

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



# DYNAMIKA

---

## Úvodní předpoklady

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

## OBSAH

|          |                                                    |           |
|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY</b>                          | <b>3</b>  |
| 1.1      | Úvodní předpoklady                                 | 4         |
| 1.1.1    | Další zjednodušující předpoklady                   | 5         |
| 1.2      | Kinematika a Dynamika bodu                         | 5         |
| 1.2.1    | Kinematika bodu                                    | 6         |
| 1.3      | Příklady k procvičení                              | 9         |
| 1.3.1    | Rovnoměrný pohyb po přímce:                        | 10        |
| 1.3.2    | Rovnoměrně zrychlený pohyb bodu po přímce          | 12        |
| 1.3.3    | Příklady na brždění auta před přechodem pro chodce | 13        |
| 1.3.4    | Nerovnoměrný pohyb po přímce                       | 16        |
| <b>2</b> | <b>POUŽITÁ LITERATURA</b>                          | <b>19</b> |



# 1 ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY



## STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Úvodní předpoklady

Kinematika a dynamika bodu.

Kinematika bodu.

Pohyb bodu po přímce poloha rychlost zrychlení.

Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb bodu.

Příklady k procvičení



## MOTIVACE:

Chcete-li popsat jak se auto, raketa či atom hýbe je dobré pro popis pohybu používat definované veličiny. Pro popis pohybu se používají poloha, rychlost, zrychlení a čas. Tyto veličiny pak hrají dále významnou roli i ve vztahu k příčinám pohybu.



## CÍL:

Základní kinematické veličiny a vztahy mezi nimi.

Zvláštní případy pohybu-rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb.



## 1.1 ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY

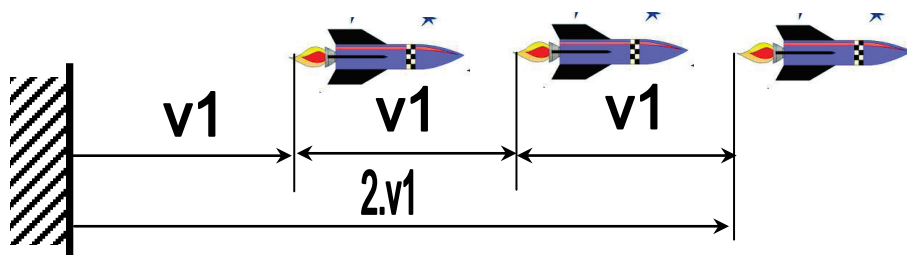
Pohyby všech věcí ve vesmíru, strojů, automobilů, planet, molekul, atomů, hvězd i galaxií, se řídí určitými zákony pohybu. Tyto zákony se snažili postupně odhalovat lidé jako Aristoteles, Galileo Galilei, Isaac Newton, Albert Einstein a John Archibald Wheeler, který se zabýval kvantovou mechanikou.

Důvodem nebylo trápení studentů u zkoušek, ale to, aby šlo předpovědět budoucí chování věcí aut, strojů, planet....

Dobrý zákon by měl nejen vysvětlit všechny jevy, z nichž vychází, ale také předpovědět něco do budoucna. V mechanice je kritériem platnosti zákona experiment. Jestliže nějaký zákon je experimentem vyvrácen, přestává být zákonem, ale často je dál možno původní zákon používat pro určité rozmezí podmínek.

### Příklad

Představte si tři rakety, pohybující se po jedné přímce konstantními rychlostmi. První raketa se vůči místu startu pohybuje rychlostí  $v_1$ , druhá vůči první také rychlostí  $v_1$  a třetí vůči druhé také rychlostí  $v_1$ . Třetí raketa se vůči místu startu pohybuje rychlostí dvojnásobnou  $v_3=2 \cdot v_1$ . Určete rychlosti všech raket vůči místu startu.



Zdá se, že úloha nemá řešení, ale existují nejméně dvě řešení. První řešení je takové, že rychlosti všech raket jsou nulové a říká se mu triviální řešení. Druhé řešení vychází ze speciální teorie relativity a relativistického sčítání rychlostí  $u$  a  $v$ , kde  $v$  v našem příkladu  $u=v$ .

$$\text{výsledná\_rychlost} = \frac{u + v}{1 + \frac{u \cdot v}{c \cdot c}}$$

### Výsledky:

|                                            |                                         |           |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------|
| Rychlost první rakety vůči místu startu je | $u_1=1,342 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ | (0,447 c) |
| Rychlost druhé rakety vůči místu startu je | $u_2=2,236 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ | (0,745 c) |
| Rychlost třetí rakety vůči místu startu je | $u_3=2,683 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ | (0,894 c) |

Kde  $c$  je rychlost světla ve vaku  $c=299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$

Ještě komplikovanější by bylo, kdybychom uvažovali se zakřivením prostoru.

V tomto materiálu se vychází z předpokladů klasické Newtonovské fyziky. Rychlosti, pro které má smysl uvažovat s relativistickými jevy, jsou ve srovnání s běžnými rychlostmi věcí, které nás obklopují, velmi malé. Předcházející příklad by měl tedy jen triviální řešení.



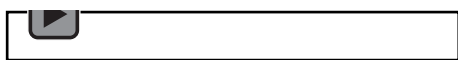
Pro součet dvou rychlostí  $v=u=3000000 \text{ m.s}^{-1}$  je odchylka mezi běžným sčítáním rychlostí a sčítáním relativistickým cca 0,02%, pro rychlosti  $300000 \text{ m.s}^{-1}$  je tato odchylka 0,0002%. Pro nižší rychlosti ji lze zanedbat.

### Další zjednodušující předpoklady:

- 1) Trajektorii každého bodu, což je místo ve kterém se bod nachází v každém čase, lze přesně popsat vůči nehybnému tzv. základnímu prostoru. V kvantové mechanice by byly s trajektorií potíže.
- 2) Prostor, ve kterém bude pohyb popisován je Euklidovský, to znamená takový, který odpovídá běžným školním představám a není zakřiven. Přesnou definici Euklidovského prostoru naleznete v učebnicích matematiky či geometrie.
- 3) Čas je nezávislý na věcech a událostech a okolnostech. Základní jednotkou času je sekunda. Další používané jednotky jsou minuty, hodiny, dny roky.
- 4) Vazby mezi tělesy si nepamatují předchozí stav a nejsou jeho funkcí, takovým vazbám se říká skleronomní vazby.



#### Audio 1.1 Další zjednodušující předpoklady



### 1.1.1 Další zjednodušující předpoklady

- 1) Trajektorii každého bodu, což je místo ve kterém se bod nachází v každém čase, lze přesně popsat vůči nehybnému tzv. základnímu prostoru. V kvantové mechanice by byly s trajektorií potíže.
- 2) Prostor, ve kterém bude pohyb popisován je Euklidovský, to znamená takový, který odpovídá běžným školním představám a není zakřiven. Přesnou definici Euklidovského prostoru naleznete v učebnicích matematiky či geometrie.
- 3) Čas je nezávislý na věcech a událostech a okolnostech. Základní jednotkou času je sekunda. Další používané jednotky jsou minuty, hodiny, dny roky.
- 4) Vazby mezi tělesy si nepamatují předchozí stav a nejsou jeho funkcí, takovým vazbám se říká skleronomní vazby.

Tyto předpoklady mají určitá omezení, ale při rychlostech, velikostech objektů a vzdálenostech, se kterými se budeme setkávat je jejich použití oprávněné.

Dynamiku rozdělíme na dvě části kinematiku, která popisuje pohyb bodu bez ohledu na to co je příčinou pohybu a vlastní dynamiku, která se zajímá o příčiny pohybu. V první části budou uvedeny vztahy pro výpočet kinematiky bodu a pak dynamiky bodu. Pro pohyby těles bude vždy nejprve probrána kinematika příslušného typu pohybu a pak jeho dynamika, to platí i pro dynamiku soustav těles čili mechanismy. Další kapitoly v tomto materiálu se věnují rázu, lineárnímu kmitání a pohybu těles s proměnnou hmotností.

## 1.2 KINEMATIKA A DYNAMIKA BODU

Z hlediska matematiky bod patří k takzvaným základním pojmům, které se nedefinují podobně jako množina, přímka, pomocí těchto základních pojmů a axiomů se pak definuje vše ostatní.

Dle **Euklida** je **bod** něco, co nemá části, tedy to co již nelze dále dělit.

Za hmotný bod nadále budeme považovat cokoliv, u čeho nás z vlastností zajímají pouze hmotnost a poloha v daném čase, ostatní vlastnosti jsou pro řešenou úlohu nepodstatné. To



znamená, že za hmotný bod můžeme považovat i různá tělesa například elektron, atom, automobil, loď, Zeměkouli, vždy podle charakteru toho o co, a s jakou přesností se zajímáme.

Z hlediska dynamiky jsou pro hmotný bod významné v daném čase pouze hmotnost, poloha, rychlost a zrychlení.

Jakmile budeme znát zákony pohybu hmotného bodu, bude možné přejít formulaci zákonů pohybu těles, protože každé těleso si můžeme představit jako soubor velkého, často nekonečného, množství bodů.

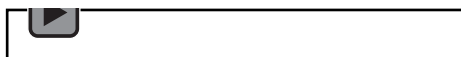
## 1.2.1 Kinematika bodu

### 1.2.1.1 Pohyb bodu po přímce, poloha rychlost, zrychlení

Kinematika je část mechaniky, která se snaží popsat pohyb, to znamená, jak se něco hýbe, bez ohledu na příčiny pohybu, tedy proč se to hýbe. Pro popis pohybu bodu je zapotřebí o něm vědět kde a kdy se nachází a jakou má v daném okamžiku rychlost a zrychlení.

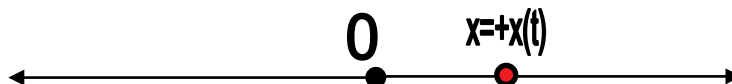


Audio 1.2 Pohyb bodu po přímce



Nejjednodušším případem **trajektorie**, to je množinou všech poloh bodu, v nichž se může v různých časových okamžicích bod nacházet, je přímka.

Nachází-li se bod na přímce, pak pro popis jeho polohy potřebujeme jedinou souřadnici-vzdálenost od daného počátečního bodu, kterou lze označit například  $x$  nebo  $x(t)$ , což vyjadřuje závislost na čase  $t$ . Pro určení  $x(t)$  vyznačíme na přímce nulovou polohu a jeden směr považujeme za kladný.



Poloha bodu se mění v čase, což vyjadřuje zápis  $x=x(t)$ . Dalšími veličinami kromě času a polohy popisujícími pohyb jsou dráha, rychlost, zrychlení a případně ryv.

