

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



ZÁKLADY AUTOMATICKÉHO ŘÍZENÍ

2. týden

doc. Ing. Renata WAGNEROVÁ, Ph.D.

Ostrava 2013

© doc. Ing. Renata WAGNEROVÁ, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3054-4



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	LAPLACEOVA TRANSFORMACE.....	3
1.1	Úvod	4
1.2	Základní vlastnosti.....	4
1.3	Základní vlastnosti.....	Chyba! Záložka není definována.
1.4	Určování originálů z obrazu	6
1.5	Řešení diferenciálních rovnice	7
2	POUŽITÁ LITERATURA	10



1 LAPLACEOVA TRANSFORMACE



OBSAH KAPITOLY:

Definice L-transformace

Základní vlastnosti L-transformace

Rozklad na parciální zlomky

Řešení diferenciálních rovnic



MOTIVACE:

Chování dynamických systému popisují diferenciální rovnice. Pro vyšetření základních vlastností systémů je nutné umět co možná nejjednodušším způsobem vyřešit diferenciální rovnice.



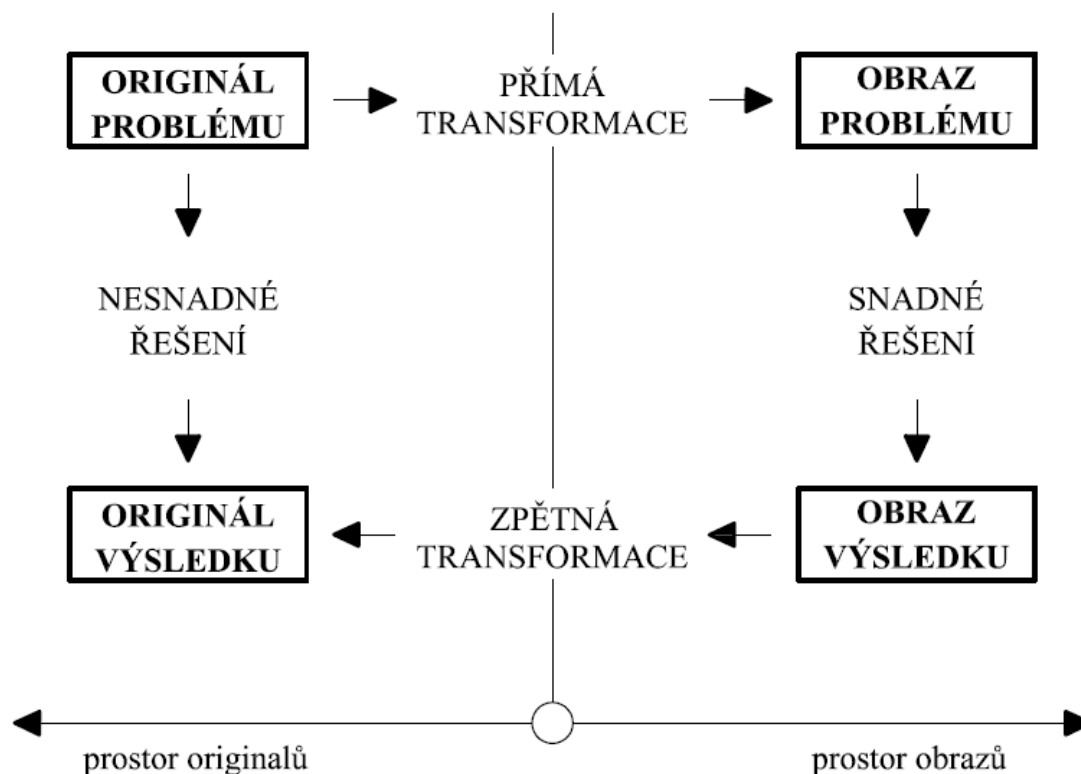
CÍL:

Budete umět definovat Laplaceovu transformaci a vyřešit lineární diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace.



1.1 ÚVOD

L-transformace je důležitým nástrojem usnadňující analýzu a syntézu spojitých lineárních dynamických systémů. Převádí složitý problém z prostoru originálu do prostoru obrazů, kde je řešení takhle transformovaného problému mnohem jednodušší. Po vyřešení obrazu vypočítáme pomocí zpětné transformace výsledný originál, viz obr. 1.



Obr.1 - Obecné schéma řešení problémů pomocí transformace

1.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Laplaceova transformace je definována vztahy:

Přímá L-transformace

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

Zpětná L-transformace

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(s)e^{st} ds, \quad (2)$$

kde je

$s = \alpha + j\omega$ - je komplexní proměnná ($\alpha = \text{Re}\{s\}$, $\omega = \text{Im}\{s\}$),

t - reálná proměnná (v našem případě čas),

$x(t)$ - originál (L-originál); funkce definovaná v oblasti reálné proměnné

pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$,

$X(s)$ - obraz (L-obraz); komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné,



$j = \sqrt{-1}$ - imaginární jednotka,

L - operátor přímé L-transformace,

L^{-1} - operátor zpětné (inverzní) L-transformace,

C - reálná konstanta zvolená tak, aby v polorovině $\operatorname{Re}\{s\} > C$ funkce

$X(s)$ neměla žádné singulární body.

Z přímé L-transformace vyplývá, že zobrazuje funkci reálné proměnné $x(t)$ (v našem případě času) na komplexní funkci komplexní proměnné $X(s)$. Hodnota originálu $x(t)$ pro $t \geq 0$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v časovém okamžiku t . Protože čas t se mění spojitě, hovoříme o spojitě transformaci a je zřejmé, že L-transformace bude vhodná především pro spojitě systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí lineárních diferenciálních, integrálních a integro-diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Podmínky které originál musí splňovat:

1. musí být nulový pro záporný čas

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases};$$

2. musí být exponenciálního tvaru

$$|x(t)| \leq M e^{\alpha_0 t}, \\ M > 0, \alpha_0 \in (-\infty, \infty), t \geq 0;$$

3. musí být spojitá funkce.

Splnění podmínek:

1. podmínka spočívá v tom, že vždy vynásobíme danou časovou funkcí Heavisideovým jednotkovým skokem, definovaným vztahem:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases};$$

2. a 3. podmínka odpadá, protože většina časových funkcí používaných v technice splňuje. Výjimkou je např. funkce $x(t) = e^{t^2}$.

Vztah mezi originálem a jeho obrazem se nazývá **korespondence** a zapisuje se ve tvaru

$$x(t) \hat{=} X(s).$$

Originál značíme malým písmenem a obraz stejným velkým písmenem.

Vztah mezi originálem a obrazem, které budeme používat při výpočtech transformací.

1. Linearita

$$L\{a_1 x_1(t) \pm a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(s) \pm a_2 X_2(s). \quad (3)$$

2. Derivace 1. řádu

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0). \quad (4)$$



3. Derivace n-tého řádu

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \cdot \frac{d^{i-1} x(0)}{dt^{i-1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

4. Integrace

$$L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s). \quad (6)$$

5. Počáteční hodnota v časové oblasti

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s). \quad (7)$$

6. Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \quad (8)$$

7. Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)

$$L\{x(t-a)\} = e^{-as} X(s), \quad a \geq 0. \quad (9)$$

8. Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)

$$L\{x(t+a)\} = e^{-as} \left[X(s) - \int_0^a x(t) e^{-st} dt \right], \quad a \geq 0. \quad (10)$$

1.3 URČOVÁNÍ ORIGINÁLŮ Z OBRAZU

Pomocí slovníku L-transformace najdeme vztahy mezi originály a obrazy. Potíže mohou vznikat při určení originálu z obrazu. Obraz je vždy ve tvaru racionální lomené funkce a často je nutné jej rozdělit na součet parciálních zlomků, které ve slovníku L-transformace najdeme.

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad n > m.$$

Pokud stupeň jmenovatele n není větší než stupeň čitatele m , je třeba provést úpravu obrazu vydělením čitatele jmenovatelem.

Obraz ve tvaru ryze racionální lomené funkce můžeme zjednodušit rozložením na parciální zlomky, pro které již ze slovníku L-transformace snadno najdeme odpovídající korespondenci:

$$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{(s-s_1)(s-s_2)^r(s^2+as+b)(s^2+cs+d)^q},$$

kde $(s-s_1)$ - odpovídá reálnému kořenu,

$(s-s_2)^r$ - odpovídá r -násobnému reálnému kořenu,

(s^2+as+b) - odpovídá komplexně sdruženým kořenům,



$(s^2 + cs + d)^q$ - odpovídá q -násobným komplexně sdruženým kořenům.

Obraz $X(s)$ může být zapsán v rozloženém tvaru :

$$X(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B_1}{s-s_2} + \frac{B_2}{(s-s_2)^2} + \dots + \frac{B_r}{(s-s_2)^r} + \frac{Cs+D}{s^2+as+b} + \\ + \frac{E_1s+F_1}{s^2+cs+d} + \frac{E_2s+F_2}{(s^2+cs+d)^2} + \dots + \frac{E_qs+F_q}{(s^2+cs+d)^q},$$

kde $A, B_1, B_2, \dots, B_r, C, D, E_1, F_1, E_2, \dots, E_q$ jsou konstanty, které se určí např. dosazovací metodou nebo metodou neurčitých koeficientů. Někdy je vhodné tyto metody kombinovat.

1.4 ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICE

Postup řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je následující. Nejdříve musíme určit obraz diferenciální rovnice (rovnice se mění na algebraickou), najít obraz řešení a ten převést zpět do oblasti originálu, viz. (obr. obr. 1).

Příklad 1: Vyřešte rovnice s nulovými počátečními podmínkami:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 4e^{-3t} \quad y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Postup řešení:

Obraz levé strany se rovná obrazu pravé strany. Nejdříve musíme určit obraz diferenciální rovnice

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{4}{s+3},$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 4s + 3) = \frac{4}{s+3},$$

obraz řešení musíme pro další výpočty rozložit na parciální zlomky

$$Y(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}.$$

musíme vypočítat konstanty rozkladu, použijeme například dosazovací metodou

$$4 = A(s+3)^2 + B(s+1) \cdot (s+3) + C(s+1),$$

$$4 = 4A \Rightarrow A = 1,$$

$$4 = -2C \Rightarrow C = -2,$$

$$4 = 9A + 3B + C,$$

$$4 = 9 + 3B - 2 \Rightarrow B = -1,$$

pomocí slovníku L-transformace (tab. 3 vlastnost 16 a 17) je řešení

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} \right\} = e^{-t} - 3e^{-3t} - 2te^{-3t}.$$

Příklad 2: Vyřešte diferenciální rovnici:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 12,$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 2; y'(0) = 0$.

Postup řešení:

V podstatě stejný jak v předchozím příkladu. K výpočtu použijeme vzorec

$$L\{y''(t) + 5y'(t) + 6\} = L\{12\}.$$



Zavedeme-li $L\{y(t)\} = Y(s)$ a použijeme-li vztah o linearitě (3), vztah o derivaci obrazu (4) a vztah o derivaci n -tého řádu (5), kde $n = 2$, dostáváme:

$$[s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 y'(0)] + 5[sY(s) - s^0 y(0)] + 6Y(s) = \frac{12}{s},$$

dosazení obou počátečních podmínek a úpravou dostaneme

$$Y(s)[s^2 + 5s + 6] = 2s + 10 + \frac{12}{s},$$

tím dostáváme obraz řešení

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s + 12}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2}{s},$$

pomocí slovníku L-transformace (tab. 3 vlastnost 3) je řešení

$$y = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2\eta(t).$$

Příklad 3: Vyřešte diferenciální rovnici pomocí L-transformace

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6; \quad y(0) = 3; y'(0) = -2.$$

Postup řešení:

Určíme obraz diferenciální rovnice

$$[s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 y'(0)] + 3[sY(s) - s^0 y(0)] + 2Y(s) = \frac{6}{s},$$

dosazení obou počátečních podmínek a úpravou dostaneme

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = 3s + 7 + \frac{6}{s},$$

obraz řešení musíme opět rozložit na proporcionální zlomky

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 7s + 6}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

Řešení metodou neurčitých koeficientů

$$3s^2 + 7s + 6 = (A + B + C)s^2 + (3A + 2B + C)s + 2A.$$

Protože koeficienty u stejných mocnin komplexních proměnné s musí být stejné, lze proto psát:

$$3 = A + B + C,$$

$$7 = 3A + 2B + C,$$

$$6 = 2A.$$

Z této soustavy 3 lineárních algebraických rovnic snadno dopočítáme 3 neznámé konstanty:

$$A = 3, B = -2, C = 2.$$

Pomocí slovníku L-transformace (tab. 3 vlastnost 4, 16 a 17) je řešení

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right\} = 3\eta(t) - 2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Příklad 4: Najděte řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{-2t}; \quad y(0) = 0; y'(0) = 0.$$

Postup řešení:

Určíme obraz diferenciální rovnice

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s+2},$$

obraz řešení:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{(s+2)(s+2)(s+1)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}.$$



Řešení metodou neurčitých rezidui:

$$x(t) = \sum_i \operatorname{res}_{s=s_i} [X(s)e^{st}] = \sum_i \left\{ \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}} [(s - s_i)^{r_i} X(s)e^{st}] \right\}.$$

Kde počet různých kořenů je $2 (i = 1, 2)$; $s_1 = -1, s_2 = -2$; násobnost kořenů $r_1 = 1, r_2 = 2$, stupeň mnohočlenu ve jmenovateli obrazu $n = r_1 + r_2 = 3$, potom:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s+1) \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} e^{st} \right] + \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2)^2 \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2}{(s+2)^2} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[-\frac{2}{(s+1)^2} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2}{(s+1)} t e^{st} \right] = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t}. \end{aligned}$$



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ŠVARC, I. 2002. *Automatizace/Automatické řízení*. Brno: Nakladatelství CERM, 2002, ISBN 80-214-2087-1.
- [2] VÍTEČKOVÁ, M. 2005. *Slovníky L- a Z- transformace s řešenými příklady*. Ostrava, KAKI 2005. 71 s. ISBN 80-248-0851-X.
- [3] VÍTEČKOVÁ, M.&VÍTEČEK, A. 2006. *Základy automatické regulace*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava 2006. 198 s. ISBN 80-248-1068-9.

