

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



DYNAMIKA

Kinematika a dynamika prostorových pohybů

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ.....	3
1.1	Kinematika a dynamika prostorových pohybů	4
1.1.1	Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu.....	4
1.1.2	Kinematika a dynamika Šroubového pohybu	5
1.1.3	Kinematika sférického pohybu	7
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinematika a dynamika prostorových pohybů.

Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu.

Kinematika a dynamika šroubového pohybu.

Kinematika sférického pohybu.



MOTIVACE:

Prostorový posuvný pohyb se příliš neliší od rovinného posuvného pohybu. Jeho uvedení pak slouží pro přípravu k části, která se zabývá obecným prostorovým pohybem.

Matice na šroubu či dveře při vyndávání z pantů vykonávají pohyb, kterému se říká šroubový. V této kapitole se řeší jak kinematika, tak dynamika těchto pohybů.

Se sférickým pohybem se lze setkat u Rubikova kostky, sférického kloubu či například u některých poutových atrakcí. První část kinematiky popisuje vztah mezi natočeními a úhlovými rychlostmi pomocí rovnic, které se nazývají Eulerovy kinematické rovnice.

Tato kapitola také slouží jako příprava pro kinematiku a dynamiku obecného prostorového pohybu.



CÍL:

Kinematika a dynamika prostorového posuvného a šroubového pohybu.

Kinematika sférického pohybu. (Eulerovy kinematické rovnice)



1.1 KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ

V této části nebudou odvozovány dynamické rovnice pro jednotlivé typy pohybů, ale všechna odvození lze provést ze znalostí dynamiky bodu, geometrie hmot a integrálního počtu.

Rozdělení prostorových pohybů:

- a) Posuvný
- b) Šroubový
- c) Sférický
- d) Obecný prostorový

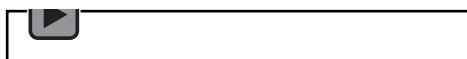
1.1.1 Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu

Definice: Je takový pohyb, kde dvě mimoběžné nebo přímky trvale zachovávají svůj směr. Tento pohyb má až tři stupně volnosti. Podobně jako u rovinného posuvného pohybu lze odvodit kinematiku a dynamiku posuvného prostorového pohybu.

Kinematika

- 1) Trajektorie všech bodů jsou shodné vzájemně posunuté prostorové křivky.
- 2) Všechny body tělesa mají ve stejném okamžiku shodné rychlosti a zrychlení.

Audio 1.1 Prostorový pohyb.



Dynamika

Pro dynamiku posuvného pohybu v prostoru se zrychlením a (a_x ; a_y ; a_z) platí:

$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

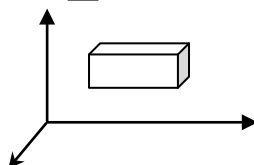
$$\sum F_y = m \cdot a_y$$

$$\sum F_z = m \cdot a_z$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$



Moment se počítá k těžišti. Jiná možnost je zavedení D'Alembertových sil do těžiště a pak lze momenty počítat k libovolnému bodu.

Kinetická energie posuvného pohybu tělesa o hmotnosti m a rychlostí v v prostoru má hodnotu:

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

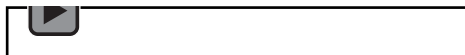


1.1.2 Kinematika a dynamika Šroubového pohybu

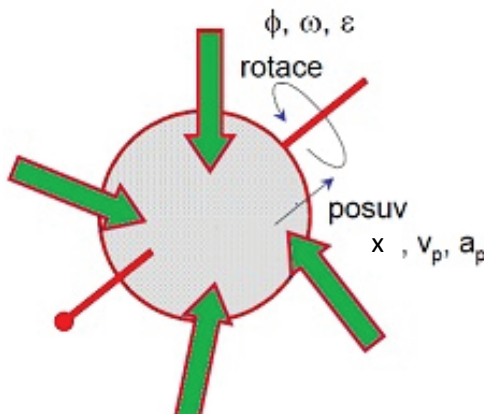
Definice: Vzniká složením otáčení kolem osy o a posunutím ve směru osy o . Souřadný systém lze natočit tak, aby osa rotace byla totožná se souřadnicí x kartézského souřadného systému.



Audio 1.2 Šroubový pohyb.



Tento pohyb má až dva stupně volnosti.



Kinematika je dána složením obou pohybů posuvu ve směru osy a rotace.

Rotace:

$$\omega = \dot{\phi}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$$

R Je vzdálenost bodu od osy

s = R · ϕ Složka dráhy na obvodu

$v_0 = R \cdot \omega$ Složka rychlosti kolmá k posuvu

$a_n = -R \cdot \omega^2$ Složka zrychlení, která je kolmá k ose o a touto osou prochází

$a_t = R \cdot \varepsilon$ Složka zrychlení, která je kolmá k ose o a ke složce zrychlení a_n .