**Dráha  $s$**  je délka trajektorie mezi dvěma časy  $t_2$  a  $t_1$ , v případě pohybu po přímce  $s=x(t_2)-x(t_1)$ . Dráha se udává nejčastěji v metrech. Dalšími používanými jednotkami dráhy jsou násobky metru, mm, km atd. V anglicky mluvících zemích se můžeme stále velmi často setkat s jednotkami jako palec, stopa, yard a míle. Pro velké vzdálenosti se používají jednotky jako astronomická jednotka, což je průměrná vzdálenost Země od Slunce a doby, za které světlo ve vakuu urazí danou vzdálenost, například světelné minuty, hodiny, dny, roky; případně parseky či megaparseky (Mpc). Existuje a stále se používá ještě mnoho dalších jednotek, ale základní jednotkou SI jsou jen metry. Jestliže používáme při výpočtech základní jednotky je výsledek rovněž v základních jednotkách. Pro jiné jednotky je třeba znát vztahy pro přepočet jednotek.

### Okamžitá Rychlost $v$ :

Představte si, že se Usain Bolt rozbíhá v závodě na sto metrů při světovém rekordu 9,58 s na MS v Berlíně. Snadno lze vypočítat průměrnou rychlost vydělením celkové dráhy časem  $v=10,44 \text{ m.s}^{-1}$  ( $37,58 \text{ km.h}^{-1}$ ), ale touto rychlostí neběžel celou dobu. Chceme-li určit rychlost v prvních deseti metrech jeho běhu, vydělíme tuto dráhu časem, za který ji uběhl, podobně určíme rychlost, kterou uběhl například druhý metr dráhy, či posledních 10 cm. Pokud



budeme dráhu a tedy i rozdíl času  $\Delta t$  zmenšovat až k nule dostaneme okamžitou rychlost v čase  $t$ , což lze vyjádřit následující limitou.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$

Tato limita je ovšem definicí derivace

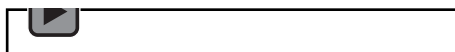
Derivace podle času, **a jen podle času**, se často označují tečkou nad derivovanou veličinou.

**Okamžitá rychlost je tedy derivací polohy podle času.**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t)$$



Audio 1.3 Okamžitá rychlost.



*Pro zajímavost Boltova maximální rychlost těsně před cílem byla  $12,42 \text{ m.s}^{-1}$  ( $44,72 \text{ km.h}^{-1}$ ).*

**Jednotky rychlosti:** Základní jednotkou rychlosti je metr za sekundu [ $\text{m.s}^{-1}$ ]. Dalšími často používanými jednotkami jsou kilometry či míle za hodinu [ $\text{km.h}^{-1}$ ;  $\text{mile.h}^{-1}$ ]. U anglických jednotek se často uvádí rychlost pomocí zkratky s per-p například míle za hodinu miles per hour se značí mph. V letectví se často používají násobky rychlosti zvuku zvané Machovo číslo Ma. Velmi vysoké rychlosti se často uvádějí jako poměr k rychlosti světla ve vakuu, viz příklad z úvodu se třemi raketami.

### Zrychlení a:

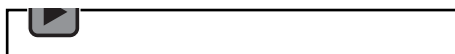
Rychlost se také může v průběhu pohybu měnit velmi podobnou úvahou lze dospět k definici zrychlení. Obvykle se značí **a** z anglického acceleration.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

**Jednotky zrychlení:** Základní jednotkou zrychlení je metr za sekundu na druhou [ $\text{m.s}^{-2}$ ]. Často se také setkáte s násobky tíhového zrychlení  $G$ .  $1G = 1.g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .



Audio 1.4 Okamžité zrychlení.



**Okamžité zrychlení je tedy derivací rychlosti podle času.**

**Ryv j:** Změnu zrychlení vyjadřuje veličina zvaná **ryv**. Požadavky na určitý průběh ryvu jsou například při provozu osobních výtahů. Obvykle se značí **j** z anglického jerk – cukat, trhat sebou. Pokud je Vám ve výtahu špatně je to v důsledku ryvu.

$$\vec{j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \dot{\vec{a}}(t)$$

Základní jednotkou ryvu je metr za sekundu na třetí [ $\text{m.s}^{-3}$ ]. V tomto materiálu se s ním dále setkávat nebudeme.



**Kombinace vztahů mezi polohou, rychlostí, zrychlením a časem.**

Stává se, že neznáme časovou závislost mezi jednotlivými veličinami, ale například víme, že při pohybu ve vzduchu je zrychlení úměrné druhé mocnině rychlosti. Je proto vhodné vyjádřit i další vztah mezi rychlostí, polohou a zrychlením. Všechny kinematické vztahy pohybu bodu po přímce lze vyjádřit následujícími rovnicemi.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t)$$

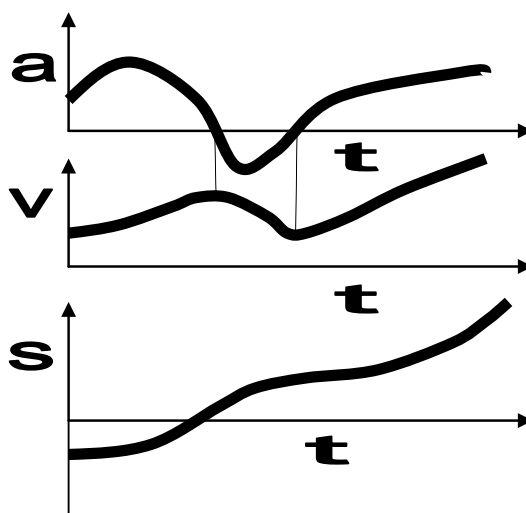
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Vyloučením času z předchozích rovnic dostaneme následující vztah mezi zrychlením, rychlostí a polohou

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)}$$

|             |                         |                      |
|-------------|-------------------------|----------------------|
| <b>a(t)</b> | Zrychlení bodu v čase t | [m.s <sup>-2</sup> ] |
| <b>v(t)</b> | Rychlost bodu v čase t  | [m.s <sup>-1</sup> ] |
| <b>x(t)</b> | Poloha bodu v čase t    | [m.]                 |
| <b>t</b>    | Čas t                   | [s]                  |

Uvedené vztahy úplně popisují pohyb bodu po přímce. Znalosti je třeba doplnit znalostí integrálního a diferenciálního počtu. Často je užitečné nakreslit si grafy časových průběhů daných veličin. Při využití znalostí diferenciálního a integrálního počtu lze určovat i maxima a minima jednotlivých veličin.

**1.2.1.2 Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb bodu**

Předchozí vztahy jsou obecnými vztahy mezi polohou, rychlostí a zrychlením a časem pro pohyb po přímce. V případě, že některá z předchozích veličin je konstantní pak se předcházející vztahy zjednoduší. Například padá-li těžké břemeno na Zemi v blízkost povrchu Země a odpor vzduchu je zanedbatelný lze zrychlení považovat za konstantní a tento pohyb nazýváme rovnoměrně zrychlený. Podobně například vlak po rozjetí už ani nezrychluje, ani





nezpomaluje, to znamená, že jeho zrychlení  $a$  je nulové tento pohyb nazýváme rovnoměrný. Počáteční rychlost lze označit jako  $v_0$ , a počáteční polohu jako  $x_0$ .

### Rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$a = \text{konst.}$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

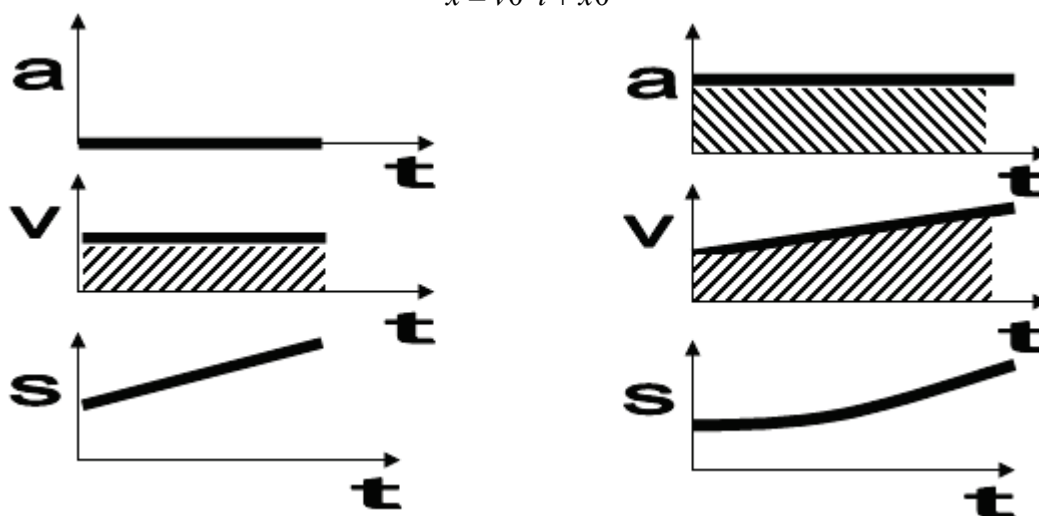
$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

### Rovnoměrný pohyb:

$$a = 0$$

$$v = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$



Na obrázku jsou znázorněny časové průběhy rychlostí a zrychlení pro rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb.

Všimněte si, že plocha v grafu rychlosti odpovídá přírůstku dráhy, protože velikost integrálu je rovna obsahu ploch pod křivkou.



Audio 1.5 Plocha v grafu.



Mnoho příkladů, především pro rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb lze s výhodou vypočítat, jestliže využijete předchozí znalosti. Nezapomeňte, že rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb jsou **jen zvláštními případy pohybu**. U pohybů, kde se mění rychlost či zrychlení tyto vztahy většinou nelze použít a je nutno počítat pomocí obecných vztahů.

Velmi důležité je odhadnout co lze ve kterém případě zanedbat, co zjednodušit a jaké vztahy pro který případ použít. Při řešení úloh je nutno kromě znalostí kinematiky nutno také zapojit logické myšlení.

## 1.3 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Někdy je v příkladech nadbytek informací a je na nás abychom vybrali ty, které potřebujeme.



### 1.3.1 Rovnoměrný pohyb po přímce:

$$v=v_0$$

$$x=v_0 \cdot t + x_0$$

#### 1.3.1.1 Příklad 1



Při mistrovském závodě 27. 5. 2006, který byl součástí Českého poháru v běhu do vrchu, na trati Ostravice-Lysá hora a zpět se utkali běžci Jan Havlíček ASK Slavia Praha a Miroslav Vítek TJ Jiskra Ústí nad Orlicí. Havlíček měl strategii běžet do kopce poměrně rychle konstantní rychlostí  $v_{11}=10\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a dolů pak opatrněji konstantní rychlostí  $v_{12}=20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , zatímco Vítek při běhu do kopce mírně šetřil síly a běžel konstantní rychlostí  $v_{21}=9\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Určete jakou rychlostí  $v_{22}$  musí běžet Vítek dolů, aby doběhli do cíle oba ve stejný čas.

#### Řešení:

Je třeba si uvědomit, že dráha směrem nahoru  $s_n$  je přesně stejná jako dráha směrem dolů  $s_d$ . Čas Havlíčka směrem nahoru si označíme  $t_{11}$  a dolů  $t_{12}$ , podobně u Vítka  $t_{21}$  a  $t_{22}$ . Jedná se o rovnoměrný pohyb. Rovnost drah nahoru a dolů lze vyjádřit:

$$s_n = s_d$$

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{1,2} \cdot t_{1,2}$$

Dráhy obou běžců jsou stejné:

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,1} \cdot t_{2,1}$$

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,2} \cdot t_{2,2}$$

Mají-li doběhnout současně, musí platit, že součet jejich časů se sobě rovná:

$$t_{1,1} + t_{1,2} = t_{2,1} + t_{2,2}$$

Zdá se, že ve čtyřech rovnicích je pět neznámých  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$ ,  $t_{22}$  a  $v_{22}$ . Nás, ale časy nezajímají a stačí nám jejich poměr. Možný postup řešení je, že z poslední rovnice vyjádříme čas  $t_{22}$  pomocí času  $t_{11}$  a známých rychlostí.

$$t_{2,2} = t_{1,1} + t_{1,2} - t_{2,1}$$

$$t_{1,2} = t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}}$$

$$t_{2,1} = t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}}$$



$$t_{2,2} = t_{1,1} + t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}} - t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}}$$

Dosadíme do druhé rovnice pro stejné dráhy obou běžců. Časy  $t_{1,1}$ , se zkrátí a rychlost  $v_{2,2}$  lze vypočíst z následující rovnice.

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,2} \cdot \left( t_{1,1} + t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}} - t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}} \right)$$

Pokud si dopředu uvědomíme, že na dráze ani na čase nezáleží, lze tento příklad řešit úvahou tak, že si libovolnou dráhu zvolíme například  $s_n = s_d = 180 \text{ km}$ . Rychlost  $v_{2,2}$  vypočteme snadno následující úvahou. Víme, že nahoru by první běžec běžel 18 h a dolů 9 h, celkem tedy 27 h. Druhý nahoru 20 h a na cestu dolů mu zbývá 7 h. Pak jeho rychlost je 180 km děleno 7 h. (*Vzdálenost Ostravice vrchol Lysé hory je 8,5 km*)

**Výsledek:**  $v_{2,2} = 7,14 \text{ m.s}^{-1}$  ( $25,7 \text{ km.h}^{-1}$ ).

### 1.3.1.2 Příklad 2



Lanovka na Pustevnách je v současnosti (rok 2010) 1637 m dlouhá a má převýšení 400 m. Ráztoka má nadmořskou výšku 620 m. n. m., Pustevny 1020 m. n. m.. Za hodinu přepraví 900 osob na dvojsedačkách, na dráze se nachází 162 dvojsedaček to znamená, že 81 dvojsedaček jede v daném okamžiku jedním směrem. Lyžař jede kolem lanovky konstantní rychlostí tak, že potká 100 sedaček v protisměru. Určete rychlost lyžaře.

**Výsledek:**  $v = 10,77 \text{ m.s}^{-1}$ .

### 1.3.1.3 Příklad 3

Letadlo letí ve směru Praha-Ostrava, po přistání se téměř okamžitě vrací zpět, a doba, kterou strávilo letadlo na letišti je zanedbatelná. V průběhu prvního letu tam a zpět vane západní vítr ve směru od Prahy do Ostravy rychlostí  $v_V$ , rychlost letadla vůči větru je  $v_L$ . V průběhu druhého letu vane severní vítr kolmo na směr letu. Letadlo při druhém letu musí letět mírně šikmo proti větru, tak aby jeho výsledný pohyb byl ve směru Praha-Ostrava. Rychlost větru je vždy menší než rychlost letadla.

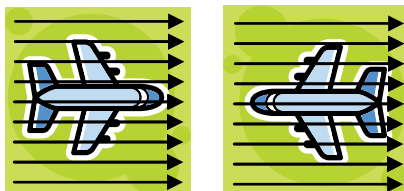
**Určete:**

- 1) Poměr doby letu  $t_1$  a  $t_2$  Praha-Ostrava-Praha letu při prvním a druhém letu.

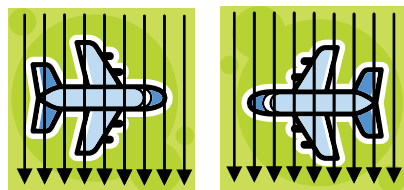


- 2) Určete konkrétní doby letu pro rychlost větru  $vV=80 \text{ km.h}^{-1}$ ; cestovní rychlost letadla typu Saab SF340A/340B je  $vL=480 \text{ km.h}^{-1}$ . Vzdálenost mezi Prahou a Ostravou je  $L=350 \text{ km}$ .

1. Let:



2. Let:



Výsledky:

Poměr doby letu je:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{vL}{\sqrt{vL^2 - vV^2}}$$

Případně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{vV^2}{vL^2}}}$$

Pro zadané rychlosti letadla a větru je čas prvního letu Praha-Ostrava-Praha  $t_1=5400 \text{ s}$  (90 min) a čas druhého letu  $t_2=5324 \text{ s}$  (88,74 min).

*Poznámka:* Příklad je obdobou Morley-Michelsonova pokusu, kde snaha o vysvětlení výsledku pokusu dala impuls ke vzniku teorie relativity.

### 1.3.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb bodu po přímce

$$a=\text{konst}$$

$$v=a.t+v_0$$

$$x=\frac{1}{2}.a.t^2+v_0.t+x_0$$

#### 1.3.2.1 Příklad 1

Automobil projede kolem policejní hlídky konstantní rychlostí  $v=72 \text{ km/h}$  a jede dále touto rychlostí. Policejní hlídka po 1 sekundě vyrazí za ním tak, že její automobil se pohybuje s konstantním zrychlením  $a=3 \text{ m.s}^{-2}$ .

Určete:



- 1) Za jak dlouho od projetí kolem hlídky policie automobil dostihne.
- 2) Jakou rychlost vp bude mít policejní automobil v tomto okamžiku.
- 3) Jakou dráhu s urazí před dostižením automobilu.

Nakreslete grafy závislostí rychlostí na čase.

### Řešení:

Jedná se o kombinaci rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu a při dostižení musí si být obě dráhy rovny. Počáteční rychlost hlídky  $v_0$  je nulová. Získáme kvadratickou rovnici pro čas.

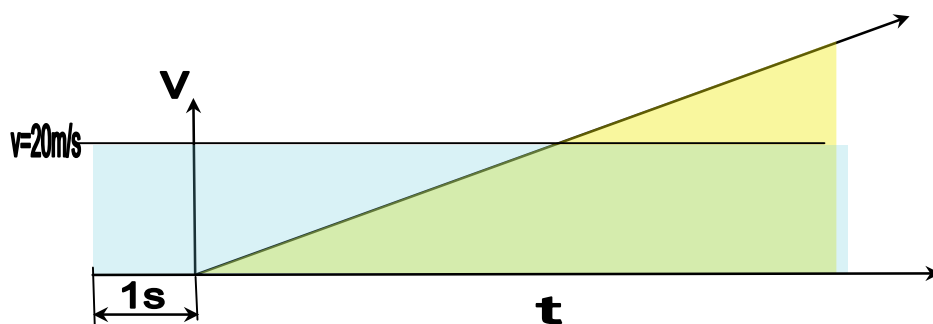
$$v \cdot (t + 1 \cdot s) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Pro zjištění rychlosti a dráhy se jedná jen o dosazení do vztahů.

$$vp = a \cdot t + v_0$$

$$sp = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Grafy rychlosti v závislosti na čase.



Grafy rychlostí v

závislosti na čase lze použít tak, že hledáme v jakém čase se sobě rovnají obsahy ploch obdélníka, jehož jedna strana odpovídá konstantní rychlosti automobilu a druhá neznámému času  $t$  zvětšenému o 1 s, a trojúhelníka, jehož jedna strana je odpovídá součinu zrychlení a času  $a \cdot t$  a druhá času  $t$ . Po výpočtu následuje zkouška nejčastěji dosazením do původních rovnic.

### Výsledky:

- 1)  $t = 15,27$  s
- 2)  $vp = 42,8$  m/s
- 3)  $s = 305,4$  m

### 1.3.3 Příklady na brzdění auta před přechodem pro chodce

Brzdění, se skládá z několika fází:

Reakční doby řidiče na podnět.

Reakční doby brzd to je náběh brzdového systému a doba prodlevy brzd.

Samotné brzdné dráhy.

Pro **reakční dobu dobrého řidiče**, který není pod vlivem alkoholu nebo drog či není jeho schopnost snížena poslechem rádia, telefonováním či věkem, a prodlevu brzd se počítá v součtu **1 sec**. Po tuto dobu jedeme a nic se neděje s rychlostí jízdy. Zrakem zjistíme, že se



děje něco, co je v rozporu s běžnou situací, tedy nebezpečí, mozek to vyhodnotí jako nebezpečné a vydá svalům příkaz reagovat, noha povolí pedál plynu, přesune se na brzdu a zmáčkne pedál a brzdy začnou zabírat.

Na brzdnou dráhu má také vliv stav vozovky, její povrch, pneumatiky a další činitelé. Je také rozdíl, jedeme-li s osobním autem, s nákladním či s motocyklem.

Důležitý je koeficient tření mezi vozovkou a koly. Koeficienty jsou uvedeny v tabulce a platí pro běžnou pneumatiku v dobrém stavu. Současné drážkované pneumatiky (uvažuje se o zákazu používání) **FORMULE 1** mají součinitel tření na dobrém podkladu cca  $f = 2,0$ . Také reakční doby řidiče a brzd je u formule výrazně kratší i **0,3 s**.

| Vozovka                                           | Suchá                | Mokrá |            |
|---------------------------------------------------|----------------------|-------|------------|
|                                                   |                      | čistá | znečištěná |
| <b>Typ Vozovky</b>                                | Koeficient tření $f$ |       |            |
| rozehrátý asfalt (živičná výroba)                 | 0,9                  | 0,8   | 0,6        |
| beton nový zdrsňený                               | 0,7                  | 0,65  | 0,55       |
| dlažba žulová                                     | 0,5                  | 0,35  | 0,25       |
| zasněžená vozovka, kola s řetězy                  | 0,55                 | 0,25  | 0,1        |
| zasněžená vozovka (zimní pneu)                    | 0,45                 | 0,1   | 0,1        |
| vozovka zledovatělá, kola s řetězy                | 0,35                 | 0,15  | 0,15       |
| vozovka zledovatělá, kola bez řetězů (zimní pneu) | 0,15                 | 0,05  | 0,05       |
| bláto                                             | -                    | -     | 0,3        |

Maximální možné zrychlení či zpomalení je na vodorovné cestě rovno tíhovému zrychlení vynásobenému koeficientem tření  $a_{\max} = g \cdot f$ . Toto maximální možné zrychlení není dáno stavem brzd, ale jen a jen stavem cesty a pneumatik.

### 1.3.3.1 Příklad 2

V obci jede na suché asfaltové vozovce Formule 1 (formule jede po takové cestě jen pro potřeby tohoto příkladu) a auto vybavené běžnými pneumatikami rychlostí  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Určete, jak daleko přechodem musí začít auta brzdít, aby stačila zastavit. Údaje vyhledejte v tabulce a v textu nad ní.

**Výsledky: formule 9,08 m; auto 24,8 m.**

### 1.3.3.2 Příklad 3

Řidič osobního auta s běžnými pneumatikami jede po suché asfaltové vozovce a při rychlosti  $v = 50 \text{ km/h}$  by zastavil, viz předchozí příklad. Určete, jakou rychlostí přijede k přechodu, pojedou-li rychlostí a)  $60 \text{ km/h}$  b) rychlostí  $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

**Výsledky:**

a)  $41,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 11,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b)  $60,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 16,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (velký rozdíl).



### 1.3.3.3 Příklad 4

Jede-li řidič osobního auta rychlostí  $50 \text{ km.h}^{-1}$  a na suché asfaltové vozovce by zastavil před přechodem. Určete, jakou rychlostí dojde k přechodu, jestliže začne brzdit ve stejné vzdálenosti jako v prvním případě, a vzdálenost ve které by musel začít brzdit, aby před přechodem zastavil, je-li vozovka:

- Ze žulových kostek a po dešti (celkem čistá).
- Suchá a zledovatělá.
- Mokrá a zledovatělá-čistý led.

**Pozn.** Zkuste si tyto vzdálenosti určit pro různé rychlosti.

**výsledky:**

- $10,9 \text{ m.s}^{-1}=39,1 \text{ km.h}^{-1}$ ; 42,0 m
- $12,7 \text{ m.s}^{-1}=45,6 \text{ km.h}^{-1}$ ; 79,5 m
- $13,5 \text{ m.s}^{-1}=48,6 \text{ km.h}^{-1}$  210,6 m

### 1.3.3.4 Příklad 5

Kámen padá do propasti a za čas  $T=2,5 \text{ s}$  uslyšíme zvuk dopadu. Určete hloubku propasti. (fyzikální konstanty  $g=9.81 \text{ m.s}^{-2}$ , rychlost zvuku  $c=330 \text{ m.s}^{-1}$ ). Odpor vzduchu zanedbejte.

**Výsledek**  $H=28,56 \text{ m}$ .

Uvažujte pro jakou přesnost je možno zanedbat zpětný odraz zvuku a ve spojení s příklady v další části, určete, jak zanedbání odporu vzduchu ovlivní přesnost.

### 1.3.3.5 Příklad 6



"Vběhl jsem do strojovny, zavřel oči a čekal, co se bude dít," popisuje okamžiky těsně před nárazem do mostu ve Studénce strojvůdce rychlíku Comenius Jiří Šindelář. Ještě před tím ale uvedl do provozu rychlobrzdu, čímž strojvůdce zachránil život mnoha lidem. Vlak začal brzdit a po ujetí **vzdálenosti 452 m** snížil rychlost ze  **$134 \text{ km.h}^{-1}$  na  $90 \text{ km.h}^{-1}$**  a narazil ve Studénce do zříceného mostu, přesto zemřelo 8 lidí z celkem 200, kteří byli ve vlaku. **Předpokládejte, že vlak brzdí rovnoměrně zrychleně (zpomaleně) a zrychlení je pro všechny body v části určete stejné.**

**Určete:**

Za jaký čas  **$t_1$**  narazil vlak do mostu?

V jaké vzdálenosti  **$s_2$**  by musel vlak začít brzdit (zrychlení je stejné), aby do mostu narazil rychlostí  **$v_2=50 \text{ km/h}$** , při které by pravděpodobnost úmrtí či větších zranění by byla mnohem nižší.

Na jaké vzdálenosti  **$s_3$**  by vlak z původní rychlosti zastavil?

**Výsledky:**

**$t_1=14,53 \text{ s}$**



$$s_2 = 708,8 \text{ m}$$

$$s_3 = 823,5 \text{ m}$$

### 1.3.4 Nerovnoměrný pohyb po přímce

U následujících příkladů je nutno použít diferenciální vztahy a je potřebná znalost integrálního počtu.

#### 1.3.4.1 Příklad 1

Kámen padá do propasti, dopadne a za čas vidíte jeho dopad  $T=10 \text{ s}$ . Uvažujte s odporem vzduchu úměrným druhé mocnině rychlosti:  $a = g - k \cdot v^2$ . Konstantu  $k$  určete ze znalosti ustálené rychlosti volného pádu  $v_{vp} = 250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Určete rychlost, se kterou kámen dopadá a hloubku propasti  $H$ . Porovnejte tuto rychlost a dráhu s rychlostí a dráhou vypočtenými při zanedbání odporu vzduchu. Integrovaní je trochu obtížnější.

- Zjistěte, pro jaký naměřený čas bude rozdíl mezi dráhou vypočtenou bez a se zanedbáním odporu vzduchu menší než 2%.

#### Řešení:

Nejprve určíme konstantu  $k$  z úvahy, že při ustálené rychlosti volného pádu je zrychlení nulové.

$$0 = g - k \cdot v_{vp}^2$$

Pro určení rychlosti dopadu použijeme diferenciální vztah vedoucí na separovatelnou diferenciální rovnici, kterou separujeme a integrujeme.

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ g - k \cdot v^2 &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ dt &= \frac{d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \\ \int_0^T dt &= \int_0^{v_{\text{dopadu}}} \frac{d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \end{aligned}$$

Jednou z možností je použít při výpočtu rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{g - k \cdot v^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g} + k \cdot v} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g} - k \cdot v}$$

Po integraci, která vede na logaritmy, a po dalších úpravách získáme rychlost dopadu.

$$v_{\text{dopadu}} = \frac{1 - e^{2 \cdot T \cdot \sqrt{k \cdot g}}}{-1 - e^{2 \cdot T \cdot \sqrt{k \cdot g}}} \cdot v_{vp}$$

Pro určení dráhy je vhodné použít postupně následující vztahy.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)} \\ g - k \cdot v^2 &= \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)} \end{aligned}$$





$$d\vec{x}(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2}$$

$$H = -\frac{1}{2k} \cdot \ln\left(\frac{-g + k \cdot v_{\text{dopadu}}^2}{-g}\right)$$

$$\int_0^H d\vec{x}(t) = \int_0^{v_{\text{dopadu}}} \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2}$$

U rychlosti bez uvažování s odporem vzduchu se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením  $g$  a jeho řešení je jednoduché.

#### výsledky:

s uvažováním odporu vzduchu

$$v_{\text{dopadu}} = 61,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; H = 381,9 \text{ m}$$

bez zahrnutí odporu vzduchu

$$v_{\text{dopadu}} = 98,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; H = 490,3 \text{ m}.$$

#### 1.3.4.2 Příklad 2



Jessika chce kvůli pojistce zabít kočku tak, že ji vyhodí z vrcholu budovy Empire State Building. Tato budova má 102 pater a 448 m. Výšky pater považujte za stejné. Kočka se ovšem při pádu chová jinak než kámen, či člověk, a klade vzduchu větší odpor. V první fázi letu je kočka stresovaná, schoulí se do klubíčka, a kdyby letěla tímto způsobem pořád, ustálila by se její rychlost na  $144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Po **třech sekundách** letu se kočka uklidní, roztáhne nohy a ocas a začne plachtit podobně jako poletucha. Kdyby takto plachtila pořád, dosáhne ustálené rychlosti volného pádu pouze  $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  a velmi často se jen lehce zraní. Zrychlení kočky při uvážení odporu vzduchu je přibližně úměrné druhé mocnině rychlosti podle vztahu  $a = g - k \cdot v^2$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení a  $k$  je konstanta, kterou ze zadaných hodnot dokážeme určit. V tomto případě se jedná o dvě různé konstanty  $k_1$  a  $k_2$ , které se pro obě části letu se liší.

#### Určete:

- 1) Ze kterého patra má Jessika vypustit kočku, aby na zem dopadla co nejvyšší rychlostí a určete i tuto rychlost.
- 2) Jakou rychlostí a za jakou dobu kočka dopadne z vrcholu budovy.
- 3) Zda v případě, že se vše prozradí, bude vyšší trest za pojistný podvod nebo za týrání zvířat. Otázka č. 3 není součástí dynamiky.

Tento příklad pro analytické řešení používá trochu obtížnější integrály vyžadující rozklad na parciální zlomky podobně jako u předchozího příkladu nebo znalost toho jaký integrál vede na funkci hyperbolický tangens.

#### Výsledky:

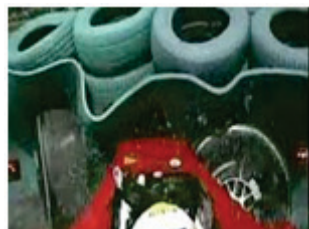


Kočku má vyhodit mezi 9. a 10. patrem výška (**40,64 m**) pak dopadne rychlostí

**$v_1 = 25,05 \text{ m.s}^{-1}$** ; (90,2 km.h<sup>-1</sup>).

Rychlost dopadu z vrcholu budovy bude téměř shodná s ustálenou rychlostí volného pádu  **$v_2 = 20 \text{ m.s}^{-1}$**  (72 km.h<sup>-1</sup>). Doba letu kočky z vrcholu budovy ve druhé fázi bude  **$T_2 = 20,125 \text{ s}$**   
Celková doba letu  $T + T_2 = 23,125 \text{ s}$ .

### 1.3.4.3 Příklad 3



Při závodu vozů formule 1 na Hungaroringu udeřila Felipe Massu pružina do hlavy, dále pokračoval v zatáčce rovně a vjel do naskládaných pneumatik. Při nárazu do pneumatik rychlostí  $v_0$  se přední část jeho vozu bořila do bariéry pneumatik. Odpor pneumatik se zvyšoval přibližně úměrně druhé mocnině délky, kterou vůz v bariéře vězel. To znamená, že pro zrychlení platilo  $a = -k \cdot x^2$ , kde  $x$  délka dráhy od nárazu do pneumatik čili délka zaboření se v pneumatikách. Kolik nejvíce metrů se formule do pneumatik zabořila, než se vůz úplně zastavil.  **$k = 30 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ;  $v_0 = 180 \text{ km/h}$** ;

**Výsledek  $H = 5 \text{ m}$ .**

## 2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

### *Internet*

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.

