

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Dynamika bodu

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	DYNAMIKA BODU	3
1.1	Trocha historie	4
1.2	Newtonovy zákony	5
1.2.1	Řešení pohybu bodu pomocí zákona síly.	5
1.2.2	Obecný postup při řešení úloh, který je předveden na jednoduchém příkladu. .	7
1.3	Další vektorové přístupy.	8
1.4	Energetické přístupy	9
1.4.1	Příklady potenciálních energií	10
1.4.2	Věta o změně kinetické energie	11
1.4.3	Věta o zachování mechanické energie	11
1.4.4	Příklad řešení pohybovou rovnicí i energeticky	12
1.4.5	Energetický přístup.....	12
1.5	Příklady k procvičení	13
1.5.1	Příklad 1.....	13
1.5.2	Příklad 2.....	13
1.5.3	Příklad 3.....	13
1.5.4	Příklad 4.....	13
1.5.5	Příklad 5.....	14
1.5.6	Příklad 6.....	14
1.5.7	Příklad 7.....	14
1.5.8	Příklad 8.....	15
1.5.9	Příklad 9.....	15
1.5.10	Příklad 10.....	16
1.5.11	Příklad 11.....	16
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	17



1 DYNAMIKA BODU



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Dynamika bodu.
Trocha historie.
Newtonovy zákony.
Další vektorové přístupy.
Energetické přístupy.
Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Zatím jsme se zajímali jen o to, jak se něco hýbe. Existuje více možností jak získat rovnice, kterými se řídí pohyb. Porozumění těmto rovnicím pro bod vede k porozumění i pro složitější případy. Pohybovými rovnicemi se řídí veškerý pohyb ve vesmíru od galaxií přes stroje k částicím.



CÍL:

Pohybová rovnice hmotného bodu.
D'Alembertův princip, věty o změně hybnosti a momentu hybnosti.
Práce, výkon, energie, zákon zachování mechanické energie.



1.1 TROCHA HISTORIE

Zatím jsme popsali, jak se bod hýbe, to znamená kde je, jakou má rychlost, zrychlení a případně ryv, ale nezajímali jsme se co je příčinou toho, že se hýbe. O příčiny pohybu se zajímali lidé uvedení v následujících odstavcích.

Aristoteles

Pokud je těleso na svém přirozeném místě a nepůsobí na něj žádné další vlivy, setrvává tam v klidu. Pokud těleso není na svém přirozeném místě, snaží se na ně dostat (což platí zejména o svislém pohybu). **Bez účinku síly se těleso nepohybuje jinak než svým přirozeným pohybem.** Odpověď na otázku, proč letí hozený kámen, či vystřelený šíp je, že při hodu kamene či výstřelu šípu jim předáme hybnou sílu, tzv. impetus. Ty si ji chvíli s sebou nesou a postupně ji spotřebovávají. Toto však nevysvětluje např. pohyb kyvadla.

V 11. století zavádí Avicenna impetus, který se sám o sobě nevyčerpává. Jedná se o hybnou sílu vtištěnou do tělesa zdrojem pohybu. Ta v pohybujícím se tělese zůstává a dále působí jeho pohyb. Impetus se zmenšuje pouze skrze jiné síly, typicky odporem prostředí.

Galileo

Galileo objevil, že přírodní jevy lze popsat matematicky a pokládá to za odraz "pravého zákona přírody". Galileo však přitom ještě nevytváří dynamiku v dnešním smyslu, tedy nehledá příčinu pohybů. Baví ho popisovat pozemské pohyby se stejnou přesností a exaktností, jak to dělali astronomové (Kepler) s pohyby nebeskými, například kvadratickou závislost dráhy při volném pádu na čase. Svě úvahy odvozuje jen z experimentů, přesto významně ovlivní dynamiku principem setrvačnosti.

Isaac Newton

Předpoklady pro přesnější formulace dynamických zákonů dnes v rámci dostatečné přesnosti používané shrnul sir **Isaac Newton** v *Principiích (Philosophiæ naturalis principia mathematica)* vydaných r. 1687.

Newton používá *Euklidovský geometrický prostor* a nezávisle běžící *absolutní čas*, což umožňuje měřit vzdálenosti a tvary těles a popisovat polohu tělesa vzhledem ke zvolené souřadné soustavě. Absolutní čas ukazuje na existenci jisté speciální míry v měření času. Newton také zavádí pojem absolutního prostoru, který označuje jako **základní prostor**, jehož body jsou neustále na svých místech a lze vůči nim určovat absolutní polohu těles, zejména můžeme mluvit o pohybu vůči absolutnímu prostoru. Newton neznal pojem zrychlení a přiřadil každému tělesu míru jeho pohybového stavu – *hybnost* – součin rychlosti a hmotnosti. U těles v klidu či rovnoměrném pohybu po přímce, se tato míra pohybu nemění. Jako příčinu změny pohybového stavu zavádí sílu. A formuluje i zákon akce a reakce o působení sil mezi dvěma tělesy, který je důsledkem zákona zachování hybnosti.

Po další dvě století souhlasily všechny experimenty s jeho teorií a až díky **Maxwelovým** objevům v oboru elektromagnetismu, a snahám o vysvětlení **Morley-Michelsonova** pokusu při hledání rychlosti Země vůči aetheru 1887 se dospělo ke vcelku jednoduché úpravě zákonů mechaniky, kterou lze pochopit při průměrných znalostech středoškolské matematiky, zvanou Einsteinova speciální teorie relativity (trochu podobné Kolumbovu vejci). Je spíše podivné, že s touto teorií nepřišel Hendrick Lorentz či George Fitzgerald o mnoho let dříve. Při vysvětlení Michelson-Morley experimentu, Lorentz navrhl, že dochází ke zkracování délek pohybujících se těles (**kontrakci délek**) ve směru pohybu. K tomuto závěru došel již v roce 1889 **George Fitzgerald**. Lorentz zavedl termín místní čas, který vyjadřoval vztah mezi současností nepohyblivého tělesa a pohybujícího se tělesa. Speciální teorie relativity je platná jen pro velmi omezený rozsah souřadných soustav (inerciální) a proto vyžadovala zobecnění.



Obecná teorie relativity, která uvažuje i se zakřivením prostoročasu je již opravdu poměrně složitou teorií.

Pro částice pak tvoří pohybovou rovnici Schrödingerova rovnice, která určuje pouze pravděpodobnost toho, kde se částice nachází (kvantová mechanika).

V „naši“ dynamice budeme používat Newtonovy vztahy, které jsou v rámci rychlostí, a velikostí se kterými budeme pracovat dostatečně přesné.

Připomeňme si Newtonovy zákony, které jsou základem celé klasické mechaniky.

1.2 NEWTONOVY ZÁKONY

1. Zákon setrvačnosti:

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, jestliže na něj nepůsobí jiná tělesa silou nebo síly působící na těleso jsou v rovnováze.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = konst$$

2. Zákon síly:

Síla je příčinou změny pohybového stavu. Kde síla je příčinou změny hybnosti $\mathbf{p}$, která je součinem hmotnosti a rychlosti $\mathbf{p} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}$.

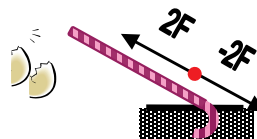
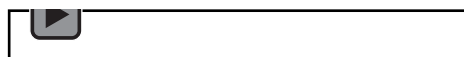
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Zákon akce a reakce:

Působí-li jedno těleso na druhé silou, působí i druhé těleso na první stejně velkou silou stejného směru opačné orientace.



Audio 1.1 Newtonovy zákony.

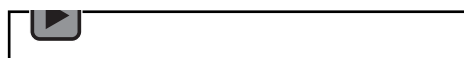


1.2.1 Řešení pohybu bodu pomocí zákona síly.

Základní rovnicí celé dynamiky je právě druhý Newtonův zákon. Tato rovnice se často nazývá pohybovou rovnicí hmotného bodu. Všimněte si, že hybnost i síla jsou vektorové veličiny, které jsou dány velikostí, působištěm, směrem a orientací. Velikost, orientace a směr lze vyjádřit pomocí složek (v E3 se jedná o tři složky, E2 o dvě, E1 jednu). Směry složek se volí tak, aby byly na sebe vzájemně kolmé (ortogonální) nejčastěji v souřadných soustavách jako u kinematických veličin (polohového vektoru, rychlosti, zrychlení). V případě, že uvažujeme hmotný bod, pak je působiště sil dáno tímto bodem.



Audio 1.2 Pohyb bodu.



Pro **konstantní hmotnost** lze pohybovou rovnici zjednodušit pomocí zrychlení.



$$\sum \vec{F} = \frac{m \cdot \vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{d\vec{r}}$$

Pozor změna hmotnosti nemusí být nutně způsobena relativistickými jevy. Představte si balón, kde část lana leží na zemi a postupně se odvíjí a hmotnost balónu, včetně lana se zvyšuje, nebo raketu, jejíž hmotnost se snižuje s tím, jak jí ubývá paliva.

Pohybovou rovnici pak lze rozepsat ve složkovém tvaru pro různé souřadné systémy:

Kartézský souřadný systém

$$F_x = m \cdot a_x \quad F_y = m \cdot a_y \quad F_z = m \cdot a_z$$

Válcový souřadný systém

$$F_\phi = m \cdot a_\phi \quad F_\rho = m \cdot a_\rho \quad F_z = m \cdot a_z$$

Přirozený souřadný systém

$$F_n = m \cdot a_n \quad F_t = m \cdot a_t \quad F_b = 0$$

Pozor i v případě, že se bod pohybuje po přímce či v rovině je nutno uvážit, jestli na něj nepůsobí síly v jiných směrech, které mohou souviset s pasivními odpory působícími v dané přímce či rovině. Při řešení úloh je dobré si uvědomit, že obecně je pohybová rovnice diferenciální rovnicí druhého řádu, která může být nelineární a často nemusí mít řešení v uzavřeném tvaru.

Obecně existují dva typy úloh:

Úloha 1. druhu (kinetostatická).

Je to taková úloha, u které známe veličiny popisující pohyb a hledáme síly, které jsou příčinou tohoto pohybu. V tomto případě se pohybová rovnice rozpadne na soustavu lineárních rovnic a řešení úlohy nebývá obtížné.

Úloha 2. druhu (dynamická).

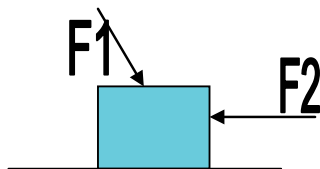
Je to taková úloha, u které známe působící síly a vyšetřujeme pohyb. V tomto případě je pohybová rovnice obecně nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu a o tom, jestli existuje řešení v uzavřeném tvaru, rozhodují další okolnosti.



1.2.2 Obecný postup při řešení úloh, který je předveden na jednoduchém příkladu.

Příklad

Na břemeno hmotnosti $m=0,3$ kg. Působí dvě síly o velikostech $F_1=4,5$ N a $F_2=0,9$ N. Síla F_1 svírá se svislým směrem úhel $\alpha=45^\circ$. Určete zrychlení tělesa, je-li na počátku v klidu. Určete tato zrychlení, pohybuje-li se těleso na začátku pohybu ve směru a proti směru pohybu síly F_1 rychlostí $v=10$ m.s⁻¹. Koeficient tření mezi tělesem a podložkou je $f=0,2$.



00) Ověříme počet stupňů volnosti (u bodu v E3 nejméně 1 maximálně 3 stupně volnosti). Má-li bod 0 stupňů volnosti, lze úlohu řešit pomocí statických rovnic rovnováhy, při záporném počtu stupňů volnosti je pak nutno statické rovnice rovnováhy doplnit rovnicemi pružnosti a pevnosti.

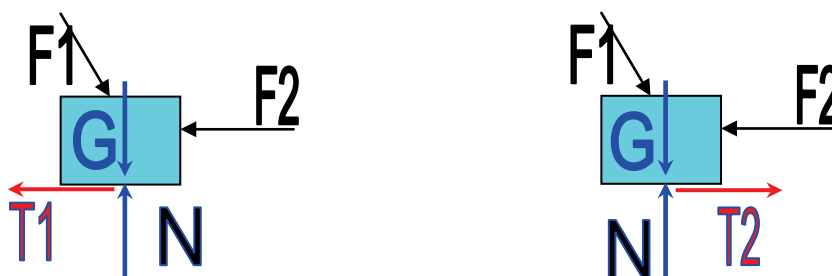
ad 00) Těleso se pohybuje jen po přímce ve vodorovném směru a má tedy jeden stupeň volnosti.

0) Pokusíme se odhadnout rozmezí, ve kterém se bude výsledek pohybovat.

ad 0) Těleso má hmotnost $m=0,3$ kg; největší působící síla je $F_1=4,5$ N zrychlení bude určitě menší než $a=150$ m.s⁻², ale břemeno se taky nemusí pohybovat vůbec $a=0$ m.s⁻². Ke zpřesnění odhadu lze použít úvahu: Složka síly F_1 ve vodorovném směru je cca $0,7 F_1$ proti ní působí F_2 a síla způsobená třením, maximální zrychlení může být $a=70$ m.s⁻², ale spíše bude mnohem menší v důsledku smykového tření. Tato úvaha by měla trvat několik sekund.

