INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Obyčejné diferenciální rovnice

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 3
1.1 Rovnice 1. řádu 4
1.1.1 Řešení diferenciálních rovnic dělíme do tří typů 4
1.2 Separovatelné diferenciální rovnice 6
1.2.1 Úprava obecného řešení 7
2 POUŽITÁ LITERATURA 11

1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Rovnice 1. řádu

Separovatelné diferenciální rovnice

MOTIVACE:

Diferenciální rovnice jsou velmi důležitou částí matematické analýzy, protože umožňují řešit mimo jiné celou řadu úloh z fyziky a technické praxe. Postup při řešení praktických problémů spočívá v sestavení diferenciální rovnice (ze známých vlastností problému), vyřešení rovnice a následného převedení nalezeného řešení zpět do praxe. V podobě diferenciálních rovnic lze formulovat velkou spoustu vědeckých problémů, a tak se diferenciální rovnice objevují snad ve všech vědeckých oborech. Největší zastoupení mají v matematice a fyzice. Lze se však s nimi také setkat např. v chemii, sociologii, ekologii atd. Ve fyzice (mechanice, aplikované mechanice, termodynamice, ...) jsou ve formě diferenciálních rovnic formulovány většiny fyzikálních zákonů. Tyto rovnice nejčastěji popisují závislost fyzikálních veličin na čase. Hlavním představitelem těchto rovnic ve fyzice (mechanice) jsou rovnice pohybové, které popisují pohyb těles pod vlivem vzájemných a vnějších sil, např. se jedná o Hamiltonovy rovnice či Lagrangeovy rovnice.

CÍL:

Chápat pojem obyčejná diferenciální rovnice a pochopit rozdíl mezi jednotlivými typy řešení. Umět řešit separovatelné diferenciální rovnice.

1.1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Za *obyčejnou diferenciální rovnici* n-tého řádu označujeme rovnici

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,,$$

v níž je neznámou funkce y a daná rovnice obsahuje derivace do řádu n neznámé funkce jedné nezávislé proměnné. Jinak řečeno, diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi funkcí jedné proměnné a jejími derivacemi.

Audio 1.1 Diferenciální rovnice

Řádem diferenciální rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace (my se budeme věnovat diferenciálním rovnicím 1. a 2. řádu - obsahují y', případně y'').

1.2 ROVNICE 1. ŘÁDU

Jedná se o diferenciální rovnici

$$y' = F(x, y)\,,$$

kde $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných.

Definice: Řekneme, že funkce φ, která je definovaná na intervalu (a,b), je *řešením* diferenciální rovnice $y' = F(x, y)$ na (a,b), pokud ve všech bodech (a,b) má derivaci $\varphi'(x)$ a pro $\forall x \in (a,b)$ platí:

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))\,.$$

Poznámka:

Řešením nazveme každou funkci, která vyhovuje dané rovnici.

Definice: *Cauchyovou úlohou* (počáteční úloha) pro diferenciální rovnici $y' = F(x, y)$ označujeme úlohu

$$\begin{cases} y' & = & F(x, y), \\ y(x_0) & = & y_0. \end{cases}$$

Jejím řešením je řešení φ, které splňuje počáteční podmínku $\varphi(x_0) = y_0$.

1.2.1 Řešení diferenciálních rovnic dělíme do tří typů

1. *Obecné řešení* rovnice 1. řádu tvoří každá funkce tvaru $y = \varphi(x, C)$, která splňuje rovnici pro libovolnou konstantu C. Obecné řešení tedy vždy obsahuje integrační konstantu.

2. *Partikulární řešení* (částečné) získáme přiřazením konkrétní hodnoty integrační konstantě v obecném řešení. Tzn. obecné řešení je souhrnem všech partikulárních řešení.

3. *Singulární řešení* (výjimečné) nelze získat z obecného. Vzniká jen u některých typů diferenciálních rovnic v průběhu jejich řešení.

Audio 1.2 Typy řešení diferenciální rovnice

Graf funkce, která je řešením dané diferenciální rovnice, se nazývá *integrální křivka* dané diferenciální rovnice.

Nejjednodušší typ diferenciální rovnice 1. řádu můžeme napsat ve tvaru:

$$y' = f(x),$$

což vede k hledání primitivní funkce. Dokážeme-li nalézt k funkci $f(x)$ funkci primitivní, dokážeme také vyřešit tuto diferenciální rovnici.

Pak:

$$y = \int f(x)dx\,.$$

Konstanta je zahrnuta v integrálu. Z toho je zřejmé, že hledaná funkce není jednoznačně určena, ale že diferenciální rovnice má řešení nekonečně mnoho.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici $y'(y-x) = (y-x)\sin x$

Řešení:

Rovnici můžeme vydělit výrazem $(y-x)$, za předpokladu $y \neq x$, a dostáváme

$$y' = \sin x \;\Rightarrow\; y = \int \sin x dx \;\Rightarrow\; y = -\cos x + c \;\; \ldots \text{ obecné řešení}$$

Ještě musíme ověřit, zda $y = x$ není také řešením. Dosadíme do rovnice:

$$1(x-x) = (x-x)\sin x$$
$$0 = 0$$

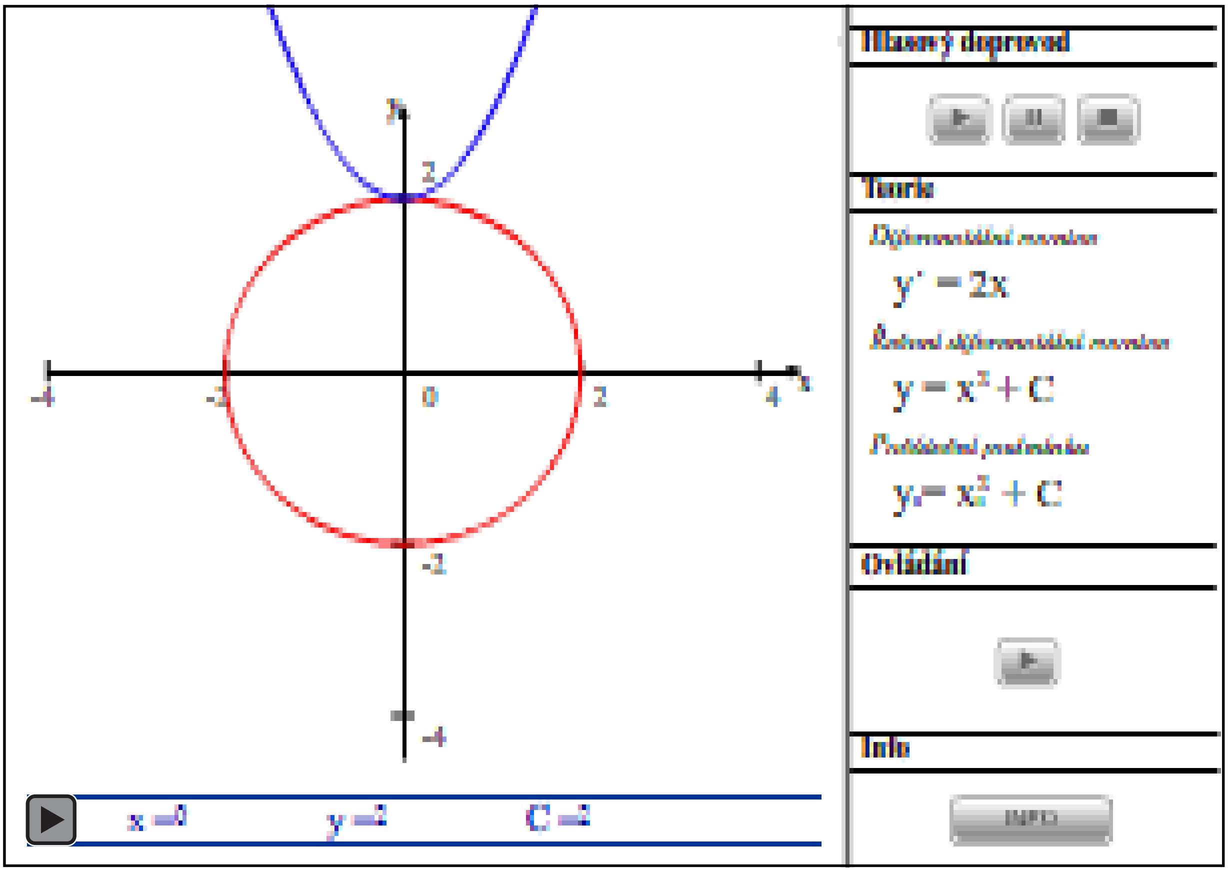
$$\Rightarrow \;\; y = x \text{ je singulární řešení}$$

Poznámka:

Rovnice $y' = 2x$ má obecné řešení $y = x^2 + C$, kdežto $y = x^2$, $y = x^2 - 4$ atd. jsou její partikulární řešení. Integrální křivky této diferenciální rovnice jsou paraboly rovnoběžně posunuté ve směru osy y.

Jelikož za C můžeme zvolit libovolné reálné číslo, můžeme na hledanou funkci klást další požadavek - zvolit počáteční podmínku. Chceme například, aby hledaná integrální křivka $y = x^2 + C$ procházela předem zvoleným bodem $A = [-1,5]$. Pak $5 = (-1)^2 + C \;\Rightarrow\; C = 4$, takže rovnice hledané křivky bude $y = x^2 + 4$.

V animaci si ukážeme závislost řešení diferenciální rovnice na počáteční podmínce. Budeme postupně volit body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = 4$ a vykreslovat řešení rovnice $y' = 2x$ procházející daným bodem. V každém bodě tudíž známe směr, kudy řešení vede.



1.3 SEPAROVATELNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Definice: Diferenciální rovnice tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0$$

se nazývá *separovaná* diferenciální rovnice.

Rovnice, která není separovaná, ale lze na ni převést se nazývá *separovatelná*:

$M(x)N(y) + R(x)S(y)y' = 0$. Za předpokladu, že $N(y) \neq 0,\ R(x) \neq 0$, převádíme rovnici na tvar $\dfrac{M(x)}{R(x)} + \dfrac{S(y)}{N(y)}y' = 0$ a tato rovnice je již separovaná (musíme zase zkontrolovat možná singulární řešení).

Poznámka:

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je tedy rovnice, ve které jde její pravá strana napsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné y: $y' = f(x)g(y)$.

Např.: $y' = x^3(1-y)$ je separovatelná, ale rovnice $y' = x^3 - y$ není

Audio 1.3 Separovatelná diferenciální rovnice

Postup řešení:

1. derivaci y' přepíšeme jako podíl $\frac{dy}{dx}$ a dostáváme: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
2. získanou rovnost vynásobíme symbolem dx a vydělíme výrazem $g(y)$, tím převedeme na jednu stranu výrazy s jednou proměnnou a na druhou stranu výrazy s druhou proměnnou, tzn., že proměnné jsou separovány (odděleny) a můžeme psát:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

3. integrujeme obě strany rovnice a po výpočtu integrálů budeme na jedné straně uvažovat integrační konstantu, tím obdržíme obecné řešení rovnice:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

4. pokud $g(y) = 0$, pak $\frac{dy}{dx} = 0$, tj. $y = konst.$ a dostáváme tzv. singulární řešení.

