INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

ZÁKLADY AUTOMATIZACE TECHNOLOGICKÝCH PROCESŮ V TEORII

Ing. Romana Garzinová, Ph.D.
Ing. Ondřej Zimný, Ph.D.
prof. Ing. Zora Jančíková, CSc.

Ostrava 2013

© Ing. Romana Garzinová, Ph.D., Ing. Ondřej Zimný, Ph.D., prof. Ing. Zora Jančíková, CSc.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3043-8

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ Č. 8 3

1.1 Laplaceova transformace - příklady (přechodová a impulsní funkce) 4

POUŽITÁ LITERATURA 9

1 CVIČENÍ Č. 8

STRUČNÝ OBSAH CVIČENÍ:

Laplaceova transformace - příklady (přechodová a impulsní funkce)

MOTIVACE:

V tomto cvičení se student naučí počítat impulzní a přechodové funkce ze zadaných diferenciálních rovnic. K výpočtu bude využívat Laplaceovu transformaci.

CÍL:

Cílem cvičení je naučit studenta počítat přechodové a impulzní funkce s využitím Laplaceovy transformace.

1.1 LAPLACEOVA TRANSFORMACE - PŘÍKLADY (PŘECHODOVÁ A IMPULSNÍ FUNKCE)

Přechodová a impulsní funkce

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

$$Y(p) = G(p) \cdot U(p)$$

$$y(t) = L^{-1}\{G(p) \cdot U(p)\}$$

přechodová funkce

$$h(t) = L^{-1}\left\{G(p) \cdot \frac{1}{p}\right\}$$

impulsní funkce

$$g(t) = L^{-1}\{G(p) \cdot 1\}$$

Příklad:

Určete impulsní a přechodovou funkci systému, který je popsán diferenciální rovnicí:

$$3y'(t) + 0{,}5y(t) = 1{,}5u(t)$$
$$3pY(p) + 0{,}5Y(p) = 1{,}5U(p)$$
$$Y(p)\,(3p + 0{,}5) = U(p)(1{,}5)$$

$$G(p) = \frac{1{,}5}{3p + 0{,}5}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(p) \cdot 1\} = L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{3p + 0{,}5} \cdot 1\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{3p + 0{,}5}\right\}$$

$$= 1{,}5L^{-1}\left\{\frac{1}{3p + 0{,}5} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right\} = 1{,}5L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}p + \frac{0{,}5}{3}}\right\} = \frac{1{,}5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p + \frac{0{,}5}{3})}\right\}$$

$$g(t) = \frac{1{,}5}{3}e^{-\frac{0{,}5}{3}t}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{G(p) \cdot \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{3 \cdot p + 0{,}5} \cdot \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{p \cdot (3 \cdot p + 0{,}5)}\right\}$$

$$h(t)=1{,}5L^{-1}\left\{\frac{1}{3p^2+0{,}5p}\right\}=1{,}5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{3p^2+0{,}5p}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right\}=1{,}5L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}p^2+\frac{0{,}5}{3}p}\right\}$$

$$=1{,}5\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{1p^2+\frac{0{,}5}{3}p}\right\}=\frac{1{,}5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+\frac{0{,}5}{3})}\right\}=\frac{1{,}5}{3}\frac{1}{\frac{0{,}5}{3}}\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}t}\right)$$

$$h(t)=\frac{1{,}5}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{0{,}5}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)=\frac{1{,}5}{0{,}5}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)=3\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}t}\right)$$

$$\underline{h(t)=3\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}t}\right)}$$

Příklad:

Určete impulsní a přechodovou funkci systému, který je popsán diferenciální rovnicí:

$$y''(t)+8y'(t)+15y(t)=2u'(t)+6u(t)$$
$$p^2Y(p)+8pY(p)+15Y(p)=2pU(p)+6U(p)$$
$$Y(p)\,(p^2+8p+15)=U(p)(2p+6)$$

$$G(p)=\frac{2p+6}{p^2+8p+15}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\cdot 1\}=L^{-1}\left\{\frac{2p+6}{p^2+8p+15}\cdot 1\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2p+6}{p^2+8p+15}\right\}$$

$$g(t)=L^{-1}\left\{\frac{2(p+3)}{(p+3)(p+5)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{p+5}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{p+5}\right\}$$

$$\underline{g(t)=2e^{-5t}}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{G(p)\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2p+6}{p^2+8p+15}\cdot\frac{1}{p}\right\}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{2p+6}{p(p^2+8p+15)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2(p+3)}{p(p+5)(p+3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{p(p+5)}\right\}$$

$$\underline{h(t)=\frac{2}{5}(1-e^{-5t})}$$

Příklad:

Určete impulsní a přechodovou funkci systému, který je popsán diferenciální rovnicí:

$$y'(t)+3y(t)=e^{-2t}u(t)$$
$$pY(p)+3Y(p)=\frac{1}{p+2}U(p)$$

$$\mathrm{G(p)}=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\frac{1}{p+2}}{\frac{p+3}{1}}=\frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\cdot 1\}=L^{-1}\left\{=\frac{1}{(p+2)(p+3)}\cdot 1\right\}$$

$$\underline{g(t)=e^{-2t}-e^{-3t}}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{G(p)\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)(p+3)}\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+2)(p+3)}\right\}$$

$$\frac{1}{p(p+2)(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{(p+2)}+\frac{C}{(p+3)}$$

$$1=A(p+2)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p+2)$$
$$1=Ap^2+5Ap+6A+Bp^2+3Bp+Cp^2+2Cp$$

$$p^2:\quad 0=A+B+C$$
$$p^1:\quad 0=5A+3B+2C$$
$$p^0:\quad 1=6A$$

$$A=\frac{1}{6};\quad B=-\frac{1}{2};\quad C=\frac{1}{3}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{6}}{p}-\frac{\frac{1}{2}}{(p+2)}+\frac{\frac{1}{3}}{(p+3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{6}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)}+\frac{1}{3}\frac{1}{(p+3)}\right\}$$

$$h(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}$$

Příklad:

Určete impulsní a přechodovou funkci systému, který je popsán diferenciální rovnicí:

$$y'''(t)+7y''(t)+16y'(t)+12y(t)=u'(t)+3u(t)$$
$$p^3Y(p)+7p^2Y(p)+16pY(p)+12Y(p)=pU(p)+3U(p)$$

$$\mathrm{G(p)}=\frac{p+3}{p^3+7p^2+16p+12}=\frac{p+3}{(p+3)(p+2)^2}=\frac{1}{(p+2)^2}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\cdot 1\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\cdot 1\right\}$$

$$\underline{g(t)=te^{-2t}}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{G(p)\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+2)^2}\right\}$$

$$\frac{1}{p(p+2)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{(p+2)}+\frac{C}{(p+2)^2}$$

$$1=A(p+2)^2+Bp(p+2)+Cp$$
$$1=Ap^2+4Ap+4A+Bp^2+2Bp+Cp$$

$$p^2:\quad 0=A+B$$
$$p^1:\quad 0=4A+2B+C$$
$$p^0:\quad 1=4A$$

$$A=\frac{1}{4};\quad B=-\frac{1}{4};\quad C=-\frac{1}{2}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{p}-\frac{\frac{1}{4}}{(p+2)}-\frac{\frac{1}{2}}{(p+2)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\frac{1}{(p+2)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)^2}\right\}$$

$$\underline{h(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}}$$

Příklad:

Určete impulsní a přechodovou funkci systému, který je popsán diferenciální rovnicí:

$$2y''(t)+8y'(t)+8y(t)=u'(t)+4u(t)$$
$$2p^2Y(p)+8pY(p)+8Y(p)=pU(p)+4U(p)$$
$$Y(p)(2p^2+8p+8)=U(p)(p+4)$$

$$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{(p+4)}{(2p^2+8p+8)}=\frac{(p+4)}{2(p^2+4p+4)}=\frac{p+4}{2(p+2)^2}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\cdot U(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2(p+2)^2}\cdot 1\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p+4}{(p+2)^2}\right)=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{(p+2)^2}$$

$$p+4=A(p+2)+B$$

$$p_1=-2\Rightarrow 2=B\Rightarrow B=2$$
$$p_2=-1\Rightarrow 3=A+B\Rightarrow A=1$$

$$A=1;\quad B=2;$$

$$g(t)=L^{-1}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2}\right\}$$

$$\underline{g(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-2\cdot t}+2t\cdot e^{-2\cdot t}\right)=\frac{1}{2}e^{-2\cdot t}+t\cdot e^{-2\cdot t}}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{G(p)\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2(p+2)^2}\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2p(p+2)^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p+4}{p(p+2)^2}\right)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{(p+2)^2}$$

$$p+4=A(p+2)^2+B(p+2)p+Cp$$

$$p^2:\ \ 0=A+B \qquad\Rightarrow B=-1$$
$$p^1:\ \ 1=2\cdot A+2\cdot B+C \quad\Rightarrow C=1$$
$$p^0:\ \ 4=4\cdot A \qquad\Rightarrow A=1$$

$$A=1;\quad B=-1;\quad C=1$$

$$h(t)=L^{-1}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}+\frac{-1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}\right\}$$

$$\underline{h(t)=\frac{1}{2}\left(1-1e^{-2\cdot t}+1\cdot t\cdot e^{-2\cdot t}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot t\cdot e^{-2\cdot t}}$$

POUŽITÁ LITERATURA

[1] Švarc, I. AUTOMATIZACE Automatické řízení . Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2002. ISBN 80-214-2087-1.

[2] Vítečková, Miluše. Slovníky L- a Z-transformace s řešenými příklady. Ostrava : Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava. Katedra automatizační techniky a řízení, 2005. ISBN 978-80-248-0851-2.

[3] Vítečková, M. a Víteček, A. Základy automatické regulace. Ostrava : VŠB-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA 17. listopadu 15/2172 Ostrava-poruba 708 33, 2008. ISBN978-80-248-1924-2.

[4] Franklin, G.F., Powell, J.D. a Emami-Naeini, A. Feedback control of dynamic systems. London : Pearson, 2009. ISBN 978-0-13-601.

[5] Žalman , M. a Kneppo, I. Systémy automatického riadenia. Trenčín : Trenčianská univerzita v Trenčíně, 2001. ISBN 80-88914-48-5.

[6] Heger, M., Tomis, L. a Balcová, J. ASŘ TP v hutích - výpočetní a laboratorní cvičení. Ostrava : VŠB v Ostravě, 1991. ISBN 80-7079-079-7.

[7] Voráček, R., Andrýsek, F. a Brýdl, Z. Automatizace a automatizační technika II. Praha 4 : Computer Press, 2000. ISBN 80-7226-247-5.