1) Bod uvolníme. To znamená, určíme všechny síly, které na něj působí velmi vhodné je nakreslit obrázek.

ad 1) Kromě sil F_1 a F_2 působí na těleso jeho vlastní tíha G , reakce podložky N a síla T způsobená třením, která působí proti směru pohybu. Zatím nevíme, kterým směrem se těleso pohybuje, proto je vhodné nakreslit oba případy. Pro zadaný směr rychlosti je směr třecí síly daný. **Třecí síla je vždy orientována proti směru pohybu.** V následujících rovnicích je kladný vodorovný směr volen ve směru kladné orientace rychlosti.



2) Napíšeme pohybovou rovnici a rozepíšeme ji do vhodných složek.

ad 2) Pro oba případy.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{T} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_1 \cdot \sin(\alpha) - T_1 - F_2 = m \cdot a_1$$

$$-F_1 \cdot \sin(\alpha) - T_2 + F_2 = m \cdot a_2$$



$$N - G - F_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$N - G - F_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

3) Rovnice doplníme o vztahy z kinematiky, statiky, geometrie a tak dále.

ad 3) V tomto případě doplníme o vztah pro smykové tření.

$$T = N \cdot f$$

4) Vzniklou soustavu rovnic vyřešíme. (lze-li analyticky jinak numericky)

ad 4) V tomto případě se jedná o soustavu lineárních rovnic a lze ji řešit například dosazováním. Výsledkem bude $a_1 = 3,524 \text{ m.s}^{-2}$; $a_2 = -11,689 \text{ m.s}^{-2}$. Záporná hodnota znamená, že je-li na počátku těleso v klidu pak se buď nerozjede, nebo rozjede s opačnou orientací, ale zrychlení bude jiné a je nutno jej vypočíst pro opačnou orientaci třecí síly. Pokud se ale těleso pohybuje a kladná orientace je stejná jako u rychlosti pak záporné zrychlení znamená, že těleso zpomaluje.

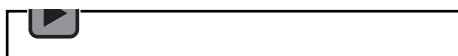
5) Ověříme správnost řešení. (například dosazením do původních rovnic či experimentem).

1.3 DALŠÍ VEKTOROVÉ PŘÍSTUPY.

D'Alembertův princip. Hlavní myšlenkou je připojit sílu, která vykompenzuje zrychlení a pak se úloha dynamická převede na úlohu statickou. Tato síla se nazývá D'Alembertova nebo setrvačná síla. Je to zdánlivá síla, kterou cítíte například při prudkém brzdění v autě, nebo při průjezdu zatáčkou.



Audio 1.3 D'Alembertův princip.



D'Alembertova síla

$$\vec{D} = -m \cdot \vec{a}$$

Rovnice pseudorovnováhy má tvar:

$$\sum \vec{F} + \vec{D} = \vec{0}$$

Toto řešení je velmi výhodné zejména u úloh 1. druhu i pro tělesa.

Dynamiku bodu lze řešit také pomocí **věty o změně hybnosti** a impulzu. Tento vztah lze odvodit z pohybové rovnice pro hmotný bod s konstantní hmotností.

$$\sum \vec{F} + \vec{D} = \vec{0}$$

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^t \vec{F} \cdot dt = m \cdot \int_{v_0}^{v(t)} d\vec{v} = m \cdot \vec{v}(t) - m \cdot \vec{v}_0$$

Pokud označíme impuls síly **I** a hybnost **p**

$$\vec{F} \cdot dt = \vec{I}$$



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

pak dospějeme k následujícímu vztahu:

$$\vec{I}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}_0(t_0)$$

Věta o změně hybnosti:

Přírůstek hybnosti v daném časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se rovná impulzu zrychlující síly v témže časovém intervalu. Impuls síly i hybnost jsou vektorové a lze je rozepsat do složek.

Řešení dynamiky bodu pomocí **věty o změně momentu hybnosti** a impulzu pro hmotný bod s konstantní hmotností.

Podobně jak se vypočte moment síly k bodu, lze vypočíst i vypočíst i moment hybnosti $\vec{L}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Po derivování

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times m \cdot \vec{a} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Protože vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je roven nule a druhá část je moment síly platí následující vztah.

$$\vec{v} \times m \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Můžeme napsat velmi podobnou větu o změně momentu hybnosti.

$$\int_0^t \vec{M} \cdot dt = \int_{L_0}^{L(t)} d\vec{L}$$

$$\vec{I}_M = L(t) - L_0$$

Věta o změně momentu hybnosti:

Přírůstek momentu hybnosti k danému bodu v určitém časovém intervalu je roven impulzu momentu I_M síly k témuž bodu a v témže časovém intervalu.

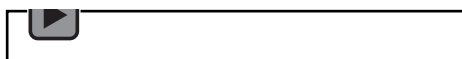
1.4 ENERGETICKÉ PŘÍSTUPY

Předchozí přístupy lze označit jako vektorové, ale v dynamice existuje ještě další přístup, kdy se dynamické úlohy řeší pomocí energií. Dvě formy mechanické energie se nazývají kinetická a potenciální. S energiemi pak souvisí mechanická práce. Energie i práce jsou skalárními veličinami, to znamená, že jsou úplně určeny jen svou velikostí.

Kinetická energie hmotného bodu E_k . Pro rychlosti a přesnosti, se kterými se běžně setkáváme je možno kinetickou energii hmotného bodu definovat jako polovina součinu hmotnosti m a druhé mocniny velikosti rychlosti.



Audio 1.4 Kinetická energie bodu.

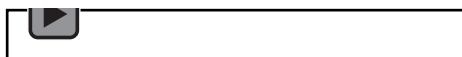


$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Potenciální energie E_p je energie bodu (tělesa) v potenciálovém silovém poli. Pozor nemusí se jednat jen o gravitační energii v blízkosti povrchu Země, ale například o energii pružiny, elektrostatického silového pole, gravitačního pole jiných těles atd. Lze ji definovat podobně jako práci jen s opačným znaménkem. Síla pole je pak funkcí polohy. U potenciální energie je definován **jen rozdíl energie** mezi dvěma místy a je jedno jakou hladinu (ekvipotenciální plochu) si vyberete jako množinu bodů s nulovou potenciální energií. Pokud počítáme s absolutní hodnotou E_p pak je nutno si stanovit hladinu s nulovou potenciální energií.



Audio 1.5 Potenciální energie.



$$Ep(r) - Ep(r_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(r - r_0) \cdot d\vec{r}$$

Taky lze říct, že síla pole je gradientem potenciální energie.

1.4.1 Příklady potenciálních energií

- 1) Potenciální energie bodu o hmotnosti m v tíhovém poli Země v blízkosti povrchu s tíhovým zrychlením g a ve výšce h nad povrchem, kde nulová hladina je zvolena na povrchu Země.

$$Ep = m \cdot g \cdot h$$

- 2) Potenciální energie bodu o hmotnosti m v tíhovém poli Země ve výšce y nad povrchem, kde nulová hladina je zvolena na povrchu Země. M_z je hmotnost Země; R_z je poloměr Země a κ je Newtonova gravitační konstanta. (Má význam pro velké výšky).

$$Ep = \frac{-M_z \cdot m}{R_z + y} \cdot \kappa + \frac{M_z \cdot m}{R_z} \cdot \kappa = \frac{-g \cdot R_z^2 \cdot m}{R_z + y} + \frac{g \cdot R_z^2 \cdot m}{R_z}$$

- 3) Potenciální energie lineární pružiny s tuhostí k při deformaci o délky y , kde nulová hladina odpovídá nezátížené a tedy nedeformované pružině.

$$Ep = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$$

Mechanická práce W je další skalární veličinou a její velikost (skalární veličiny mají pouze velikost) se vypočte stejně jako u práce jen s kladným znaménkem.

$$W(r - r_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Výkon: Je veličina charakterizující, jak rychle byla práce vykonána. Okamžitý výkon je definován jako:

$$P(t) = \frac{dW}{dt}$$



1.4.2 Věta o změně kinetické energie

Z pohybové rovnice lze odvodit vztah mezi dodanou prací a kinetickou energií, který říká, že **přírůstek kinetické energiemi mezi dvěma polohami je roven práci působících sil mezi těmito polohami.**

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{v_0}^v m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ W(r - r_0) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \\ W(r - r_0) &= Ek - Ek_0\end{aligned}$$

1.4.3 Věta o zachování mechanické energie

V konzervativním silovém poli platí, že se mechanická energie zachovává.

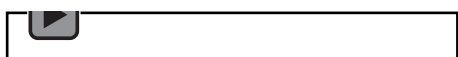
Konzervativní (potenciálové) silové pole znamená, že práce, která je vykonána silou pole po nějaké křivce závisí jen na počáteční a koncové poloze a nezávisí na tvaru křivky mezi polohami. Když chcete zvednout židli a dát ji na stůl pak v tomto typu pole je jedno dáte-li ji nahoru přímo nebo jestli s ní nejdříve obejdete místnost. Jiná definice je, že integrál po uzavřené křivce je roven nule. U židle to znamená, že skončí-li na konci tam, kde původně byla, pak se obejitím místnosti se židli nevykonala žádná práce. Podobně, lze říci, že rotace pole je rovna nule.

Příkladem takového pole může být gravitační či elektrické pole, když zanedbáme pasivní odpory. V tomto typu pole se energie nepřeměňuje na jiné formy energie jako teplo či energii plastické deformace.

Součet kinetické a potenciální energie je v konzervativním silovém poli konstantní.



Audio 1.6 Další zjednodušující předpoklady



$$Ek + Ep = \text{konst.}$$

či v jiném tvaru:

$$Ek_0 + Ep_0 = Ek_1 + Ep_1$$

V případě, že se nejedná o konzervativní pole a je dodána práce W navíc, která nesouvisí se silovým polem a přeměnění se cele na mechanickou energii, lze použít i další vztah, který ovšem není možno nazývat zákonem zachování mechanické energie.

$$Ek_0 + Ep_0 + (W) = Ek_1 + Ep_1$$

Výsledná mechanická energie je rovna součtu původní mechanické energie a dodané práce. K řešení dynamických úloh vede tedy více cest. Je možno je řešit vektorovým přístupem pomocí pohybové rovnice, D'Alembertova principu, hybnosti a impulsu síly, momentu hybnosti a impulsu silového momentu nebo pomocí energií. Většinou je některý způsob řešení pro danou úlohu vhodnější ve srovnání s ostatními, ale výběr způsobu řešení může být i

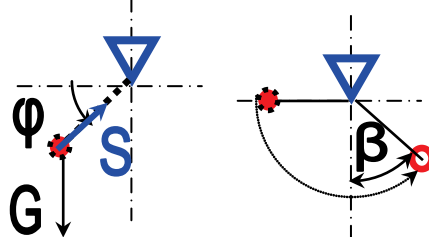


věcí oblíbenosti. Je nutno připomenout, že kromě rovnic dynamiky je také nutná znalost kinematiky, statiky, geometrie atd. Existují ještě další způsoby řešení úloh např. pomocí Lagrangeových rovnic, či Hamiltonových rovnic, ale v tomto materiálu se s nimi setkávat nebudeme.

1.4.4 Příklad řešení pohybovou rovnicí i energeticky

Hmotný bod je zavěšen na lanku zanedbatelné hmotnosti a pohybuje se po kruhové dráze v gravitačním poli Země. V počáteční poloze lanko vodorovné. Ve vyšetřované poloze svírá se svislým směrem úhel β . Počáteční rychlost je nulová. Určete rychlost bodu ve vyšetřované poloze. Hmotnost bodu je $m_B=0,1$ kg; délka lanka $r=35$ cm; $\beta=35^\circ$.

Řešení Na bod působí jeho tíha G a síla v lanku S . Zakreslíme si bod v obecné poloze dané úhlem φ . Pohybovou rovnici rozepíšeme do tečného a normálového směru.



$$G \cdot \cos(\varphi) = m \cdot a_t$$

$$\vec{G} + \vec{S} = m \cdot \vec{a}$$

$$G \cdot \sin(\varphi) + S = m \cdot a_n$$

Je-li tření zanedbatelné, pak nás bude zajímat jen rovnice v tečném směru. Použijeme-li kinematické vztahy pro zrychlení a získáme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme pro konečnou úhlovou rychlost ω_k a vynásobením délkou lanka získáme rychlost bodu.

$$a_t = r \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\omega \cdot d\omega}{d\varphi}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$G \cdot \cos(\varphi) = m \cdot r \cdot \frac{\omega \cdot d\omega}{d\varphi}$$

$$\int_0^{90^\circ + \beta} G \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi = \int_0^{\omega_k} m \cdot r \cdot \omega \cdot d\omega$$

$$v_k = \omega_k \cdot r$$

$$(v=2,371 \text{ m/s})$$

1.4.5 Energetický přístup

Nulovou hladinu potenciální energie zvolíme například v místě závěsu. Jedná se o bod v tíhovém poli Země blízko povrchu a potenciální energie závisí na tíze a výšce. Kinetická energie je dána hmotností a rychlostí.



$$Ep_0 + Ek_0 = Ep_1 + Ek_1$$

Počáteční potenciální i kinetická energie jsou rovny nule.

$$0 + 0 = -m \cdot g \cdot r \cdot \cos(\beta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_k^2$$

Z daného vztahu lze okamžitě určit rychlost bodu v_k ve vyšetřované poloze. Výsledek musí vyjít v obou případech shodný. ($v=2,371 \text{ m/s}$).

1.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.5.1 Příklad 1

Kabina výtahu včetně nákladu má hmotnost $m=380 \text{ kg}$, jakou silou je namáháno lano, když kabina:

- Stojí. ($F=3727 \text{ N}$)
- Pohybuje se vzhůru konstantní rychlostí $v=3,2 \text{ m.s}^{-1}$. ($F=3727 \text{ N}$).
- Pohybuje se vzhůru s konstantním zrychlením $a=3,2 \text{ m.s}^{-2}$. ($F=4943 \text{ N}$).
- Jede s tímto zrychlením dolů. ($F=2511 \text{ N}$).

Výsledky jsou uvedeny v závorkách.

1.5.2 Příklad 2

Určete hmotnost hmotného bodu, který se vlivem účinku zrychlující síly $F=230 \text{ N}$ rozjede za čas $T=42 \text{ s}$ na rychlost $v=31 \text{ km.h}^{-1}$.

Výsledek $m=1122 \text{ kg}$.

1.5.3 Příklad 3

Náboj o hmotnosti $m=28 \text{ g}$ opustil hlaveň pušky rychlostí $v=720 \text{ m.s}^{-1}$. Hlavní se pohyboval náboj po dobu $t=0,00065 \text{ s}$. Určete, jaký průměrný tlak působil v hlavní, jestliže vnitřní průměr hlavně je $d=8,3 \text{ mm}$. Určete hybnost H náboje po opuštění hlavně.

Výsledky $p=573,2 \text{ MPa}$; $H=20,16 \text{ kg.m.s}^{-1}$.

1.5.4 Příklad 4

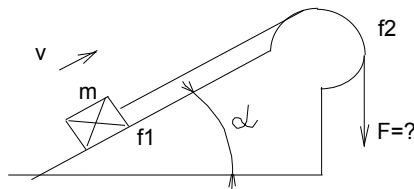
Určete, jakou silou musí být vytahováno lanem břemeno o hmotnosti $m=100 \text{ kg}$ po nakloněné rovině se sklonem $\alpha=20^\circ$ směrem vzhůru se zrychlením $a=2 \text{ m.s}^{-2}$. Lano svírá s nakloněnou rovinou úhel $\beta=30^\circ$. (orientace nahoru). Koeficient tření mezi nakloněnou rovinou a břemenem je $f=0,1$.

Výsledek $F=685,1 \text{ N}$.



1.5.5 Příklad 5

Jakou silou je zapotřebí vytahovat těleso po nakloněné rovině s koeficientem tření f_1 a úhlem sklonu nakloněné roviny α , aby na dráze s dosáhlo rovnoměrně zrychleným pohybem rychlosti v . Počáteční rychlost je v_0 . Lano je vedeno přes pevný kruhový trám s koeficientem tření f_2 . Síla má směr svisle dolů.



$m=70 \text{ kg}$
 $v_0 = 1 \text{ m/s}$
 $v=10 \text{ km.h}^{-1}$
 $f_1=0,15$
 $f_2=0,1$
 $\alpha=30^\circ$
 $s=6 \text{ m}$

Výsledek $F=581,5 \text{ N}$.

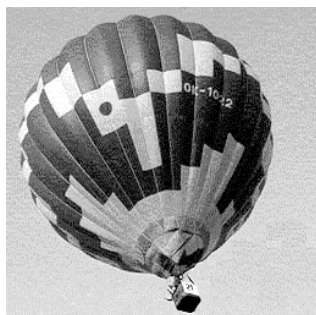
1.5.6 Příklad 6

Odbrzdný automobil o hmotnosti $m=1075 \text{ kg}$ se rozjíždí ze svahu délce $s=63 \text{ m}$ vlastní tíhou. Jaký je sklon svahu, jestliže rychlost automobilu po projetí svahu je $v=56 \text{ km.h}^{-1}$. Určete rychlost automobilu v polovině svahu (pasivní odpor zanedbejte).

Výsledky $\alpha=11,29^\circ$; $v(s/2)=11 \text{ m.s}^{-1}$.

1.5.7 Příklad 7

Balón o hmotnosti $m=540 \text{ kg}$ klesá svisle dolů se stálým zrychlením $a=1,6 \text{ m.s}^{-2}$.



Určete:

- 1) Jaká vztlaková síla působí na balón.
- 2) Jakou hmotnost m_Z musí mít závaží, které je třeba vyhodit z koše balónu, aby se začal pohybovat svisle vzhůru se stálým zrychlením $a_2=0,82 \text{ m.s}^{-2}$ (vztlaková síla je stejná).
- 3) Za jak dlouho začne balón stoupat, je-li původní rychlost v okamžiku odhození $v=10 \text{ m.s}^{-1}$ směrem dolů.

$a_2=0,82 \text{ m.s}^{-2}$



$$m=540 \text{ kg}$$

$$a=1,6 \text{ m.s}^{-2}$$

$$v=10 \text{ m.s}^{-1}$$

Výsledky:

$$F=4432 \text{ N}$$

$$m_Z=123,0 \text{ kg}$$

$$t=12,20 \text{ s.}$$

1.5.8 Příklad 8

Ze země vylétá raketa po opuštění atmosféry počáteční rychlostí $v_0=5 \text{ km.s}^{-1}$ pak vypne motory. Určete, jaké maximální výšky H dosáhne. Na raketu působí přitažlivost Země. Pozor tíhové zrychlení není konstantní a je nutno využít Newtonova gravitačního zákona.

Newtonův gravitační zákon

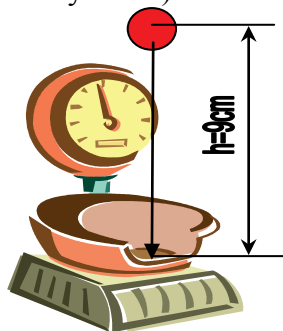
$$F_g = \frac{M_z \cdot m_R}{(R_z + y)^2} \kappa$$

M_z je Hmotnost Země; m_R je hmotnost rakety; $R_z=6380 \text{ km}$ je poloměr Země; κ je Newtonova gravitační konstanta a y je proměnlivá vzdálenost rakety od Země. Pro určení hodnoty součinu $M_z \cdot \kappa$ využijte znalosti zrychlení u povrchu Země (pro $y=0$ je $a=g$).

Výsledek ($H_{\max}=1593 \text{ km}$).

1.5.9 Příklad 9

Na miskou pružinových vah o hmotnosti $m_M=100 \text{ g}$ s pružinou o tuhosti $k=15000 \text{ N.m}^{-1}$ dopadne závaží o hmotnosti $m_Z=50 \text{ g}$. Po nárazu závaží zůstane na misce (náraz je dokonale nepružný). Určete, o jakou vzdálenost poklesne pružina. (Zde je nutno začít zákonem zachování hybnosti).



Výsledek: Pružina poklesne maximálně o vzdálenost $x=1,502 \text{ mm}$.



1.5.10 Příklad 10

Automobil jedoucí po vodorovné silnici o hmotnosti $m=1280\text{ kg}$ zvýšil svou rychlost z $v_0=7,3\text{ m.s}^{-1}$ na $v_1=63\text{ km.h}^{-1}$ za čas $t=3\text{ s}$. Jakou zrychlující sílu F musel vyvinout motor a jakou dráhu auto během zrychlování urazilo.



Výsledky $F=4352\text{ N}$, $s=37,2\text{ m}$

1.5.11 Příklad 11

Malá ebenová koule o objemu $V=2\text{ litry}$ dopadla na hladinu moře rychlostí $v_0=50\text{ m.s}^{-1}$. Odporová síla vody je úměrná rychlosti podle vztahu $F=k.v$, $k=4.\text{kg.s}^{-1}$.

Nakreslete síly působící na kouli pod hladinou vody.

Určete: Jakou rychlost bude mít koule, když se nacházejí v hloubce $h=20\text{ m}$.

Určete: Čas, za který se koule ponoří do hloubky $h=20\text{ m}$.

Pozn. hustota ebeny a vody je stejná $\rho=1000\text{ kg.m}^{-3}$ a tedy vztlaková síla je rovná tíze.

(bez výsledku)



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.