Posuv má složky

$$x$$

$$vp = \dot{x}$$

$$ap = \dot{vp} = \ddot{x}$$

Celková velikost rychlosti

$$v = \sqrt{vp^2 + v_0^2}$$

Celkové velikost zrychlení:

$$v = \sqrt{ap^2 + a_n^2 + a_t^2}$$

Dynamika

Pro dynamiku šroubového pohybu s osou otáčení totožnou s osou x platí Kombinace pohybových rovnic a D'Alembertova principu. Platí pro pravotočivou souřadnou soustavu.

$$Dy = m \cdot \omega^2 \cdot y_T + m \cdot \varepsilon \cdot z_T$$

$$Dz = m \cdot \omega^2 \cdot z_T - dm \cdot \varepsilon \cdot y_T$$



$$MDy = -\omega^2 \cdot Dxz + \varepsilon \cdot Dxy$$

$$MDz = \omega^2 \cdot Dxy + \varepsilon \cdot Dxz$$

$$\sum Fx = m \cdot ax$$

$$\sum Fy + Dy = 0$$

$$\sum Fz + Dz = 0$$

$$\sum Mx = \varepsilon \cdot Jx$$

$$\sum My + MDy = 0$$

$$\sum Mz + MDz = 0$$

Kinetická energie

Je dána součtem kinetické energie rotace a posuvu (pro osu pohybu totožnou s osou x).

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot vp^2 + \frac{1}{2} \cdot J_x \cdot \omega^2$$



1.1.3 Kinematika sférického pohybu

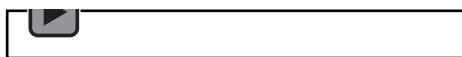
Definice: Jeden bod tělesa je neustále v klidu.

Tomuto bodu se říká střed sférického pohybu. Pohyb může mít až tři stupně volnosti.

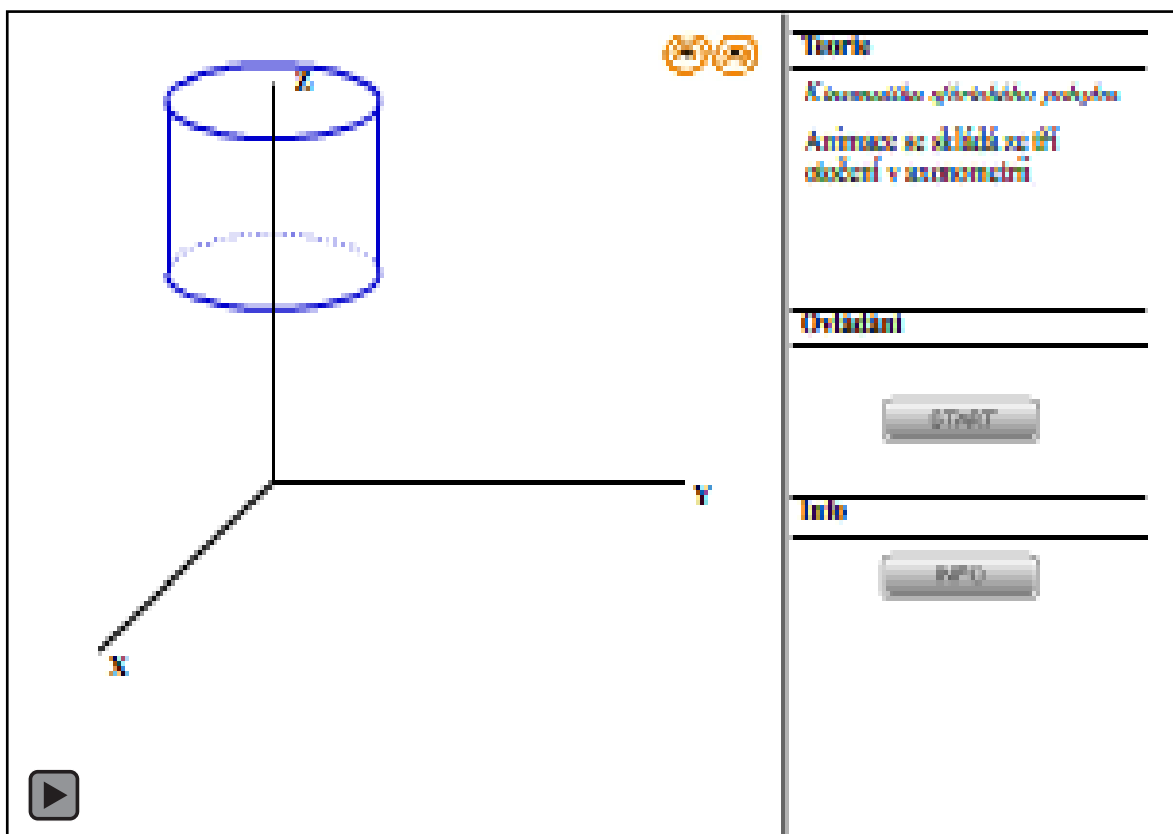
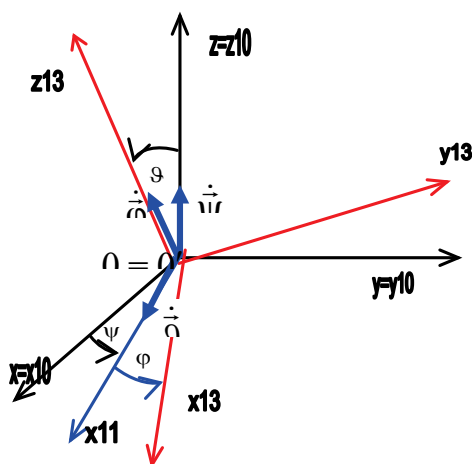
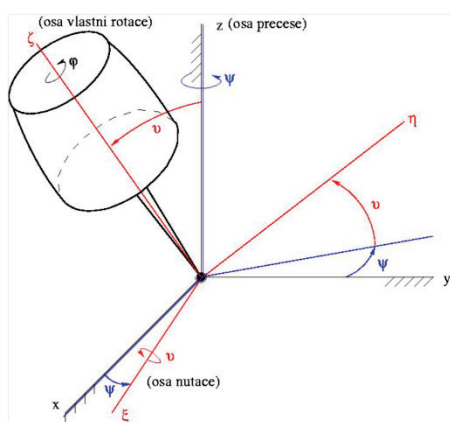
Základem kinematiky je znalost úhlové rychlosti, kterou je možno vždy rozložit do složek a to buď v souřadném systému základního prostoru (x ; y ; z). Nebo v souřadném systému spojeným s tělesem (x_1 ; y_1 ; z_1). Vztahy mezi úhly popisujícími polohu a složkami úhlové rychlosti lze vyjádřit pomocí Eulerových kinematických rovnic.



Audio 1.3 Sférický pohyb.



Eulerovy kinematické rovnice



Pro popis polohy rotace tuhého používáme **EULEROVY úhly**:

ψ úhel **precese**, ϑ úhel **nutace** φ úhel **rotace**.

Střed sférického pohybu je 0 společný počátek soustavy $S_0 (0; x; y; z)$ spojené se základním prostorem a soustavy $S_1(0; x_1; y_1; z_1)$, **pevně spojené s** rotujícím tuhým **tělesem**. Z S_0 do S_1 můžeme přejít složením **tří elementárních** otočení v následujícím pořadí:

- 1) Natočení okolo osy z o úhel ψ . Osa z_{10} zůstane na místě a osy x_{10} a y_{10} se přesunou do nových poloh x_{11} , y_{11} . Poloze x_{11} se říká uzlová přímka. Úhlová rychlost díky tomuto natočení je derivací úhlu ψ a má jen složku ve směru osy z .

$$\dot{\psi}_x = 0$$

$$\dot{\psi}_y = 0$$

$$\dot{\psi}_z = \dot{\psi}$$

- 2) Natočení okolo uzlové přímky i o úhel ϑ , osy z_{10} a y_{11} se přemístí do nových poloh y_{12} a z_{13} . Složky úhlové rychlosti související s tímto natočením jsou:

$$\dot{\vartheta}_x = \dot{\vartheta} \cdot \cos(\psi)$$

$$\dot{\vartheta}_y = \dot{\vartheta} \cdot \sin(\psi)$$

$$\dot{\vartheta}_z = 0$$

- 3) Při dalším natočení okolo nové osy z_{13} o úhel φ osy x_{11} a y_{11} se přemístí do nových poloh x_{13} a y_{13} . Složky úhlové rychlosti související s tímto natočením jsou:

$$\dot{\varphi}_x = \dot{\varphi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\psi)$$

$$\dot{\varphi}_y = -\dot{\varphi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\psi)$$

$$\dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Výsledné složky úhlové rychlosti jsou pak dány příslušnými součty. Těmito rovnicím se říká

Eulerovy kinematické rovnice.

$$\omega_x = \dot{\vartheta} \cdot \cos(\psi) + \dot{\varphi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\psi)$$

$$\omega_y = \dot{\vartheta} \cdot \sin(\psi) - \dot{\varphi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\psi)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Podobně lze získat i složky úhlové rychlosti v novém souřadném systému ($x_1; y_1; z_1$)

$$\omega_{x1} = \dot{\psi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) + \dot{\vartheta} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\omega_{y1} = \dot{\psi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\vartheta} \cdot \sin(\varphi)$$

$$\omega_{z1} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Pro úhlové zrychlení platí:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$$

Podobný vztah lze použít i pro souřadný systém spojený s tělesem.



Pro **rychlost** bodu A s polohovým vektorem $\vec{r}_A$ (x_A, y_A, z_A) pak platí vztah:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix}$$

Pro **zrychlení** bodu A s polohovým vektorem $\vec{r}_A$ (x_A, y_A, z_A) pak platí

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Podobné vztahy lze použít i pro souřadný systém spojený s tělesem.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.

