

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 1

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 1.....	3
1.1	Příklady.....	4
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	8



1 CVIČENÍ Č. 1



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Hledání primitivních funkcí

Výpočet tabulkových integrálů

Aplikace vlastností neurčitého integrálu



MOTIVACE:

Integrál je jedním ze základních pojmů matematiky. Integrální počet je využíván nejen v matematických disciplínách, ale i ve fyzice, mechanice, statistice, chemii, ekonomii a dalších technických oborech. Například v dynamice se neurčitý integrál využívá při výpočtu rychlosti a dráhy při rovnoměrně zrychleném pohybu nebo při určování momentu setrvačnosti v geometrii hmot (např. tyč rotující kolem osy, výroba motorů.) atd.



CÍL:

Chápat pojem primitivní funkce a neurčitý integrál. Umět integrovat tabulkové funkce s využitím vlastností neurčitý integrálu.



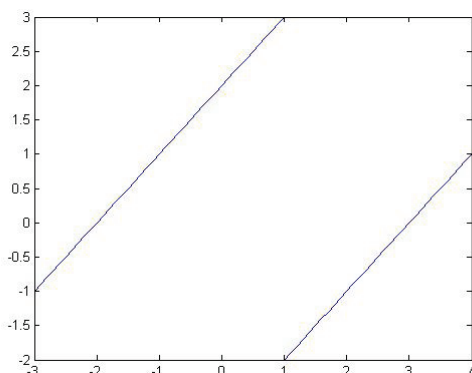
1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Nakreslete graf funkce $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \in (-\infty, 1) \\ x-3 & x \in [1, \infty) \end{cases}$ a rozhodněte, zda k $f(x)$ existuje primitivní funkce na intervalu $I = \mathbb{R}$.

Řešení:

Graf:



Z grafu vidíme, že funkce $f(x)$ není spojitá na $I \Rightarrow$ na I primitivní funkce k $f(x)$ neexistuje.

Pokud bychom ale interval I rozdělili na dva intervaly $I_1 = (-\infty, 1)$ a $I_2 = [1, \infty)$, primitivní funkce by již existovaly: $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$ na I_1 a $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 3x$ na I_2 .

Příklad 2:

K jaké funkci je funkce $F(x) = 3 \arctan(x+2) - \frac{2x}{\cos 3x}$ primitivní?

Řešení:

musí platit: $f(x) = F'(x) \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{1+(x+2)^2} - \frac{2 \cos 3x + 6x \sin 3x}{\cos^2 3x} = f(x)$

Příklad 3:

Určete křivku, která prochází bodem $A[1,2]$ a jejíž tečna má v libovolném bodě směrnici $e^x + 2x + 1$.

Řešení:

víme, že směrnice tečny ke grafu funkce v bodě je derivace funkce v daném bodě $\Rightarrow$ známe derivaci, hledáme primitivní funkci procházející bodem A



$$\int (e^x + 2x + 1) dx = e^x + x^2 + x + c$$

stačí najít c , pro které primitivní funkce prochází bodem A

$$\begin{aligned} y &= e^x + x^2 + x + c \\ \Rightarrow 2 &= e^1 + 1 + 1 + c \quad \Rightarrow \text{hledaná křivka má předpis: } y = e^x + x^2 + x - e \\ c &= -e \end{aligned}$$

Příklad 4:

Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\text{a) } \int \frac{3+x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx = 3 \int x^{-1/3} dx + \int x^{2/3} dx = 3 \frac{x^{2/3}}{2/3} + \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c$$

$$\text{b) } \int \frac{-4}{x^2+4} dx = -4 \int \frac{dx}{x^2+2^2} = -\frac{4}{2} \arctan \frac{x}{2} + c = -2 \arctan \frac{x}{2} + c$$

$$\text{c) } \int \left(2x^4 - \cos 2x + \frac{1}{x} \right) dx = 2 \int x^4 dx - \int \cos 2x dx + \int \frac{1}{x} dx = 2 \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \sin 2x + \ln|x| + c$$

$$\text{d) } \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx = (\text{upravíme výraz pod odmocninou na tvar } 1-(ax+b)^2):$$

$$-(x^2 - 4x + 3) = -(x^2 - 4x + 4 - 1) = 1 - (x - 2)^2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 2)^2}} = \arcsin(x - 2) + c$$

$$\text{e) } \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = (\text{všimneme si, že derivace jmenovatele je rovna výrazu v čitateli}) = \ln|2x+1| + c$$

$$\text{f) } \int (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int 1 dx = x + c$$

$$\text{g) } \int (e^{3x} + 1) dx = \int e^{3x} dx + \int 1 dx = \frac{1}{3} e^{3x} + x + c$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x + \tan x + c \end{aligned}$$

$$\text{i) } \int \frac{e^x}{2e^x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{2e^x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(2e^x+5) + c$$

$$\text{j) } \int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \tan x + c$$



$$k) \int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int (x^2-1) dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

$$l) \int \frac{e^{2t}-1}{e^t-1} dt = \int \frac{(e^t-1)(e^t+1)}{e^t-1} dt = \int (e^t+1) dt = e^t + t + c$$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integral1/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integral2/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integral3/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integral4/index.html

Neřešené příklady:

Vypočítejte následující neurčité integrály:

$$a) \int \frac{(3+x)^2}{x^3} dx \quad \left[\ln|x| - \frac{3}{2} \frac{4x+3}{x^2} + c \right]$$

$$b) \int \left(x^5 - 2x + \frac{x^2}{3} \right) dx \quad \left[\frac{x^6}{6} - x^2 + \frac{1}{9} x^3 + c \right]$$

$$c) \int (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx \quad \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{5} x\sqrt[4]{x} + c \right]$$

$$d) \int (x-3)(\sqrt{x}+2) dx \quad \left[\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 6x + c \right]$$

$$e) \int \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx \quad \left[\frac{4}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c \right]$$

$$g) \int \frac{2}{x} (3 - xe^x) dx \quad \left[6 \ln|x| - 2e^x + c \right]$$

$$h) \int \cot g^2 x dx \quad \left[-\cot x - x + c \right]$$

$$i) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx \quad \left[\frac{1}{2} (x + \sin x) + c \right]$$

$$j) \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin 2x} dx \quad \left[-\frac{1}{2} \cot x + c \right]$$

$$k) \int \frac{dx}{4x^2+16} \quad \left[\frac{1}{8} \arctan \frac{x}{2} + c \right]$$



$$1) \int 5^{2x} dx$$

$$\left[\frac{1}{2 \ln 5} 5^{2x} + c \right]$$

Další příklady najdete v kapitole 5.1 ve sbírce úloh:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloz/pdf/5.pdf



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.
- [2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

