INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH

CVIČENÍ Č. 11

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3038-4

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ Č. 11

STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Nalezení charakteristické rovnice a její řešení

Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

MOTIVACE:

Diferenciální rovnice druhého řádu jsou často využívány v oblasti fyziky pro popis fyzikálních vztahů.

CÍL:

Umět vyřešit zkrácenou lineární rovnici - vytvořit charakteristickou rovnici a na základě jejího řešení dokázat určit správný tvar obecného řešení příslušné LDR 2. řádu. Pomocí wronskiánu dokázat ověřit, že dané funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice.

1.1 PŘÍKLADY

Příklad 1:

Rozhodněte, zda funkce $y_1 = e^{5x}, y_2 = e^{5x}\cos x$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Řešení:

funkce derivujeme a vypočteme hodnotu Wronskiánu

$$y_1' = 5e^{5x}, y_2' = 5e^{5x}\cos x - e^{5x}\sin x$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{5x}\cos x \\ 5e^{5x} & 5e^{5x}\cos x - e^{5x}\sin x \end{vmatrix} = e^{5x}\left(5e^{5x}\cos x - e^{5x}\sin x\right) - 5e^{10x}\cos x =$$

$$= 5e^{10x}\cos x - e^{10x}\sin x - 5e^{10x}\cos x = -e^{10x}\sin x$$

Protože $-e^{10x}\sin x = 0$ pro každé $x = k\pi, k \in Z$, jsou funkce y_1, y_2 lineárně závislé a netvoří tedy fundamentální systém řešení dané rovnice.

Příklad 2:

Určete partikulární řešení rovnice $4y'' - 2y' = 0$ za podmínek $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Řešení:

první určíme obecné řešení homogenní LDR - napíšeme příslušnou charakteristickou rovnici:

$4r^2 - 2r = 0 \Rightarrow 2r(2r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}$ … řešením jsou 2 různé reálné kořeny

$$\Rightarrow y_1(x) = e^{0x} = 1 \text{ a } y_2(x) = e^{x/2}$$

obecné řešení je : $y_0 = C_1 + C_2 e^{x/2}$

jelikož máme počáteční podmínku pro derivaci řešení, musíme řešení derivovat a pak do derivace řešení a do obecného řešení dosadíme počáteční podmínky $y(0) = 1, y'(1) = -1$ a nalezneme konstanty C_1, C_2,

$y_0' = \frac{1}{2}C_2 e^{x/2}$ po dosazení počáteční podmínky $y' = -1, x = 0$: $-1 = \frac{1}{2}C_2 \Rightarrow C_2 = -2$

dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 1$ a C_2 do řešení a dopočítáme C_1

$$1 = C_1 - 2 \Rightarrow C_1 = 3$$

partikulární řešení: $y_0 = 3 - 2e^{x/2}$

Příklad 3:

Určete obecné řešení rovnice $y'' + 4y = 0$.

Řešení:

napíšeme příslušnou charakteristickou rovnici:

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$ … řešením jsou 2 komplexně sdružené kořeny s $\alpha = 0, \beta = 2$

$$\Rightarrow\ y_1(x) = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x \text{ a } y_2(x) = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x$$

obecné řešení je : $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Příklad 4:

Určete obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení:

napíšeme příslušnou charakteristickou rovnici:

$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2$ … řešením je dvojnásobný reálný kořen

$$\Rightarrow\ y_1(x) = e^{2x} \text{ a } y_2(x) = xe^{2x}$$

obecné řešení je: $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Příklad 5:

Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 20, y'(0) = -40$ a řešení znázorněte graficky.

Řešení:

charakteristická rovnice: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = -1$

obecné řešení je: $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

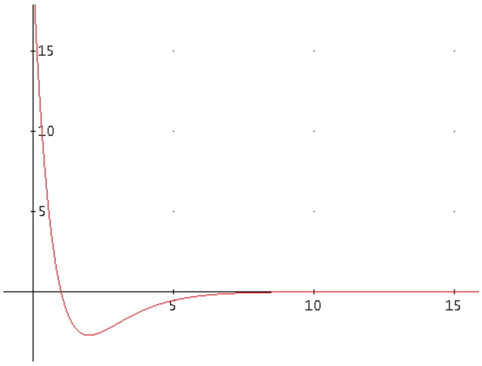
určíme derivaci řešení: $y_0' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}$

do řešení a derivace řešení dosadíme počáteční podmínky - dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

$$20 = C_1$$

$$-40 = -C_1 + C_2 \Rightarrow -40 = -20 + C_2 \Rightarrow C_2 = -20$$

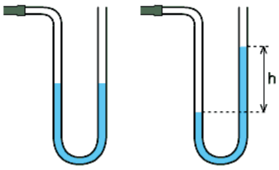
partikulární řešení: $y_0 = 20e^{-x} - 20xe^{-x}$



řešení rovnice pro dané počáteční podmínky

Příklad 6:

Máme manometr (využívaný k měření tlaku, viz obr.), který pracuje pod tlakem *p*. Sloupec kapaliny v manometru získává, vlivem působení tlaku, polohu zobrazenou na obrázku.



Určete pohybovou rovnici. Délka sloupce kapaliny je *l*, trubice má průměr *d* a hustota kapaliny je ρ.

Řešení:

Hmotnost kapaliny v manometru je rovna $m = \frac{\pi}{4} d^2 l\rho$. Vzniklá síla je podmíněna rozdílem hladin v obou sloupcích manometru a pokud ji bereme jako střední aritmetický rozdíl obou hladin při vychýlení z rovnovážné polohy o $y = \frac{h}{2}$ je její velikost $F = 2\frac{\pi}{4} d^2 y\rho g$.

Podle 2. Newtonova zákona:

$F = -m\ddot{y} = -\frac{\pi}{4} d^2 l\rho\ddot{y}$ (síla působí proti směru pohybu, proto znaménko mínus).

Porovnáním dostáváme:

$$-\frac{\pi}{4} d^2 l\rho\ddot{y} = 2\frac{\pi}{4} d^2 \rho g y \Rightarrow \ddot{y} + 2\frac{g}{l} y = 0 \;\; \ldots \text{ homogenní LDR}$$

Označíme $\frac{2g}{l} = \alpha^2$ a řešíme tedy rovnici $\ddot{y} + \alpha^2 y = 0$.

charakteristická rovnice: $r^2+\alpha^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm\alpha i$

obecné řešení: $y=C_1\cos(\alpha\cdot t)+C_2\sin(\alpha\cdot t)$

počáteční podmínky: $y(0)=y_0, y'(0)=0$:

$$y_0=C_1\cos 0+C_2\sin 0 \Rightarrow y_0=C_1$$

$$y'=-\alpha C_1\sin(\alpha\cdot t)+\alpha C_2\cos(\alpha\cdot t) \Rightarrow 0=\alpha C_2 \Rightarrow C_2=0$$

partikulární řešení: $y=y_0\cos(\alpha\cdot t)$

Další řešené příklady:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr1/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr2/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr5/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr6/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr9/index.html

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ldr10/index.html

Neřešené příklady:

Nalezněte řešení rovnice

a) $y''+5y'=0$ $\left[y=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$

b) $y''+16y=0$ $\left[y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right]$

c) c) $y''+6y'+13y=0$ $\left[y=\mathrm{e}^{-3x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)\right]$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 8.2.1:

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/8.pdf

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz