

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STROJNÍ**



# **MATEMATIKA II – V PŘÍKLADECH**

---

## **CVIČENÍ Č. 12**

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

**Ostrava 2013**

© Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3038-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

## OBSAH

|          |                                |           |
|----------|--------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>CVIČENÍ Č. 12.....</b>      | <b>3</b>  |
| 1.1      | Příklady.....                  | 4         |
| <b>2</b> | <b>POUŽITÁ LITERATURA.....</b> | <b>12</b> |



## 1 CVIČENÍ Č. 12



### STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Metoda neurčitých koeficientů

Lagrangeova metoda variace konstant



### MOTIVACE:

Jelikož se v mnoha technických aplikacích setkáváme i s nehomogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu, naučíme se tyto rovnice vyřešit. Ukážeme si dvě metody pro nalezení řešení - obecnou metodu a metodu pro speciální typy rovnic.



### CÍL:

Dokázat vyřešit úplnou LDR 2. řádu. Umět rozpoznat speciální pravou stranu a správně vytvořit tvar partikulárního řešení. Pochopit metodu variace konstant.



## 1.1 PŘÍKLADY

### Příklad 1:

Mějme rovnici  $y'' - 2y' = D(x)$ . Rozhodněte, zda příslušná  $D(x)$  je speciální pravá strana a pokud ano, odhadněte tvar partikulárního řešení.

a)  $D(x) = (3x^3 + 2x)\cos x$ ,

b)  $D(x) = \cos x \cdot \sin x$ ,

c)  $D(x) = e^{2x} \sin x$ ,

d)  $D(x) = x + 3e^x \cos 2x$ .

### Řešení:

Speciální pravá strana je ve tvaru  $D(x) = e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]$ .

a)  $D(x) = (3x^3 + 2x)\cos x$

$P(x) = 3x^3 + 2x$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0$ ,  $Q(x) = 0$  ... jedná se o speciální pravou stranu

k odhadnutí tvaru partikulárního řešení potřebujeme znát kořeny charakteristické rovnice

$$y'' - 2y' = 0 \Rightarrow r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2$$

v pravé straně se vyskytuje funkce kosinus vynásobená polynomem  $\Rightarrow$  kontrolujeme, zda je kořenem charakteristické rovnice  $\pm i$  ... není kořen

tvar partikulárního řešení musí odpovídat tvaru pravé strany - polynom stupně tři vynásobený funkcí kosinus (i když je na pravé straně pouze 1 z goniometrických funkcí, musíme v odhadovaném tvaru použít obě z funkcí - sinus i kosinus se stejným argumentem):

$$\hat{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin x$$

b)  $D(x) = \cos x \cdot \sin x$  ... nejedná se o speciální pravou stranu, protože funkce sinus a kosinus násobíme

c)  $D(x) = e^{2x} \sin x$

$P(x) = 0$ ,  $b = 1$ ,  $a = 2$ ,  $Q(x) = 1$  ... jedná se o speciální pravou stranu

v pravé straně se vyskytuje funkce sinus vynásobená exponenciálou  $\Rightarrow$  kontrolujeme, zda je kořenem charakteristické rovnice  $2 \pm i$  ... není kořen

tvar partikulárního řešení musí odpovídat tvaru pravé strany - exponenciální funkce s argumentem  $2x$  vynásobený goniometrickými funkcemi:



$$\hat{y} = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

- d)  $D(x) = x + 3e^x \cos 2x$  ... nejedná se o speciální pravou stranu, ale jedná se součet o dvou výrazů, které speciální pravou stranou jsou

$$D(x) = D_1(x) + D_2(x), \text{ kde}$$

$$D_1(x) = x \dots P(x) = x, b = 0, a = 0, Q(x) = 0 \dots \text{jedná se o speciální pravou stranu}$$

$$D_2(x) = 3e^x \cos 2x \dots P(x) = 3, b = 2, a = 1, Q(x) = 0 \dots \text{jedná se o speciální pravou stranu}$$

tvary partikulárního řešení odhadneme pro každou stranu samostatně, nalezneme hledané koeficienty a pak nalezené řešení sečteme

$$1) D_1(x) = x$$

v pravé straně se vyskytuje polynom stupně jedna  $\Rightarrow$  kontrolujeme, zda je kořenem charakteristické rovnice  $0 \dots$  je kořen

$$\text{tvary partikulárního řešení: } \hat{y}_1 = (Ax + B)x$$

$$2) D_2(x) = 3e^x \cos 2x$$

v pravé straně se vyskytuje funkce kosinus vynásobená exponenciálou  $\Rightarrow$  kontrolujeme, zda je kořenem charakteristické rovnice  $2 \pm 2i \dots$  není kořen

$$\text{tvary partikulárního řešení: } \hat{y}_2 = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$\text{partikulární řešení dostaneme sečtením partikulárních řešení: } \hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$$

### **Příklad 2:**

Určete řešení rovnice  $y'' + 9y = 8 \cos x$  za podmínek  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### **Řešení:**

$$1) \text{ vyřešíme zkrácenou LDR: } y'' + 9y = 0$$

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 3i \dots \text{řešením jsou 2 komplexně sdružené kořeny}$$

$$\text{obecné řešení je: } y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

$$2) \text{ zkontrolujeme, zda se nejedná o speciální tvar pravé strany}$$

$D(x) = 8 \cos x \dots$  jedná se o speciální pravou stranu, proto použijeme k řešení metodu neurčitých koeficientů, tj. řešení budeme hledat ve tvaru  $y = y_0 + \hat{y}$



odhadneme tvar partikulárního řešení ( $\pm i$  není kořenem) a určíme jeho první a druhou derivaci:

$$\hat{y} = A \cos x + B \sin x$$

$$\hat{y}' = -A \sin x + B \cos x$$

$$\hat{y}'' = -A \cos x - B \sin x$$

dosadíme do původní rovnice  $y'' + 9y = 8 \cos x$  a porovnáním koeficientů u stejných funkcí nalezneme neznámé konstanty  $A, B$ :

$$-A \cos x - B \sin x + 9(A \cos x + B \sin x) = 8 \cos x$$

$$\cos x: -A + 9A = 8 \Rightarrow A = 1$$

$$\sin x: -B + 9B = 0 \Rightarrow B = 0$$

partikulární řešení je:  $\hat{y} = \cos x$

obecné řešení:  $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \cos x$

3) máme okrajovou úlohu, tzn., hledáme partikulární řešení úplné LDR

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x - \sin x$$

do  $y, y'$  dosadíme počáteční podmínky  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$0 = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi + \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 = -C_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -3 \cdot \frac{1}{2} \sin \pi + 3C_2 \cos \pi - \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = -3C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_2 = 0$$

partikulární řešení:  $y = \frac{1}{2} \cos 3x + \cos x$

### **Příklad 3:**

Řešte diferenciální rovnici  $y'' + y = 2x^2 + 1 + \sin x$ .

### **Řešení:**

1) vyřešíme zkrácenou LDR:  $y'' + y = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \dots \text{řešením jsou 2 komplexně sdružené kořeny}$$

obecné řešení je:  $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$



2) zkontrolujeme, zda se nejedná o speciální tvar pravé strany

$D(x) = 2x^2 + 1 + \sin x$  ... nejedná se o speciální pravou stranu, ale je dána jako součet dvou funkcí, z nichž každá má tvar speciální pravé strany, tj. řešení budeme hledat ve tvaru  $y = y_0 + \hat{y}_1 + \hat{y}_2$

a)  $D_1(x) = 2x^2 + 1$

odhadneme tvar partikulárního řešení (0 není kořenem) a určíme jeho první a druhou derivaci:

$$\hat{y}_1 = Ax^2 + Bx + C$$

$$\hat{y}_1' = 2Ax + B$$

$$\hat{y}_1'' = 2A$$

dosadíme do původní rovnice  $y'' + y = 2x^2 + 1$  a porovnáním koeficientů u stejných funkcí nalezneme neznámé konstanty  $A, B, C$ :

$$2A + Ax^2 + Bx + C = 2x^2 + 1$$

$$x^2 : A = 2$$

$$x : B = 0$$

$$x^0 : 4 + C = 1 \Rightarrow C = -3$$

$$\hat{y}_1 = 2x^2 - 3$$

b)  $D_2(x) = \sin x$

odhadneme tvar partikulárního řešení ( $\pm i$  je kořen) a určíme jeho první a druhou derivaci:

$$\hat{y}_2 = x(A \cos x + B \sin x)$$

$$\hat{y}_2' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$\hat{y}_2'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x)$$

dosadíme do původní rovnice  $y'' + y = \sin x$  a porovnáním koeficientů u stejných funkcí nalezneme neznámé konstanty  $A, B$ :

$$-A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) + x(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$$



$$\sin x - 2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x : 2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\hat{y}_2 = -\frac{1}{2}x \cos x$$

$$\text{obecné řešení: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^2 - 3 - \frac{1}{2}x \cos x$$

#### **Příklad 4:**

Řešte diferenciální rovnici  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ .

#### **Řešení:**

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice:  $y'' - 2y' + y = 0$

charakteristická rovnice:  $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1$

obecné řešení homogenní rovnice:  $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$D(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$  ... nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi:  $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$

stačí určit funkce  $C_1(x), C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x}(1+x) - xe^{2x} = e^{2x}$$

nalezení  $C_1(x)$ :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x(1+x) \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{1+x^2}$$

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_1$$



nalezení  $C_2(x)$ :

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1' & 0 \\ y_1 & D(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$$

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c_2$$

obecné řešení získáme dosazením  $C_1(x), C_2(x)$  do  $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ :

$$y = \left( -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_1 \right) e^x + (\arctan x + c_2) x e^x$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} e^x \ln(1+x^2) + x e^x \arctan x$$

### **Příklad 5:**

Řešte diferenciální rovnici  $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$ .

### **Řešení:**

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice:  $y'' - y' = 0$

charakteristická rovnice:  $r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1$

obecné řešení homogenní rovnice:  $y_0 = C_1 + C_2 e^x$

$D(x) = \frac{2+x}{x^3}$  ... nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi:  $y = C_1(x) + C_2(x)e^x$

stačí určit funkce  $C_1(x), C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x$$



nalezení  $C_1(x)$  :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{2+x}{x^3} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{(2+x)e^x}{x^3}$$

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{2+x}{x^3}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{2+x}{x^3} dx = \frac{1+x}{x^2} + c_1$$

nalezení  $C_2(x)$  :

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1 & D(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2+x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{2+x}{x^3}$$

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2+x}{x^3 e^x}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{2+x}{x^3 e^x} dx = \int \frac{2e^{-x}}{x^3} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \begin{vmatrix} e^{-x} & 2x^{-3} \\ -e^{-x} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{x^2} - \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \\ &= -\frac{e^{-x}}{x^2} + c_2 \end{aligned}$$

obecné řešení získáme dosazením  $C_1(x), C_2(x)$  do  $y = C_1(x) + C_2(x)e^x$  :

$$y = \frac{1+x}{x^2} + c_1 + \left( -\frac{e^{-x}}{x^2} + c_2 \right) e^x$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^x + \frac{1}{x}}$$

**Další řešené příklady:**

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/video/ps03/index.html](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ps03/index.html)

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/video/ps06/index.html](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ps06/index.html)

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/video/ps01/index.html](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/ps01/index.html)

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/video/wron4/index.html](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/wron4/index.html)

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/video/wron5/index.html](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/wron5/index.html)



**Neřešené příklady:**

Nalezněte řešení rovnice

$$\text{a) } y'' + y = 4 \cos x - 2 \sin x \quad \left[ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + 2x \sin x \right]$$

$$\text{b) } y'' - 4y' + 4y = e^{-x} \quad \left[ y = e^{2x} (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9} e^{-x} \right]$$

$$\text{c) } y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad \left[ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x \right]$$

Další příklady najdete ve sbírce úloh v kapitole 8.2.2:

[http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka\\_uloh/pdf/8.pdf](http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/8.pdf)



## 2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5
- [2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1
- [3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4
- [4] elektronický učební text: [www.studopory.vsb.cz](http://www.studopory.vsb.cz)

