

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 3

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 3.....	3
1.1	Příklady.....	4
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 CVIČENÍ Č. 3



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Výpočet integrálů rozkladem na parciální zlomky
Integrovaní funkcí složených z goniometrických funkcí
Aplikace vlastností při výpočtu určitých integrálů



MOTIVACE:

Již umíme počítat neurčité integrály úpravou na základní integrály metodou per partes a substituční. U racionálních lomených funkcí nám tyto metody nepomohou, proto si ukážeme podrobný postup, který nám umožní integrovat libovolnou racionální lomenou funkci. Dále se podíváme na integrování funkcí složených z goniometrických funkcí. Takové integrály se často vyskytují v praktických úlohách (při řešení vícenásobných integrálů např. ve fyzikálních aplikacích - hmotnost a statický moment rovinné desky či souřadnice těžiště, atd.). Určitý integrál má řadu využití ve velkém množství aplikací.



CÍL:

Umět řešit integrály, kde je integrandem racionální lomená funkce či funkce složená z goniometrických funkcí. Pochopit základní vlastnosti určitého integrálu a umět aplikovat dané vlastnosti při výpočtech určitých integrálů.



1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Vypočtete následující integrál $\int \frac{3x^2 + 5x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)} dx$.

Řešení:

Jedná se o integraci racionální lomené funkce, kde derivace jmenovatele se nerovná funkci v čitateli, a proto si musíme pomoci rozkladem funkce na parciální zlomky. Stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, z toho důvodu nemusíme dělit a hned se pustíme do rozkladu. Kořeny polynomu ve jmenovateli jsou řešením rovnice $x(x^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow$ máme jeden reálný kořen a dva komplexní kořeny.

Odhadovaný tvar rozkladu je:

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B(2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x^2 + 2x + 2},$$

vynásobíme celou rovnici $x^2 + 2x + 2$

a srovnávací metodou určíme koeficienty $A = 1, B = 1, C = 1$.

V integrálu nahradíme původní funkci nalezeným rozkladem a vyřešíme.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 5x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \ln|x| + \ln(x^2 + 2x + 2) + \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} = \\ &= \ln|x| + \ln(x^2 + 2x + 2) + \arctg(x + 1) + c \end{aligned}$$

Příklad 2:

Vypočtete následující integrál $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Řešení:

Jedná se o integrál funkce složené z goniometrické funkce. Tento integrál můžeme vyřešit dvěma způsoby.

- a) Můžeme si uvědomit, že si integrál můžeme napsat také $\int \cos^{-1} x dx$, což je přesně integrál typu $\int \cos^m x \sin^n x dx$, kde mocnina u funkce kosinus je lichá. Z toho důvodu půjde určitě použít substituce tvaru $\sin x = t$, jen musíme původní integrand upravit.

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1 - t^2}$$



Po úpravě a aplikaci zvolené substituce jsme dostali integrál z racionální lomené funkce.

$$\text{Rozklad: } \frac{-1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{t-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{t+1} = -\frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln|t+1| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + c$$

b) Můžeme při řešení použít i univerzální substituce.

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dx}{t-1} + \int \frac{dx}{t+1} =$$

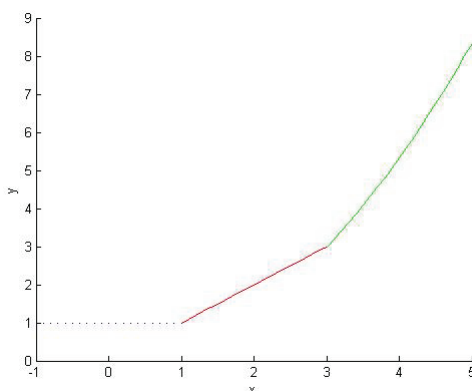
$$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| + c = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + c$$

Příklad 3:

$$\text{Vypočtete integrál } \int_{-1}^5 f(x) dx, \text{ kde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [-\infty, 1] \\ x & \text{pro } x \in [1, 3] \\ \frac{x^2}{3} & \text{pro } x \in [3, \infty] \end{cases}.$$

Řešení:

Daná funkce je spojitá v intervalu $x \in [-1, 5]$ i ohraničená, tzn., můžeme při výpočtu využít Newton-Leibnizovy formule.



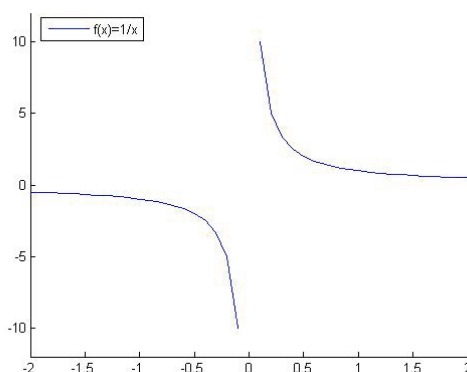
$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 dx + \int_1^3 x dx + \frac{1}{3} \int_3^5 x^2 dx = [x]_{-1}^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^5 = (1 - (-1)) + \frac{1}{2}(9 - 1) + \frac{1}{9}(125 - 27) = \frac{152}{9}$$

Příklad 4:

Vypočtete integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ a $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

Řešení:

Podívejme se na graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$.



Vidíme, že funkce není na intervalu $x \in [-1, 1]$ spojitá (ani po částech, v bodě $x = 0$ má bod nespojitosti 2. druhu) a proto integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ není definován.

Ale na intervalu $x \in [1, 3]$ již funkce spojitá je, takže integrál $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ jsme schopni určit.

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Příklad 5:

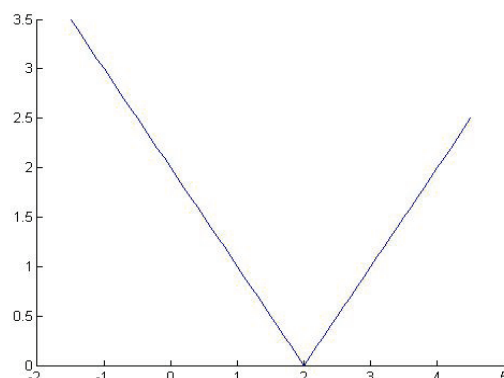
Vypočtete integrál $\int_{-1}^4 |x - 2| dx$.

Řešení:

Z definice absolutní hodnoty víme, že platí



$$|x-2| = \begin{cases} -x+2 & x \in [-1, 2] \\ x-2 & x \in [2, 4] \end{cases}, \text{ viz graf.}$$



Integrál $\int_{-1}^4 |x-2| dx$ existuje, protože funkce je na daném intervalu spojitá a ohraničená.

$$\int_{-1}^4 |x-2| dx = \int_{-1}^2 (-x+2) dx + \int_2^4 (x-2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

Příklad 6:

Vypočítejte následující neurčité a určité integrály:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = - \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt = \\ &= \int \left(-\frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t-1)^2} + \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} \right) dt = -\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| - \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1} \right) + c \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx$$

$$x(x^2 - 2x - 8) = x(x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5}{2}, B = \frac{3}{2}, C = 1$$

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{x-4} = -\frac{5}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + \ln|x-4| + c$$



$$\text{c) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 (1+t^2) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + c$$

$$\text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= [2 \operatorname{tg} x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x+2} dx = \int_{-1}^1 \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln|x+2| \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2} - 2 + 4 \ln 3 \right) - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) =$$

$$= 4(\ln 3 - 1)$$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integral7/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integralgon1a/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/integralgon1b/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UI1/index.html

Neřešené příklady:

Vypočtete následující neurčité a určité integrály:

$$\text{a) } \int \frac{6x^4}{x^3 - 1} dx \quad \left[3x^2 + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \right]$$

$$\text{b) } \int \frac{\cos x}{\cos x - 1} dx \quad \left[x + \cot g \frac{x}{2} + c \right]$$

$$\text{c) } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(5x+11)^5} \quad \left[\frac{259}{5184} \right]$$



$$d) \int_0^3 |1 - 3x| dx$$

$$\left[\frac{65}{6} \right]$$

$$e) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$\left[-\frac{1}{5} \ln \frac{3}{4} \right]$$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 5.4, 5.6 a první příklad v kapitole 6.1:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/5.pdf

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/6.pdf



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.
- [2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