1.3.1 Úprava obecného řešení

Vypočítané obecné řešení někdy upravujeme, hlavně v případech, když integrací vznikla na levé straně logaritmická funkce. V tomto případě převedeme i pravou stranu na logaritmickou funkci užitím vztahu

$$A = \ln e^{A}.$$

Předpokládejme, že obecné řešení nějaké diferenciální rovnice má tvar:

$$\ln m(y) = n(x) + C.$$

Na pravé straně zavedeme logaritmickou funkci

$$\ln m(y) = \ln e^{n(x)+C},$$

$$\ln m(y) = \ln(e^{n(x)} e^{C}).$$

Z rovnosti logaritmů plyne

$$m(y) = e^{n(x)} e^{C}.$$

Označíme $e^{C} = C_1$, pak

$$m(y) = C_1\, e^{n(x)}.$$

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici

a) $y' - y = 0$

b) $xyy' = \dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

Řešení:

a) $y' - y = 0$

osamostatníme na levé straně y'

$y' = y$, dostali jsme na pravé straně součin funkce proměnné x a y $\Rightarrow$ jedná se o separovatelnou rovnici

y' nahradíme podílem diferenciálů $\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = y$, upravíme na tvar $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, vydělíme y, pokud $y \neq 0$, a vynásobíme dx

$$\frac{dy}{y} = dx$$

integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + c$$

a dostáváme obecné řešení

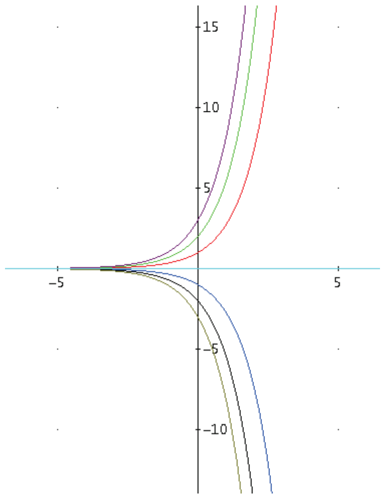
$$\ln|y| = x + c$$

jelikož nám na levé straně vznikla logaritmická funkce, řešení upravíme

$$\ln|y| = \ln e^{x+c}$$

$$\ln|y| = \ln(e^{x} \cdot C)$$

$y = Ce^{x}$ … obecné řešení



řešení rovnice $y' - y = 0$ pro $C = -3,-2,-1,1,2,3$ a singulární řešení $y = 0$

b) $xyy' = \dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

$$y' = \frac{1-x^2}{xy(y^2+1)} \text{ za předpokladu } x, y \neq 0$$

$$y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y(y^2+1)} \ \ldots \text{ separovatelná}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y(y^2+1)}$$

$$y(y^2+1)dy = \frac{1-x^2}{x}dx \ \ldots \text{ separovaná}$$

$$\int (y^3 + y)dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c \ \ldots \text{ obecné řešení}$$

Příklad:

Najděte křivku procházející počátkem soustavy souřadnic, pro kterou směrnice tečny v každém jejím bodě je rovna $2x+1$.

Řešení:

Směrnice tečny je derivace funkce y'

$$\Rightarrow y' = 2x + 1$$

$$y = \int (2x+1)dx$$

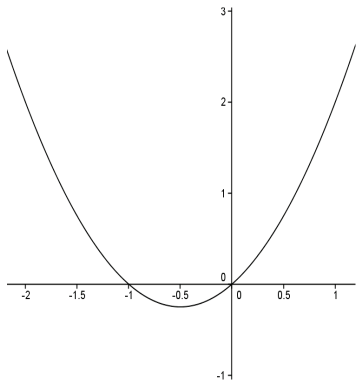
$$y = x^2 + x + c \ \ldots \text{ obecné řešení}$$

hledáme řešení procházející počátkem soustavy souřadnic $[0,0]$, tj. partikulární řešení

bod $[0,0]$ dosadíme do obecného řešení

$$0 = 0^2 + 0 + c \Rightarrow \ c = 0$$

hledaná křivka má rovnici: $y = x^2 + x$, jedná se o parabolu s vrcholem o souřadnicích $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, viz. obr.



2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz