

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 7

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 7.....	3
1.1	Příklady.....	4
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	7



1 CVIČENÍ Č. 7



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Určování totálního diferenciálu

Výpočet přibližných hodnot funkce

Určení rovnice tečné roviny a normály



MOTIVACE:

Ve fyzice často nějaká veličina závisí na jiných veličinách (např. na čase). Změna veličiny, která je funkcí dvou proměnných, lze vyjádřit pomocí diferenciálu. Toho lze využít například při sestavování diferenciálních rovnic, které popisují vztahy mezi veličinami a jejich změnami nebo při výpočtu změny objemu (povrchu) válce, atd.



CÍL:

Umět určit totální diferenciál a pochopit jeho využití při hledání tečné roviny a normály ke grafu funkce.



1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Určete totální diferenciál funkce $z = \frac{x}{x^2 - y^2}$.

Řešení:

Víme, že pokud je funkce diferencovatelná, pak totálním diferenciálem je výraz

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Potřebujeme určit parciální derivace prvního řádu dané funkce.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x \cdot 2y}{(x^2 - y^2)^2}$$

Dosadíme: $df(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} dy$... totální diferenciál

Příklad 2:

Srovnejte totální diferenciál a totální přírůstek funkce $z = xy$ v bodě $A = [2, 3]$, jsou-li dány přírůstky $h_1 = 0,1$ a $h_2 = 0,2$.

Řešení:

totální přírůstek: $\Delta z = f(2 + 0,1, 3 + 0,2) - f(2, 3) = 2,1 \cdot 3,2 - 2 \cdot 3 = 0,72$

totální diferenciál: $df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)h_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow df(2, 3) = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7$$

Závěr:

V blízkém okolí bodu lze přírůstek nahradit totálním diferenciálem.



Příklad 3:

Pomocí totálního diferenciálu vypočtete přibližnou hodnotu $\ln 1,2 + \sin 0,06$.

Řešení:

Můžeme využít funkce $f(x, y) = \ln x + \sin y$ a totálního diferenciálu dané funkce v bodě $(1, 0)$ s diferenciemi $dx = x - x_0 = 1,2 - 1 = 0,2$, $dy = y - y_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.

$$f(1, 0) = \ln 1 + \sin 0 = 0$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'_x(1, 0) = 1$$

$$f'_y(x, y) = \cos y \Rightarrow f'_y(1, 0) = 1$$

Dosadíme do výrazu pro totální diferenciál $z \approx z_0 + f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$:

$$\ln 1,2 + \sin 0,06 \approx 0 + 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,06 = 0,26$$

(Můžete porovnat s přesnou hodnotou vypočtenou na kalkulačce.)

Příklad 4:

Určete rovnici tečné roviny a parametrické rovnice normály ke grafu funkce $x^2 + y^2 - 2x - 4y + z - 2 = 0$ v bodě $P = [-1, 2, ?]$.

Řešení:

Opět využijeme vztahu pro totální diferenciál:

$$\tau : z - z_0 = f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0)$$

Potřebujeme určit z_0 , $f'_x(P)$ a $f'_y(P)$. Všimneme si, že funkce je v zadání daná implicitně. Upravíme a dostaneme předpis funkce:

$$z = -x^2 - y^2 + 2x + 4y + 2.$$

$$z_0 = 1 - 4 - 2 + 8 + 2 = 3$$

$$f'_x(x, y) = -2x + 2 \Rightarrow f'_x(P) = 4$$

$$f'_y(x, y) = -2y + 4 \Rightarrow f'_y(P) = 0$$

Dosadíme: $\tau : z - 3 = 4 \cdot (x + 1) + 0$

Upravíme: $\tau : 4x - z + 7 = 0$... rovnice tečné roviny

Normála: $\eta : x = -1 + 4 \cdot t, y = 2, z = 3 - t, t \in \mathbb{R}$



Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/tecnarov1/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/tecnarov2i/index.html

Neřešené příklady:

1) Určete pomocí diferenciálu přibližnou hodnotu $\sqrt{2,06 \cdot 1,92}$. [1,99]

2) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$:

a) $z = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 5$, která je rovnoběžná s rovinou $\alpha : 4x - 12y + z = 3$.

$$[\tau : 4x - 12y + z + 5 = 0]$$

b) $z = \frac{x}{y}$ v bodě $A = [1, 1, ?]$

$$[\tau : -x + y + z - 1 = 0]$$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 7.3:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/7.pdf



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ŠKRÁŠEK J. a kol.: Základy aplikované matematiky I. a II. SNTL, Praha, 1986.
- [2] DOBROVSKÁ V., VRBICKÝ J.: Diferenciální počet funkcí více proměnných - Matematika IIb. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0656-8
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

