

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 2

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 2.....	3
1.1	Příklady.....	4
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	9



1 CVIČENÍ Č. 2



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Výpočet integrálů substitucí typu $\varphi(x) = t$

Výpočet integrálů substitucí typu $x = \varphi(t)$

Výpočet integrálů pomocí metody per partes



MOTIVACE:

Derivování je mechanický proces, integrování je již složitější. Ne všechny integrály lze řešit pomocí základních vzorců (např. integrace součinu, podílu a složených funkcí). Tyto integrály lze často řešit substituční metodou nebo metodou per partes tak, abychom dostali jednodušší integrál.



CÍL:

Pochopit princip substituční metody a metody per partes a dokázat poznat základní typy integrálů, které lze těmito metodami řešit. Umět aplikovat zmíněné metody při výpočtech integrálů.



1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Vypočtete následující integrál $\int \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{\arctan x}} dx$.

Řešení:

Nejedná se o tabulkový integrál a ani žádné úpravy nepovedou k tabulkovému integrálu, takže musíme při řešení zvolit jednu z využívaných metod při řešení integrálů. Vidíme, že integrand je složen ze součinu funkcí: $\int \frac{1}{\sqrt{\arctan x}} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)} dx$. Ze znalosti derivací hned víme, že

$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$, což je přesně to, co potřebujeme v substituční metodě prvního typu -

součin složené funkce $\frac{1}{\sqrt{\arctan x}}$ a derivace vnitřní funkce $\frac{1}{1 + x^2}$. Rozhodli jsme se tedy pro

1. substituční metodu a zkusíme ji aplikovat a integrál vypočítat.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\arctan x}} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)} dx = \left| \begin{array}{l} \arctan x = t \\ \frac{1}{1 + x^2} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad \dots \text{dostali jsme nový integrál proměnné } t,$$

který již spočítat umíme (použití substituce bylo správné)

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c. \text{ Tedr už musíme jen vrátit substituci } \arctan x = t \text{ a dostáváme řešení}$$

původního integrálu:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{\arctan x}} dx = 2\sqrt{\arctan x} + c.$$

Derivací nalezené primitivní funkce můžeme ověřit správnost výsledku:

$$(2\sqrt{\arctan x} + c)' = 2 \cdot \frac{1}{2} (\arctan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{\arctan x} \cdot (1 + x^2)}$$

Příklad 2:

Vypočtete následující integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

Řešení:

Opět se nejedná se o tabulkový integrál. Budeme zjišťovat, kterou metodu použít. Nejde o žádný ze základních typů pro využití per partes, proto první zkusíme substituční metodu 1. typu. Napadne nás tato substituce $1 - x^2 = t$, ověříme, zda máme v integrandu potřebný



součin. Po diferencování zvolené substituce máme $-2xdx = dt$, což znamená, že potřebujeme v čitateli x , to tam není a z toho důvodu tato substituce není možná.

Zkusíme substituci 2. typu - pod odmocninou je $1-x^2$, víme, že $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ a díky tomu se zbavíme odmocniny.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ (t = \arcsin x) \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} dt = \int \frac{\cos t}{(\sqrt{\cos^2 t})^3} dt = \int \frac{\cos t}{\cos^3 t} dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

... dostali jsme nový integrál proměnné t , který již spočítat umíme (použití substituce bylo správné)

$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + c$. Vrátime substituci $t = \arcsin x$ a dostaneme řešení původního integrálu:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \tan(\arcsin x) + c.$$

Příklad 3:

Vypočítejte následující integrál $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Řešení:

Opět se nejedná o tabulkový integrál. Opět jako první zkusíme substituční metodu. V integrandu je součin funkcí $\ln x$ a $\frac{1}{x^2}$. Ze znalosti derivací víme, že $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ale ne $\frac{1}{x^2}$, kterou máme v integrálu $\Rightarrow$ substituce použít nelze.

Jedná se o součin dvou odlišných funkcí, takže vyzkoušíme metodu per partes. Funkci $\frac{1}{x^2}$ umíme jednoduše integrovat i derivovat, funkci $\ln x$ umíme derivovat $\Rightarrow$ za funkci, kterou budeme derivovat, zvolíme $\ln x$ a za funkci, kterou budeme integrovat, zvolíme $\frac{1}{x^2}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx$$

... po použití metody per partes jsme dostali jednodušší integrál (tabulkový)

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$$



Příklad 4:

Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx &= (\text{uvědomíme si, že } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}) = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \tan x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3} \tan^3 x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int (x^2 + 1)e^{-x} dx &= \text{součin polynom a exp.fce} \Rightarrow \text{per partes} = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} - \int 2x \cdot (-e^{-x}) dx = -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx) = -(x^2 + 1)e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\ &= -(x^2 + 1)e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c = e^{-x}(-x^2 - 2x - 3) + c \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \sin(3x - 1) dx = \text{lineární sub. } a=3, b=-1 = \left| \begin{array}{l} 3x - 1 = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + c$$

d)

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & u' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \end{aligned}$$

... dostali jsme stejný integrál vynásobený konstantou různou od 1, použijeme obratu

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln x) dx &= x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\ 2 \int \cos(\ln x) dx &= x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) \\ \int \cos(\ln x) dx &= \frac{1}{2} (x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x)) + c \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int e^x \cos(e^x) dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin(e^x) + c$$



$$\text{f) } \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx = \int \frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 2^x = t \\ 2^x \cdot \ln 2 dx = dt \\ 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + c$$

$$\text{g) } \int x \cdot \cot(1+x^2) dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \cot t dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|\sin t| + c = \frac{1}{2} \ln|\sin(1+x^2)| + c$$

$$\text{h) } \int x \sqrt{2x^2+7} dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2+7 = t \\ 4x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{(2x^2+7)^3} + c$$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/perpartes1/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integralgon1a/index.html

Neřešené příklady:

Vypočtete následující neurčité integrály:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{\arctan x}} \quad \left[2\sqrt{\arctan x} + c \right]$$

$$\text{b) } \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx \quad \left[-e^{\cos^2 x} + c \right]$$

$$\text{c) } \int (2x-1) \ln x dx \quad \left[x(x-1) \ln x - x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + c \right]$$

$$\text{d) } \int \cos \sqrt{x} dx \quad \left[2(\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + c \right]$$

$$\text{e) } \int x \cdot e^{-x^2} dx \quad \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right]$$



$$g) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\left[x \tan x + \ln |\cos x| + c \right]$$

$$h) \int \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$\left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{\arctan^4 x} + c \right]$$

$$i) \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx$$

$$\left[-\frac{1}{2 + \sin x} + c \right]$$

Další příklady najdete v kapitole 5.2 a 5.3 ve sbírce úloh:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloz/pdf/5.pdf



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.
- [2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

