INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 8

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3038-4

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ Č. 8

STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Určování volných lokálních extrémů funkce dvou proměnných

Výpočet vázaných lokálních extrémů

MOTIVACE:

Extrémy funkcí jsou jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního počtu a setkáváme se s nimi takřka všude.

CÍL:

Umět určit stacionární body funkce a nalézt volné a vázané lokální extrémy funkce dvou proměnných.

MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=6xy-x^3-y^2+2$.

Řešení:

$$D_f = R\times R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6y-3x^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=6x-2y$$

Lokální extrém může nastat ve stacionárních bodech, které dostaneme řešením soustavy

$$\begin{aligned}6y-3x^2&=0\\6x-2y&=0\end{aligned}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme proměnnou y pomocí x a dosadíme do první rovnice, dostáváme:

$$18x-3x^2=0\ \Rightarrow\ x_1=0\ \text{a}\ x_2=6.$$

Dosadíme do první rovnice a vypočteme ke každému x příslušné y.

Pro $x_1=0$ dostaneme $y_1=0$.

Pro $x_2=6$ dostaneme $y_2=18$.

Máme tedy dva stacionární body $A=[0,0]$, $B=[6,18]$.

parciální derivace existují ve všech bodech definičního oboru $\Rightarrow$ žádné další body (kromě stacionárních) podezřelé z extrému neexistují

Vypočteme hodnoty druhých derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

a určíme hodnoty determinantů

Pro bod $A=[0,0]$:

$$\begin{vmatrix}0 & 6\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-36\ .$$

Determinant je záporný, proto v bodě $A=[0,0]$ nemá funkce extrém.

Pro bod $B = [6,18]$:

$$\begin{vmatrix} -36 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 36 \ .$$

Determinant je kladný, proto má funkce v bodě $B = [6,18]$ extrém. Výraz $\frac{\partial^2 f(B)}{\partial x^2} = -36$ je záporný, v bodě $B = [6,18]$ má daná funkce lokální maximum. Hodnota tohoto maxima je $f(B) = 110$.

Příklad 2:

Určete vázané extrémy funkce $z = y^2 - 4x^3$ za podmínky $2x - y + 1 = 0$.

Řešení:

z vazební podmínky lze explicitně vyjádřit proměnnou y, takže využijeme přímé metody

$y = 2x + 1$ dosadíme do předpisu funkce a dostaneme funkci jedné proměnné

$f(x) = (2x+1)^2 - 4x^3 = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^3$ … hledáme lokální extrém funkce 1 proměnné

$D_f = R$

najdeme stacionární body: $f'(x) = 8x + 4 - 12x^2 \Rightarrow 8x + 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$

rozdělíme definiční obor na intervaly a budeme zjišťovat monotónnost na jednotlivých intervalech

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right): f'(-1) = 8 \cdot (-1) + 4 - 12 = -16 < 0 \ \Rightarrow \text{ na } \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \text{ je funkce klesající}$$

$$\left(-\frac{1}{3}, 1\right): f'(0) = 0 + 4 - 0 = 4 > 0 \ \Rightarrow \text{ na } \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \text{ je funkce rostoucí}$$

$$(1, \infty): f'(2) = 8 \cdot 2 + 4 - 12 \cdot 4 = -28 < 0 \ \Rightarrow \text{ na } (1, \infty) \text{ je funkce klesající}$$

monotónnost se v bodě $x = -\frac{1}{3}$ mění z klesající na rostoucí $\Rightarrow$ v bodě je lokální minimum

monotónnost se v bodě $x = 1$ mění z rostoucí na klesající $\Rightarrow$ v bodě je lokální maximum

Závěr:

v bodě $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{27}\right)$ má funkce $f(x,y)$ vázané lokální minimum

v bodě $(1,3,5)$ má funkce $f(x,y)$ vázané lokální maximum

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/extremvol/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/extremvaz/index.html

Neřešené příklady:

1) Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=6xy-x^3-8y^3+125$.

$$\left[\text{v}\left[1,\frac{1}{2}\right]\text{ má lokální maximum}\right]$$

2) 2) Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=3\ln x+xy^2-y^3$. [nemá lok. extrémy]

3) Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=\sqrt{4x+y^2+5}$ vzhledem k podmínce $y=2x-3$. $\left[\text{v}\,[1,\text{-}1]\text{ vázané lokální minimum}\right]$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 7.4:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/7.pdf

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] ŠKRÁŠEK J. a kol.: Základy aplikované matematiky I. a II. SNTL, Praha, 1986.

[2] DOBROVSKÁ V., VRBICKÝ J..: Diferenciální počet funkcí více proměnných - Matematika IIb. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0656-8

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz