INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 5

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ Č. 5 3
1.1 Příklady 4
2 POUŽITÁ LITERATURA 8

1 CVIČENÍ Č. 5

STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Výpočet objemu rotačních těles pomocí určitých integrálů

Výpočet povrchu pláště rotačního tělesa

Výpočet momentu setrvačnosti a souřadnic těžiště rovinné křivky

Výpočet momentu setrvačnosti a souřadnic těžiště rovinné oblasti

MOTIVACE:

Určitý integrál je využíván v nepřeberném množství praktických problémů. Zaměříme se na jednoduché aplikace v mechanice, jako je výpočet souřadnic těžiště či momentů setrvačnosti hmotných křivek a rovinných oblastí. Další využití integrálního počtu je například při výpočtu tlakové síly, práce, pohybu, atd.

CÍL:

Pochopit základní geometrické a fyzikální aplikace určitého integrálu a umět správně sestavit vztahy pro výpočet daných aplikací.

1.1 PŘÍKLADY

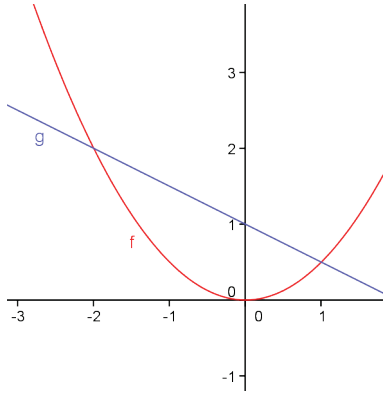
Příklad 1:

Vypočtěte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného grafy funkcí:

$$f: 2y = x^2$$
$$g: -\frac{x}{2} - y + 1 = 0$$

Řešení:

Nakreslíme si grafy funkcí:



Vypočteme průsečíky grafů obou funkcí: $\frac{x^2}{2} = -\frac{x}{2} + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$

Vidíme, že na intervalu $\langle -2,1 \rangle$ je $g(x) \geq f(x)$, tzn., vztah pro výpočet objemu rotačního tělesa dostaneme pomocí vztahu:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(g^2(x) - f^2(x) \right) dx = \pi \int_{-2}^{1} \left(\left(-\frac{x}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right) dx = \pi \int_{-2}^{1} \left(\frac{x^2}{4} - x + 1 - \frac{x^4}{4} \right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^5}{20} \right]_{-2}^{1} = \pi \left(\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{20} \right) - \left(\frac{-8}{12} - 2 - 2 - \frac{32}{20} \right) \right) = \frac{34}{5} \pi$$

Příklad 2:

Vypočtěte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x pro $x \in \langle 1,4 \rangle$.

Řešení:

Víme, že obsah pláště rotačního tělesa vypočteme jako $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Určíme druhou mocninu derivace funkce: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{4x}$ a dosadíme.

$$S = 2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx = 2\pi\int_1^4 \sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = \pi\int_1^4 \sqrt{4x+1}dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(4x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{17^3}-\sqrt{5^3}\right] = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

Příklad 3:

Určete y-ovou souřadnici těžiště křivky, která je grafem funkce $f: y=\frac{1}{2}x^2$, $x\in\langle 0,1\rangle$, je-li délková hustota $\rho(x)=x$.

Řešení:

Souřadnici těžiště určíme pomocí statického momentu $S_x(C)$ a hmotnosti.

hmotnost ... $M(C)=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Určíme druhou mocninu derivace funkce a dosadíme.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x \Rightarrow [f'(x)]^2 = x^2$$

$$M(C)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} 1+x^2=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ 0\mapsto 1, 1\mapsto\sqrt{2}\end{array}\right| = \int_1^{\sqrt{2}} t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

statický moment ... $S_x(C)=\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, $S_y(C)=\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$$S_x(C)=\int_0^1 \frac{x^2}{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} 1+x^2=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ 0\mapsto 1, 1\mapsto\sqrt{2}\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)t^2dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{15}$$

y-ová souřadnice těžiště: $y_T=\frac{S_x(C)}{M(C)}=\frac{3}{15}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}$

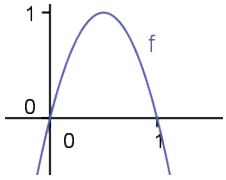
Příklad 4:

Určete momenty setrvačnosti a souřadnice těžiště podgrafu funkce $y=4x(1-x)$,

je-li $\rho(x)=x^2$.

Řešení:

Určíme meze: $4x(1-x)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1$



$$M = \int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_0^1 x^2 4x(1-x) dx = 4\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 16x^2 \left(1 - 2x + x^2\right) dx = 8\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{8}{105}$$

$$S_y = \int_a^b \rho(x) x f(x) dx = \int_0^1 x^2 x 4x(1-x) dx = 4\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{S_y}{M} = \frac{2}{3},\ y_T = \frac{S_x}{M} = \frac{8}{21}$$

momenty setrvačnosti:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \rho(x) f^3(x) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 64x^3 \left(1 - 3x + 3x^2 - x^3\right) dx = \frac{64}{3}\left[\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{189}$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 x^2 4x(1-x) dx = 4\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{21}$$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UIobjem/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/UIpovrch/index.html

Neřešené příklady:

Vypočtěte následující určité integrály:

a) Určete objem tělesa vzniklého rotací podgrafu P funkce $y = 2|\sin x|, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x. $\left[4\pi^2\right]$

b) Určete objem tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \frac{1-t}{1+t},\ y = \frac{1}{1+t},$

$t \in \langle 0,1 \rangle$ kolem osy x. $\left[\frac{7}{12}\pi\right]$

c) Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací oblasti dané funkcí $y = \sqrt{1-x^2}, x \in \left\langle \frac{1}{2},1 \right\rangle$ kolem osy x (kulový vrchlík). $[\pi]$

d) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní křivky $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right]$

e) Určete souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti ohraničené křivkou $y = x^2$, $x = 1$ a osou x. $\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{10}\right]$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 6.2.3 a 6.2.4:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/6.pdf

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz