INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 6

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3038-4

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ Č. 6

STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Určování definičních oborů funkcí dvou proměnných

Výpočet parciálních derivací prvního řádu

Výpočet parciálních derivací prvního řádu v bodě

Výpočet parciálních derivací vyšších řádů

MOTIVACE:

K popisu mnoha reálných situací obvykle s jednou proměnnou nevystačíme. V mnoha praktických problémech zjistíme, že určitá veličina závisí na dvou či více jiných veličinách.

CÍL:

Umět správně napsat omezující podmínky potřebné pro určení definičního oboru. A následně umět daný definiční obor znázornit. Pochopit princip parciálního derivování.

1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Určete a zakreslete definiční obor funkcí.

a) $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 16}$

b) $z = \ln(\sin(x - 2y))$

c) $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - \sqrt{e^x}$

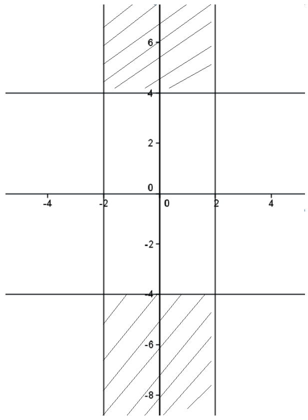
d) $z = \arcsin\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$

Řešení:

a) v předpisu funkce se vyskytují pouze odmocniny $\Rightarrow$ podmínky: $4 - x^2 \geq 0 \wedge y^2 - 16 \geq 0$

řešíme: $x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \;\wedge\; y^2 \geq 16 \Rightarrow |y| \geq 4$

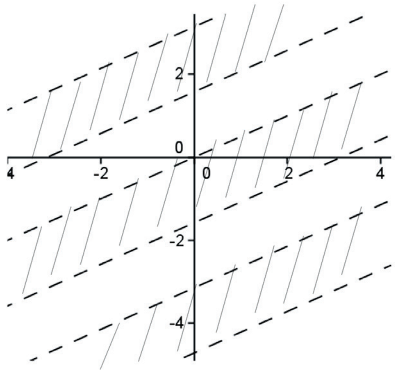
$$D_f = \left\{[x,y] \in R^2 : x \in \langle -2,2 \rangle \wedge y \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 4,\infty)\right\}$$



b) podmínka: $\sin(x-2y) > 0 \Rightarrow 2k\pi < x - 2y < (2k+1)\pi$, $k \in Z$

osamostatníme y: $\dfrac{x}{2} - k\pi > y > \dfrac{x}{2} - (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

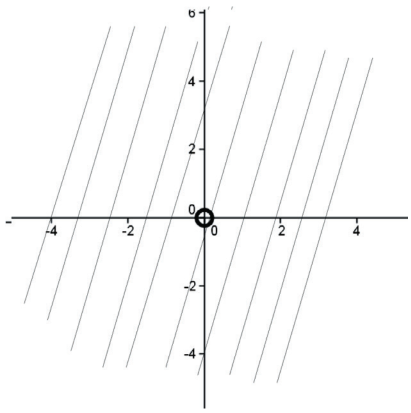
$$D_f = \left\{[x,y] \in R^2 : \frac{x}{2} - k\pi > y > \frac{x}{2} - (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$$



c) podmínky: $x^2 + y^2 \neq 0 \wedge e^x \geq 0$

Vidíme, že pravá strana první podmínky je rovnicí kružnice se středem v počátku a poloměrem 0 (tj. bod (0,0)) a druhá podmínka je splněna vždy, tzn., definičním oborem budou všechny body roviny xy kromě bodu (0,0)

$$D_f = \{[x, y] \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$$



d) podmínka: $-1 \leq x + \dfrac{y}{2x} \leq 1$

Jedná se o soustavu nerovnic v podílovém tvaru. Vyřešíme postupně a uděláme průnik:

1) $$-1 \leq \frac{2x^2 + y}{2x} \Rightarrow \frac{2x^2 + y + 2x}{2x} \geq 0$$

$$2x^2 + y + 2x \geq 0 \wedge 2x > 0 \ \vee \ 2x^2 + y + 2x \leq 0 \wedge 2x < 0$$

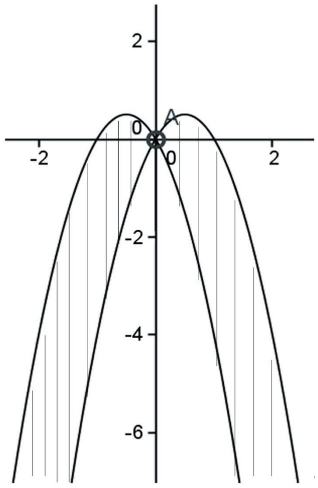
$$y \geq -2x^2 - 2x \wedge x > 0 \ \vee \ y \leq -2x^2 - 2x \wedge x < 0$$

2) $$\frac{2x^2 + y}{2x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + y - 2x}{2x} \leq 0$$

$$2x^2 + y - 2x \geq 0 \wedge 2x < 0 \ \vee \ 2x^2 + y - 2x \leq 0 \wedge 2x > 0$$

$$y \geq -2x^2 + 2x \wedge x < 0 \ \vee \ y \leq -2x^2 + 2x \wedge x > 0$$

Všechny výsledné podmínky zakreslíme a znázorníme definiční obor dané funkce.



