR s konstantními koeficienty má tvar

$$D(x) = e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right],$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s-tého stupně a $a, b \in R$.

Pokud $a + ib$ $(a - ib)$ není kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$\hat{y} = e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right],$$

kde $R(x), S(x)$ jsou (zatím neznámé) mnohočleny nejvýše s-tého stupně.

Poznámka:

1. Obecněji, je-li $a \pm ib$ r-násobným kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál je ve tvaru

$$\hat{y} = x^r e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right].$$

2. je-li pravá strana ve tvaru polynomu $(a=0, b=0)$, je třeba vyšetřit, zda charakteristická rovnice nemá kořen 0

3. pokud je na pravé straně exponenciála $(a\neq 0, b=0, P(x)=1)$, je nutné vyšetřit, zda existuje kořen a

4. je-li na pravé straně $\cos bx+\sin bx$ $(a=0, b\neq 0, P(x)=1, Q(x)=1)$ je třeba ověřit, zda je kořenem hodnota ib, pokud je na pravé straně pouze jedna z goniometrických funkcí, partikulární řešení musíme hledat ve tvaru obsahujícím obě goniometrické funkce

Například:

speciální pravé strany:

$$\sin x\ (a=0, b=1, P(x)=0, Q(x)=1),$$

$$\sin x\cdot\frac{x}{e^x}\ (a=-1, b=1, P(x)=0, Q(x)=x)$$

nejsou speciální pravé strany:

$\sin x\cdot\cos 3x$ … funkce sinus a kosinus můžeme pouze sčítat

$\ln x$ … nejedná se o polynom, o exponenciální funkci ani o funkci sinus a kosinus

Tvar partikulárního řešení odhadneme podle následující tabulky ($P_n(x)$, $R_n(x)$ a $S_n(x)$ jsou polynomy n-tého stupně: $A_n x^n+\ldots+A_1 x+A_0$):

$D(x)$	kořen char. rovnice	$\hat{y}$
$P_n(x)$	$r=0$, k-násobný	$x^k R_n(x)$
	$r\neq 0$	$R_n(x)$
e^{ax}	$r=a$, k-násobný	$Ax^k e^{ax}$
	$r\neq a$	Ae^{ax}
$\cos bx$ $\sin bx$	$r=\pm ib$	$x(A\cos bx+B\sin bx)$
	$r\neq\pm ib$	$A\cos bx+B\sin bx$
$e^{ax}P_n(x)\cos bx$ $e^{ax}P_n(x)\sin bx$	$r=a\pm ib$	$xe^{ax}\left[R_n(x)\cos bx+S_n(x)\sin bx\right]$
	$r\neq a\pm ib$	$e^{ax}\left[R_n(x)\cos bx+S_n(x)\sin bx\right]$

Příklad:

Odhadněte pro rovnici $y''+5y'=D(x)$ tvar partikulárního řešení:

a) $D(x)=5x^2$,

b) $D(x)=\sin 5x$,

c) $D(x) = 3e^{5x}$,

d) $D(x) = 3e^{-5x}$

Řešení:

Potřebujeme najít řešení charakteristické rovnice: $r^2 + 5r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -5$

a) $D(x) = 5x^2$ … polynom druhého stupně $\Rightarrow$ i partikulární řešení musí být polynom stupně dva: $\hat{y} = Ax^2 + Bx + C$

musíme zkontrolovat, zda není řešením charakteristické rovnice 0: $r_1 = 0 \Rightarrow$ polynom musíme vynásobit x

partikulární řešení má tvar: $\hat{y} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$

b) $D(x) = \sin 5x$ … funkce sinus a kořeny charakteristické rovnice jsou reálná čísla (tzn. $\pm 5i$ není kořenem)

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = A\cos 5x + B\sin 5x$

c) $D(x) = 3e^{5x}$ … exponenciální funkce $\Rightarrow$ i partikulární řešení musí být exponenciální funkce se stejným argumentem, 5 není kořen

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = Ae^{5x}$

d) $D(x) = 3e^{-5x}$ … exponenciální funkce $\Rightarrow$ -5 je jednoduchý kořen

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = Axe^{5x}$

Nalezení obecného řešení

Po správném určení tvaru partikulárního řešení zbývá dopočítat neznámé koeficienty polynomů $R(x), S(x)$.

1. předpokládaný tvar řešení a jeho první a druhou derivaci dosadíme za y, y', y'' do původní (úplné) rovnice
2. dostaneme jednu rovnici pro neznámé koeficienty polynomů $R(x), S(x)$ a tu řešíme známou metodou neurčitých koeficientů, která spočívá v porovnání koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých funkcí na obou stranách rovnice - dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme

Poznámka:

Metodu neurčitých koeficientů lze použít i v případě, kdy pravá strana je rovna součtům speciálních pravých stran, např. $D(x) = (x+2)e^{7x} + \cos x$.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnice

a) $y'' + 4y = -2$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' + 4y = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$D(x) = -2$ … polynom stupně 0 a 0 není kořenem $\Rightarrow$ $\hat{y} = A$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení: $\hat{y}' = 0$, $\hat{y}'' = 0$ a dosadíme do původní rovnice $y'' + 4y = -2$ a nalezneme koeficient A

$$0 + 4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

dosadíme do $\hat{y} = A$ a dostáváme partikulární řešení: $\hat{y} = -\frac{1}{2}$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2}}$$

b) $y'' + 2y' = 8\cos 4x$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' + 2y' = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -2$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$

$$D(x) = 8\cos 4x \ \ldots \pm 4i \text{ není kořen } \Rightarrow \ \hat{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení:

$$\hat{y}' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x,$$

$$\hat{y}'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

dosadíme do původní rovnice $y'' + 2y' = 8\cos 4x$

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + 2\left(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x\right) = 8\cos 4x$$

a nalezneme koeficienty A, B porovnáním koeficientů u příslušných funkcí a vyřešením soustavy

$$\cos 4x: \ -16A + 8B = 8$$

$$\sin 4x: \ -16B - 8A = 0 \Rightarrow A = -2B$$

dosadíme do první rovnice: $32B + 8B = 8 \Rightarrow 40B = 8 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$ a $A = -\frac{2}{5}$

dosadíme do $\hat{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$ a dostáváme partikulární řešení:

$$\hat{y} = -\frac{2}{5}\cos 4x + \frac{1}{5}\sin 4x$$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\cos 4x + \frac{1}{5}\sin 4x}$$

c) $y'' - y = (x+1)e^x$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' - y = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$D(x) = (x+1)e^x$ … jedná se o speciální pravou stranu (tvar $e^{ax}P_n(x)\sin bx$) - polynom stupně jedna krát exponenciální funkce s argumentem x, vidíme, že 1 je kořen

$$\Rightarrow \ \hat{y} = x \cdot (Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x$$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení:

$$\hat{y}' = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + B\right)e^x = e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right),$$

$$\hat{y}'' = e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right) + e^x\left(2Ax + 2A + B\right)$$

dosadíme do původní rovnice $y'' - y = (x+1)e^x$

$$e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B\right) + e^x\left(2Ax + 2A + B\right) - \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = (x+1)e^x$$

$$e^x\left(4Ax + 2A + 2B\right) = (x+1)e^x$$

$$4Ax + 2A + 2B = x + 1$$

a nalezneme koeficienty A, B porovnáním koeficientů u příslušných funkcí a vyřešením soustavy

$$x:\ 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x^0:\ 2A + 2B = 1 \Rightarrow 2B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

dostáváme partikulární řešení:

$$\hat{y} = \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^x$$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^x}{4}(x^2 + x)}$$

1.1.2 Lagrangeova metoda variace konstant

Princip metody je analogický řešení lineární diferenciální rovnice I. řádu.

Mějme nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru

$$y'' + By' + Cy = D(x),$$

kde $B, C \in R$.

Víme, že obecné řešení zkrácené rovnice má tvar

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

přičemž $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém řešení.

Využijeme metody variace konstant.

Hledané obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

kde $C_1(x), C_2(x)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce.

Podobným postupem jako u rovnic prvního řádu (který je ale komplikovanější) dostaneme:

nechť funkce $C_1(x), C_2(x)$ splňují soustavu

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$$
$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=D(x),$$

pak funkce y je obecným řešením.

Při řešení soustavy využijeme Wronskiánu $\left(W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right)$ a Cramerova pravidla:

$$C_1'(x)=\frac{W_1}{W}, \text{ kde } W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix} \text{ a } C_2'(x)=\frac{W_2}{W}, \text{ kde } W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & D(x) \end{vmatrix}.$$

Příklad:

Řešte diferenciální rovnice

a) $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y''+3y'+2y=0$

charakteristická rovnice: $r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-2$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$D(x)=\frac{1}{1+e^x}$ … nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi: $y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x}$

stačí určit funkce $C_1(x), C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-2e^{-3x}+e^{-3x}=-e^{-3x}$$

nalezení $C_1(x)$:

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-\frac{e^{-2x}}{1+e^x}$$

$$C_1'(x)=\frac{W_1}{W}=-\frac{e^{-2x}}{(1+e^x)(-e^{-3x})}=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$C_1(x)=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\ln\left|1+e^x\right|+c_1$$

nalezení $C_2(x)$:

$$W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & D(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x}\end{vmatrix}=\frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

$$C_2'(x)=\frac{W_2}{W}=\frac{e^{-x}}{(1+e^x)(-e^{-3x})}=-\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$C_2(x)=-\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\ldots=\ln\left|1+e^x\right|-1-e^x+c_2$$

obecné řešení získáme dosazením $C_1(x),C_2(x)$ do $y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x}$:

$$y=\left(\ln\left|1+e^x\right|+c_1\right)e^{-x}+\left(\ln\left|1+e^x\right|-1-e^x+c_2\right)e^{-2x}$$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{-x}\ln\left|1+e^x\right|+e^{-2x}\left(\ln\left|1+e^x\right|-1-e^x\right)$$

b) $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y''+y=0$

charakteristická rovnice: $r^2+1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$

$D(x)=\frac{1}{\cos^3 x}$ … nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi: $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$

stačí určit funkce $C_1(x),C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

nalezení $C_1(x)$:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\frac{1}{2\cos^2 x} + c_1$$

nalezení $C_2(x)$:

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c_2$$

obecné řešení získáme dosazením $C_1(x), C_2(x)$ do $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$:

$$y = \left(-\frac{1}{2\cos^2 x} + c_1\right)\cos x + (\tan x + c_2)\sin x$$

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos x}}$$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz