

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



ZÁKLADY AUTOMATIZACE TECHNOLOGICKÝCH PROCESŮ V TEORII

Ing. Romana Garzinová, Ph.D.
Ing. Ondřej Zimný, Ph.D.
prof. Ing. Zora Jančíková, CSc.

Ostrava 2013

© Ing. Romana Garzinová, Ph.D., Ing. Ondřej Zimný, Ph.D., prof. Ing. Zora Jančíková, CSc.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3043-8



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	CVIČENÍ Č. 6.....	3
1.1	Laplaceova transformace - úvod, odvození	4
	POUŽITÁ LITERATURA.....	11



1 CVIČENÍ Č. 6



STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Laplaceova transformace - úvod, odvození



MOTIVACE:

V tomto cvičení se student seznámí s použitím Laplaceovy transformace a jejími základními vlastnostmi. A procvičí si příklady na přímou Laplaceovu transformaci, a příklady na vytvoření přenosu systému z diferenciální rovnice.



CÍL:

Cílem cvičení je naučit studenta využívat Laplaceovu transformaci.

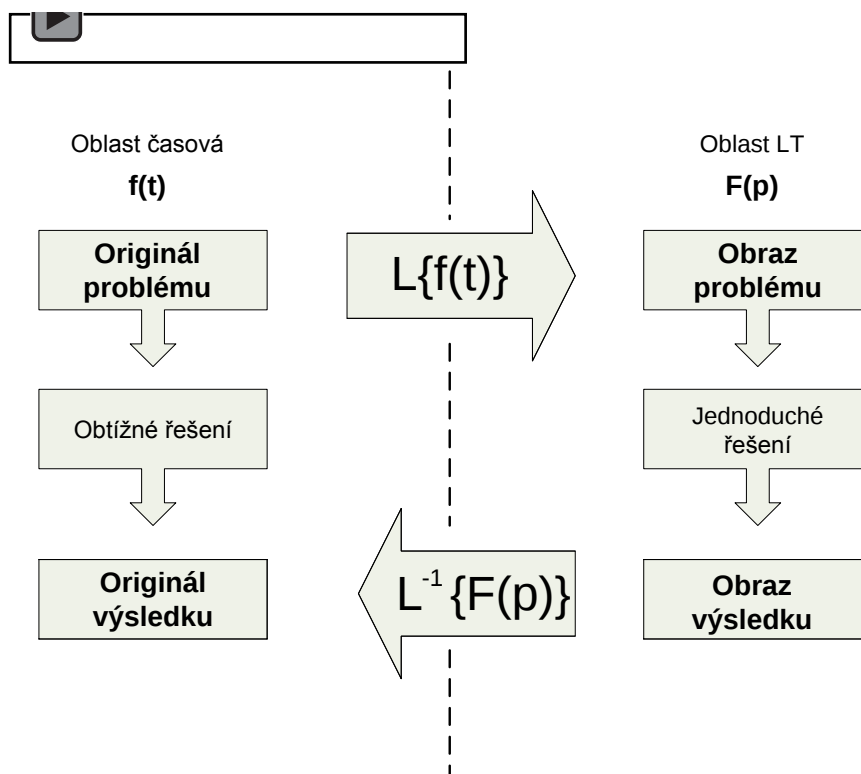


1.1 LAPLACEOVA TRANSFORMACE - ÚVOD, ODVOZENÍ

Laplaceova transformace patří do oblasti tzv. symbolických počtů, kde se nesnadno řešitelný problém v časové oblasti s reálnou proměnnou t transformuje do oblasti komplexní proměnné p , kde je problém snadněji řešitelný a po vyřešení problému se provede zpětná Laplaceova transformace a výsledky se tak převedou zpět do časové oblasti. Laplaceova transformace se používá k popisu, analýze a řešení řídicích obvodů, které jsou popsány jevy probíhajícími v čase popsaných lineárními diferenciálními rovnicemi.



Audio 1.1



Obr. 1 Postup řešení při užití Laplaceovy transformace

L – operátor přímé Laplaceovy transformace

L^{-1} – operátor zpětné Laplaceovy transformace

$f(t)$ – funkce definovaná v oblasti reálné proměnné pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$

$F(p)$ – komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné

Přímá Laplaceova transformace – (originál $\Rightarrow$ obraz)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$$L\{f(t)\} = F(p)$$

L – operátor přímé Laplaceové transformace

Při zápisu označujeme funkce v časové oblasti malými písmeny a říkáme jim *originály* $\{u(t), y(t)\}$.

Zpětná transformace – (obraz $\Rightarrow$ originál)



$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dt$$

$p = c + j\omega$ – komplexní proměnná

c – reálná konstanta větší než nula

$j\omega$ – imaginární část ($j = \sqrt{-1}$ – imaginární část, ω – úhlová frekvence)

L^{-1} – operátor pro zpětnou Laplaceovu transformaci

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$$

Funkce v operátorové oblasti označujeme stejnými velkými písmeny a říkáme jim *obrazy* $\{U(p), Y(p)\}$.

Vztah mezi originálem a jeho obrazem se nazývá *korespondence* a zapisuje se ve tvaru

$$f(t) \triangleq F(p)$$

aby funkce $f(t)$ v integrálu byla integrovatelná, to je, aby existoval obraz, musí být funkce $f(t)$:

1. nulová pro záporný čas

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$$

2. musí být alespoň po částech spojitá
3. musí být funkcí exponenciálního řádu, tj. musí vyhovovat nerovnosti

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

kde $M > 0$; $\alpha \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$



Základní vlastnosti Laplaceovy transformace lze shrnout do následující tabulky:

Vlastnost	Funkce ve tvaru originálu	Funkce ve tvaru obrazu
Linearita	$f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$	$F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$
Násobení konstantou	$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(p)$
Věta o podobnosti	$f(at)$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
Věta o posunutí vpravo	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
Derivace	$f^{(n)}(t)$	$p^n \cdot F(p) \quad *$
Integrace	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{1}{p} \cdot F(p) \quad *$

Příklad:

Převeďte funkci na její obraz pomocí vztahu pro přímou Laplaceovou transformaci, při předpokladu nulových počátečních podmínek.

Definiční vztah přímé Laplaceovy transformace: $F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$

$$f(t) = e^{-at}$$

$$\begin{aligned}
 L\{e^{-at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{-(a+p)} = -\frac{1}{a+p} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \\
 &= -\frac{1}{a+p} \left[e^{-u} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+p} \left[e^{-\infty} - e^{-0} \right] = -\frac{1}{a+p} [0 - 1] = \frac{1}{p+a}
 \end{aligned}$$



Příklad:

Převeďte funkci na její obraz pomocí vztahu pro přímou Laplaceovou transformaci, při předpokladu nulových počátečních podmínek.

$$f(t) = at$$

$$\begin{aligned} L\{at\} &= \int_0^{\infty} ate^{-pt} dt = a \int_0^{\infty} te^{-pt} dt = \left[\begin{array}{l} u = t \quad v' = e^{-pt} \\ u' = 1 \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right] = a \int_0^{\infty} \left[\left(t - \frac{1}{p} e^{-pt} \right)' - 1 \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \right] dt = \\ &= a \left[t - \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} - a \int_0^{\infty} 1 - \frac{1}{p} e^{-pt} dt = a \left[t - \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{a}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{a}{p} te^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{a}{p} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \\ &= -\frac{a}{p} \infty e^{-p \cdot \infty} - -\frac{a}{p} 0 e^{-p \cdot 0} - \frac{a}{p^2} (e^{-p \cdot \infty} - e^{-p \cdot 0}) = 0 + 0 - \frac{a}{p^2} (0 - 1) = \frac{a}{p^2} \end{aligned}$$

integrace per partes $\int uv' dt = uv - \int u'v dt$

$$\left[\begin{array}{l} u = t \quad v' = e^{-pt} \\ u' = 1 \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right]$$

Diferenciální rovnici můžeme při nulových počátečních podmínkách použitím věty o obrazu derivace převést na *přenos soustavy (obrazový přenos)*, což je obraz diferenciální rovnice při nulových počátečních podmínkách.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_0 Y(p) = b_m p^m U(p) + \dots + b_0 U(p)$$

$$Y(p)(a_n p^n + \dots + a_0) = U(p)(b_m p^m + \dots + b_0)$$

Z čehož obrazový přenos dostaneme jako poměr výstupu ke vstupu

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

Základní rovnice přenosu

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$



Základní rovnice přenosu se často upravuje na tvar:

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0} p + \dots + \frac{b_m}{a_0} p^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{\beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^m \beta_j p^j}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^i}$$

V praxi má přenos soustavy často tvar:

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{K}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + \dots + T_n^n p^n}$$

Kde:

K – zesílení soustavy

$T_1, T_2, \dots, T_n$ – časové konstanty

Příklad:

Vytvořte přenos systému, je-li zadána jeho diferenciální rovnice

$$2y'''(t) + 3y''(t) + 5y'(t) + 7y(t) = 4u'(t) + 0,3u(t)$$

$$2p^3 Y(p) + 3p^2 Y(p) + 5p Y(p) + 7Y(p) = 4pU(p) + 0,3U(p)$$

$$Y(p)(2p^3 + 3p^2 + 5p + 7) = U(p)(4p + 0,3)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{4p + 0,3}{2p^3 + 3p^2 + 5p + 7}$$

Příklad:

Vytvořte přenos systému, je-li zadána jeho diferenciální rovnice

$$4y''(t) + 2y'(t) = u(t)$$

$$4p^2 Y(p) + 2p Y(p) = U(p)$$

$$Y(p)(4p^2 + 2p) = U(p)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{4p^2 + 2p}$$



Příklad:

Vytvořte přenos systému, je-li zadána jeho diferenciální rovnice

$$3y''(t) + 5y'(t) + 7y(t) = 3u''(t) + 4u'(t) + 0,3u(t)$$

$$3p^2 Y(p) + 5pY(p) + 7Y(p) = 3p^2 U(p) + 4pU(p) + 0,3U(p)$$

$$Y(p)(3p^2 + 5p + 7) = U(p)(3p^2 + 4p + 0,3)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3p^2 + 4p + 0,3}{3p^2 + 5p + 7}$$

Příklad:

Vytvořte přenos systému, je-li zadána jeho diferenciální rovnice

$$y(t) = 2u(t)$$

$$Y(p) = 2U(p)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = 2$$

Příklad:

Napište diferenciální rovnici, je-li zadán přenos systému

$$G(p) = \frac{6p^2 + 4p + 1}{3p^3 + p^2 + 5p + 9}$$

$$Y(p)(3p^3 + p^2 + 5p + 9) = U(p)(6p^2 + 4p + 1)$$

$$3p^3 Y(p) + p^2 Y(p) + 5pY(p) + 9Y(p) = 6p^2 U(p) + 4pU(p) + U(p)$$

$$3y'''(t) + y''(t) + 5y'(t) + 9y(t) = 6u''(t) + 4u'(t) + u(t)$$

Příklad:

Napište diferenciální rovnici, je-li zadán přenos systému

$$G(p) = \frac{2p^2 + 5p + 4}{p^2 + 0,2p + 3}$$

$$Y(p)(p^2 + 0,2p + 3) = U(p)(2p^2 + 5p + 4)$$

$$p^2 Y(p) + 0,2pY(p) + 3Y(p) = 2p^2 U(p) + 5pU(p) + 4U(p)$$

$$y''(t) + 0,2y'(t) + 3y(t) = 2u''(t) + 5u'(t) + 4u(t)$$



Příklad:

Napište diferenciální rovnici, je-li zadán přenos systému

$$G(p) = \frac{p}{0,8p^2 + 0,2p + 0,33}$$

$$Y(p)(0,8p^2 + 0,2p + 0,33) = U(p)(p)$$

$$0,8p^2 Y(p) + 0,2p Y(p) + 0,33Y(p) = pU(p)$$

$$0,8y''(t) + 0,2y'(t) + 0,33y(t) = u'(t)$$



POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Švarc, I. AUTOMATIZACE Automatické řízení . Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2002. ISBN 80-214-2087-1.
- [2] Vítečková, Miluše. Slovníky L- a Z-transformace s řešenými příklady. Ostrava : Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava. Katedra automatizační techniky a řízení, 2005. ISBN 978-80-248-0851-2.
- [3] Vítečková, M. a Víteček, A. Základy automatické regulace. Ostrava : VŠB-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA 17. listopadu 15/2172 Ostrava-poruba 708 33, 2008. ISBN978-80-248-1924-2.
- [4] Franklin, G.F., Powell, J.D. a Emami-Naeini, A. Feedback control of dynamic systems. London : Pearson, 2009. ISBN 978-0-13-601.
- [5] Žalman , M. a Kneppo, I. Systémy automatického riadenia. Trenčín : Trenčianská univerzita v Trenčíne, 2001. ISBN 80-88914-48-5.
- [6] Heger, M., Tomis, L. a Balcová, J. ASŘ TP v hutích - výpočetní a laboratorní cvičení. Ostrava : VŠB v Ostravě, 1991. ISBN 80-7079-079-7.
- [7] Voráček, R., Andryšek, F. a Brýdl, Z. Automatizace a automatizační technika II. Praha 4 : Computer Press, 2000. ISBN 80-7226-247-5.