Příklad 2:

Vypočítejte první parciální derivace funkce $z = \ln(\sin(3x+y)) - \dfrac{y^2}{x \cdot e^y}$

Řešení:

První nalezneme parciální derivaci funkce podle proměnné x, tzn., na proměnnou y se budeme dívat jako na konstantu.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin(3x+y)}\cos(3x+y)\cdot 3 + \frac{y^2}{x^2 \cdot e^y}$$

Nyní nalezneme parciální derivaci podle y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sin(3x+y)}\cos(3x+y) - \frac{2yxe^y - y^2xe^y}{x^2e^{2y}}$$

Příklad 3:

Vypočítejte druhé parciální derivace funkce $z = \arcsin(3xy) - 3^{x+2y}$

Řešení:

První parciální derivace:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y}{\sqrt{1-9x^2y^2}} - 3^{x+2y}\ln 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2y^2}} - 2\cdot 3^{x+2y}\ln 3$$

První parciální derivaci budeme znovu parciálně derivovat.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{27xy^3}{\sqrt{\left(1-9x^2y^2\right)^3}}-3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3\sqrt{1-9x^2y^2}-3y\dfrac{-18x^2y}{2\sqrt{1-9x^2y^2}}}{1-9x^2y^2}-3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2\cdot 2=\frac{3}{\sqrt{\left(1-9x^2y^2\right)^3}}-3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2\cdot 2$$

Zbývá nám určit druhé parciální derivace z první parciální derivace podle y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{3\sqrt{1-9x^2y^2}-3x\dfrac{-18xy^2}{2\sqrt{1-9x^2y^2}}}{1-9x^2y^2}-2\cdot 3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2=\frac{3}{\sqrt{\left(1-9x^2y^2\right)^3}}-3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{27x^3y}{\sqrt{\left(1-9x^2y^2\right)^3}}-4\cdot 3^{x+2y}\left(\ln 3\right)^2$$

Příklad 4:

Určete $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y\partial x}$ funkce $f(x,y)=x^{3y}-\dfrac{2y}{x+2}$ v bodě $A=[1,0]$.

Řešení:

Z označení vidíme, že budeme hledat parciální derivaci čtvrtého řádu. Budeme třikrát podle x a jednou podle y. Záleží na nás, v jakém pořadí.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3yx^{3y-1}+\frac{2y}{(x+2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3y(3y-1)x^{3y-2}-\frac{4y}{(x+2)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=(18y-3)x^{3y-2}+(9y^2-3y)3x^{3y-2}\ln x-\frac{4}{(x+2)^3}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y\partial x}=(18y-3)(3y-2)x^{3y-3}+(9y^2-3y)3(3y-2)x^{3y-3}\ln x+\frac{(9y^2-3y)3x^{3y-2}}{x}+\frac{12}{(x+2)^4}$$

$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y\partial x}$ v bodě: do výsledné čtvrté derivace dosadíme za $x=1$ a za $y=0$

$$\frac{\partial^4 f(A)}{\partial x^2\partial y\partial x}=(0-3)(0-2)1^{0-3}+(0-0)3(0-2)1^{0-3}\ln 1+\frac{(0-0)3\cdot 1^{0-2}}{1}+\frac{12}{(1+2)^4}=\frac{166}{27}$$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/defoblast/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/parcder1/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/parcder2/index.html

Neřešené příklady:

Určete definiční obor funkce:

a) $z=\dfrac{1}{\ln y}+\arcsin x$ $\quad [D_f=\{[x,y]\in R^2 : y\in R^+-\{1\}\wedge x\in\langle -1;1\rangle\}]$

b) $z=\dfrac{x+\sqrt{y-1}}{x^2-1}$ $\quad [D_f=\{[x,y]\in R^2 : y\geq 1\wedge x\neq \pm 1\}]$

Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řadu funkce:

a) $z=\ln(y+x^2)$ $\quad \left[z'_x=\dfrac{2x}{y+x^2}, z'_y=\dfrac{1}{y+x^2}\right]$

b) $z=\dfrac{xy}{(x+y)^2}$ $\quad \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(y-x)}{(x+y)^3}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x(x-y)}{(x+y)^3}\right]$

Najděte parciální derivace druhého řádu funkce:

a) $z=y\sin x+x\cos y$ $\quad [z''_{xx}=-y\sin x, z''_{xy}=\cos x-\sin y, z''_{yy}=-x\cos y]$

b) $z=x^3-3x^4y+y^5$ $\quad [z''_{xx}=6x-36x^2y, z''_{xy}=-12x^3, z''_{yy}=20y^3]$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 7.1 a 7.2:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/7.pdf

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz