

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 4

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 4.....	3
1.1	Příklady.....	4
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	9



1 CVIČENÍ Č. 4



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Výpočet určitých integrálů substituční metodou

Výpočet určitých integrálů metodou per partes

Výpočet obsahu rovinných obrazců pomocí určitých integrálů

Výpočet délky křivky pomocí určitých integrálů



MOTIVACE:

Stejně jako u výpočtu neurčitých integrálů si i při řešení určitého integrálu nevystačíme pouze s tabulkovými integrály, proto se naučíme aplikovat již známé metody (substituční a per partes) v určitém integrálu. Ukážeme si, jak lze určitého integrálu využít v geometrických aplikacích jako je výpočet obsahu rovinné oblasti či délky křivky.



CÍL:

Umět používat substituční metodu a metodu per partes při řešení určitých integrálů. Pochopit základní geometrické aplikace (obsah plochy a délka křivky) určitého integrálu a umět správně sestavit vztahy pro výpočet daných aplikací.



1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Vypočtete integrál $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x} \cos x dx$.

Řešení:

Zavedeme substituci: $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

Přepočítáme meze:

$$\text{horní mez } x_2 = 2\pi : \sin 2\pi = 0$$

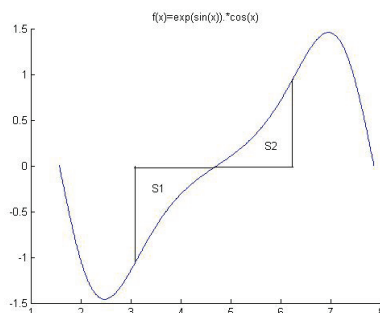
$$\text{dolní mez } x_1 = \pi : \sin \pi = 0$$

Vidíme, že po přepočítání mezí jsme obdrželi rovnost horní a dolní meze a ze znalosti vlastností určitého integrálu víme, že dál nemusíme počítat a takový integrál je roven nule. Ověříme výpočtem:

$$\int_0^0 e^t dx = [e^t]_0^0 = 1 - 1 = 0$$

Poznámka:

Když si vykreslíme graf původní funkce, uvidíme, že pro $x \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ se jedná o lichou funkci, tzn., že obsahy jednotlivých částí se odečtou a celkový obsah je roven 0.



Příklad 2:

Vypočtete integrál $\int_0^1 x \ln(x^2 + 3) dx$.

Řešení:

Ukážeme si dva způsoby řešení:

1) metoda per partes:



Volíme: $u = \ln(x^2 + 3)$, $u' = \frac{2x}{x^2 + 3}$

$$v' = x, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(x^2 + 3) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 3) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \ln 4 - \int_0^1 \left(x - \frac{3x}{x^2 + 3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln 4 - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln 4 + \frac{3}{2} \ln 3 \right) = 2 \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) kombinace substituční metody a metody per partes

Zavedeme substituci: $x^2 + 3 = t \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$ a přepočítáme meze.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(x^2 + 3) dx &= \frac{1}{2} \int_3^4 \ln t dt = \left[\frac{1}{2} \left(t \ln t - \int_3^4 dt \right) \right]_3^4 = \frac{1}{2} (4 \ln 4 - 3 \ln 3 - [t]_3^4) = \\ &= 2 \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Příklad 3:

Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí:

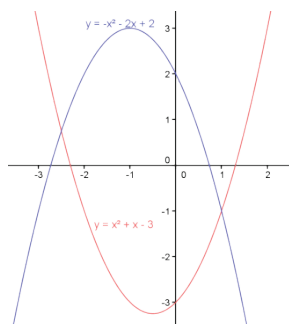
$$f: y = x^2 + x - 3$$

$$g: y = -x^2 - 2x + 2$$

Řešení:

Rovinný útvar je ohraničený pouze dvěma funkcemi, takže musíme první určit x -ové souřadnice průsečíků křivek (řešíme rovnici $f(x) = g(x)$).

$$x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1$$



Z grafu vidíme, že platí $g(x) \geq f(x)$, tzn. vztah pro výpočet obsahu oblasti mezi křivkami je:

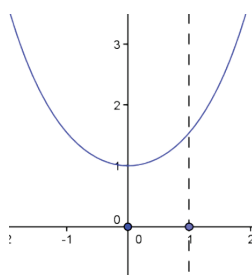
$$P = \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-\frac{5}{2}}^1 (-x^2 - 2x + 2 - (x^2 + x - 3)) dx = \int_{-\frac{5}{2}}^1 (-2x^2 - 3x + 5) dx =$$

$$= \left[-2 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-\frac{5}{2}}^1 = \frac{343}{24}$$

Příklad 4:

Vypočtete délku křivky $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:



$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

Příklad 5:

Vypočtete velikost dráhy, kterou urazí bod od $t = 0$ do $t = 2$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x = t^3$, $y = 5t^2$.

Řešení:

$$\dot{x} = 3t^2$$

$$\dot{y} = 10t$$



$$l = \int_0^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (10t)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{9t^4 + 100t^2} dt = \int_0^2 t \sqrt{9t^2 + 100} dt = \left. \begin{array}{l} 9t^2 + 100 = u^2 \\ 18t dt = 2u du \\ t dt = \frac{1}{9} u du \\ 0 \mapsto 10, 2 \mapsto \sqrt{136} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{9} \int_{10}^{\sqrt{136}} u^2 du = \frac{1}{27} [u^3]_{10}^{\sqrt{136}} = \frac{1}{27} (136\sqrt{136} - 1000) \approx 21,7$$

Příklad 6:

Vypočtete určité integrály:

$$\text{a) } \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left. \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ 1 \mapsto 0, e \mapsto 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi/4} x \cdot \sin 2x dx = \left. \begin{array}{l} x \\ \sin 2x \end{array} \right| - \frac{1}{2} \cos 2x = \left[-\frac{1}{2} x \cdot \cos 2x \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx =$$

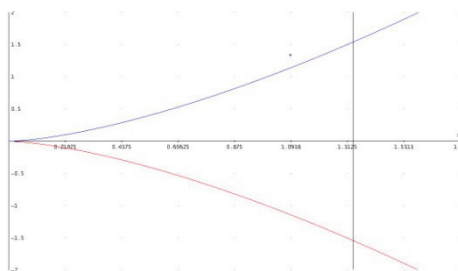
$$= 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

Příklad 7:

Určete délku křivky $y^2 = x^3$ mezi osou y a přímkou $x = \frac{4}{3}$.

Řešení:

$$y = \pm \sqrt{x^3}$$



$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$l = 2 \cdot \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{4/3} \sqrt{4 + 9x} dx = \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(4 + 9x)^3} \right]_0^{4/3} = \frac{2}{27} (\sqrt{16^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{112}{27}$$



Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UI2/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UI3/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UIobsah/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UIdelka/index.html

Neřešené příklady:

Vypočtete následující určité integrály:

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad [\ln 2]$$

$$\text{b) } \int_0^1 (x + 2)e^x dx \quad [2e - 1]$$

$$\text{c) Určete obsah čóčky ohraničené křivkami } y = x^2, y^2 = x. \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$\text{d) Určete obsah obrazce ohraničeného jedním obloukem cykloidy a osou } x. \quad [3a^2\pi]$$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 6.1 příklady 2,3,4 a v kapitole 6.2.1 a 6.2.2:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/6.pdf



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.
- [2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

