

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



ZÁKLADY AUTOMATIZACE TECHNOLOGICKÝCH PROCESŮ V TEORII

Matematický model soustavy

Ing. Romana Garzinová, Ph.D.
prof. Ing. Zora Jančíková, CSc.
Ing. Ondřej Zimný, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Romana Garzinová, Ph.D., prof. Ing. Zora Jančíková, CSc., Ing. Ondřej Zimný, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3044-5



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	MATEMATICKÝ MODEL SOUSTAVY	3
1.1	Vyjádření matematického popisu soustav	4
1.2	Popis lineární diferenciální rovnicí	4
1.3	Popis přenosem v Laplaceově transformaci	5
1.4	Statické a dynamické vlastnosti soustav	8
1.5	Definice vstupních signálů pro deterministické metody identifikace.....	10
1.5.1	Heavisideův jednotkový skok $\eta(t)$	10
1.5.2	Je definován vztahy:.....	10
1.5.3	Skok zrychlení $a(t)$	12
2	PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM	14
3	POUŽITÁ LITERATURA	15



1 MATEMATICKÝ MODEL SOUSTAVY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Vyjádření matematického popisu soustav.

Popis lineární diferenciální rovnicí.

Popis přenosem v Laplaceově transformaci.

Statické a dynamické vlastnosti soustav

Definice vstupních signálů pro deterministické metody identifikace.



MOTIVACE:

V předešlé kapitole jsme si vysvětlili důležitost procesu identifikace. Nyní se zaměříme na vhodné způsoby vyjádření matematických modelů, které v různé formě vystihují vlastnosti soustav. Pro jednoduché matematické výpočty a snadnou práci s modely je velmi podstatné pochopit princip Laplaceovy transformace (LT). Jedná se o matematický postup, který jednoduše upravuje složité diferenciální rovnice a nahrazuje je jednoduchými algebraickými.



CÍL:

Cílem kapitoly je přehledně vyjádřit možnosti matematických modelů, jako výsledky procesu identifikace.



1.1 VYJÁDŘENÍ MATEMATICKÉHO POPISU SOUSTAV

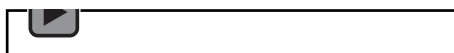
Na tomto místě se zaměříme na vyjádření popisu lineárních spojitých dynamických soustav.

Dynamické vlastnosti uvedených soustav lze popsat:

- lineární diferenciální rovnicí systému,
- přenosem systému v Laplaceově transformaci,
- přechodovou charakteristikou,
- impulsní charakteristikou,
- polohou pólů a nul přenosu systému,
- frekvenčním přenosem systému,
- frekvenční charakteristikou systému,
- odezvou systému na libovolný známý signál,
- stavovými rovnicemi systémů.



Audio 1.1



V dalším se zaměříme především na metody získání prvních čtyř uvedených druhů popisu.

1.2 POPIS LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICÍ

Jednou ze základních metod je popis systému lineární diferenciální rovnicí.

Obecný tvar popisu je:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (1)$$

kde a_i , b_j jsou konstantní koeficienty, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup systému.

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti plyne $m \leq n$. Řád diferenciální rovnice je roven řádu systému. Řešení rovnice je možno získat, máme-li určeny počáteční podmínky $y^{(n-1)}(0), \dots, y(0)$ a $u^{(m-1)}(0), \dots, u(0)$ a tvar vstupního signálu $u(t)$.

Častou formou zápisu je:

$$\sum_{i=1}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^m b_j u^{(j)}(t) \quad (2)$$

V systému s dopravním zpožděním

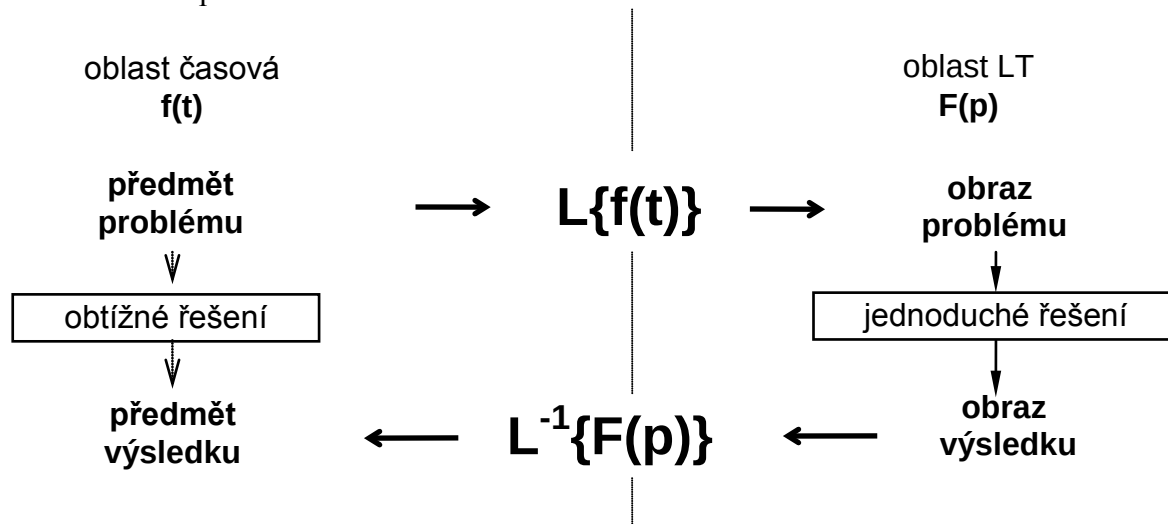


$$\sum_{i=1}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^m b_j u^{(j)}(t - T_d), \quad (3)$$

kde T_d je doba dopravního zpoždění.

1.3 POPIS PŘENOSEM V LAPLACEOVĚ TRANSFORMACI

Často v regulační technice, tedy i v popisu přenosových členů, užíváme tzv. *Laplaceovy transformace* (dále LT). Je to integrální transformace, která převádí matematické operace jako je derivace nebo integrace v časové oblasti na násobení nebo dělení operátorem transformace p . Použitím této transformace lze některé obtížně řešitelné úlohy v časové oblasti převést na jednoduché řešení v operátorové oblasti podle schématu znázorněného na obr. 1, kde je symbolem $L\{f(t)\}$ označena transformace funkce času, symbolem $L^{-1}\{F(p)\}$ pak zpětná transformace Laplaceova obrazu do časové oblasti.



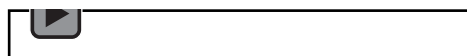
Obr. 1. Postup řešení při užití Laplaceovy transformace

Základní definiční integrál Laplaceovy transformace je:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (4)$$



Audio 1.2



Takto definovanou Laplaceovou transformací lze řešit problémy v časové oblasti počínaje časem $t = 0$. Chování systému před tímto časem, tedy jak se systém dostal do výchozího stavu, nelze takto definovanou transformací řešit. Tento stav je popsán počátečními podmínkami řešení.

Abychom nemuseli stále vypočítávat obraz podle definičního integrálu a pak provádět zpětný převod do časové oblasti, jsou zpracovány slovníky LT - stručný slovník LT je v příloze 1.

Při zápisu označujeme funkce v časové oblasti malými písmeny a říkáme jim *předměty*, funkce v operátorové oblasti označujeme stejnými velkými písmeny a říkáme jim *obrazy*. Výhody řešení užitím LT demonstrujeme na základních větách:



V2.1. Věta o obrazu derivace

Nechť $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ jsou spojité laplaceovsky transformovatelné funkce. Nechť $f^{(n)}(t)$ je po úsecích spojitá v intervalu $<0, \infty$). Pak je $f^{(n)}(t)$ laplaceovsky transformovatelná a platí

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0) \quad (5)$$

Symbolem $f^{(n-1)}(+0)$ označujeme derivace zprava. V uvedeném vztahu zahrnují vliv počátečních podmínek na řešení.

V2.2. Věta o obrazu integrálu

Nechť $f(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz $F(p)$. Pak i funkce

$\int_0^t f(t) dt = g(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce a platí:

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{p} F(p) \quad (6)$$

Laplaceova transformace umožňuje určit limity funkce $f(t)$, pokud tyto limity existují. LT ale existenci limit nepotvrzuje.

V2.3. Věta o počáteční hodnotě

Nechť $f(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz $F(p)$, nechť existuje konečná $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, pak

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (7)$$

V2.4. Věta o konečné hodnotě

Za analogických předpokladů platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (8)$$

V2.5. Věta o translaci vpravo

Nechť $f(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz $F(p)$. Pak i funkce $f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau)$, kde $\eta(t)$ je tzv. Heavisideův jednotkový skok (viz dále), je laplaceovsky transformovatelná funkce a platí:

$$f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau) = e^{-p\tau} \cdot F(p) \quad (9)$$



Základní vlastnosti Laplaceovy transformace lze shrnout do následující tabulky:

Vlastnost	Funkce ve tvaru originálu	Funkce ve tvaru obrazu
Linearita	$f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$	$F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$
Násobení konstantou	$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(p)$
Věta o podobnosti	$f(at)$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
Věta o posunutí vpravo	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
Derivace	$f^{(n)}(t)$	$p^n \cdot F(p) \quad *$
Integrace	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{p} \cdot F(p) \quad *$
Poznámky: a - konstanta, * - počáteční podmínky musí být nulové		

Tabulka 1. Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Diferenciální rovnici (1) můžeme při nulových počátečních podmínkách použitím věty o obrazu derivace V2.1 převést na *přenos soustavy (obrazový přenos)* - což je obraz diferenciální rovnice při nulových počátečních podmínkách.

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_0 Y(p) = b_m p^m U(p) + \dots + b_0 U(p) \quad (10)$$

$$Y(p)(a_n p^n + \dots + a_0) = U(p)(b_m p^m + \dots + b_0) \quad (11)$$

Z čehož obrazový přenos

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} \quad (12)$$



Základní rovnice přenosu

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad (13)$$

se často upravuje:

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0} p + \dots + \frac{b_m}{a_0} p^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{\beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^n} = \frac{\sum_{j=0}^m \beta_j p^j}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^i} \quad (14)$$

V praxi má přenos soustavy často tvar

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \dots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{K}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + \dots + T_n^n p^n} \quad (15)$$

kde K je zesílení soustavy – vystupující jako měřítko. Po vydělení rovnice zesílením K získáme další často užívaný tvar

$$G(p) = \frac{1}{s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \dots + s_n p^n} \quad (16)$$

Fourierovým operátorem $j\omega$ dostáváme přenos ve frekvenční oblasti, kde $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence. Tento tzv. *frekvenční přenos* je používán pro zkoumání vlastností soustav při formálním nahrazení Laplaceova operátoru p vstupních signálech o různých frekvencích. Je však nutno poznamenat, že podmínky aplikace Fourierovy a Laplaceovy transformace na funkci času se liší.

1.4 STATICKÉ A DYNAMICKÉ VLASTNOSTI SOUSTAV

Vlastnosti jakéhokoliv systému můžeme pozorovat za různých podmínek:

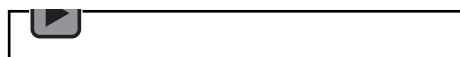
- v ustáleném stavu - pak hovoříme o *statických vlastnostech*,
- ve stavu neustáleném - pak hovoříme o *dynamických vlastnostech*.

Statické vlastnosti soustavy stavu se dají vyjádřit statickými charakteristikami, které jsou vlastně závislosti výstupní veličiny na vstupní veličině v ustáleném stavu.

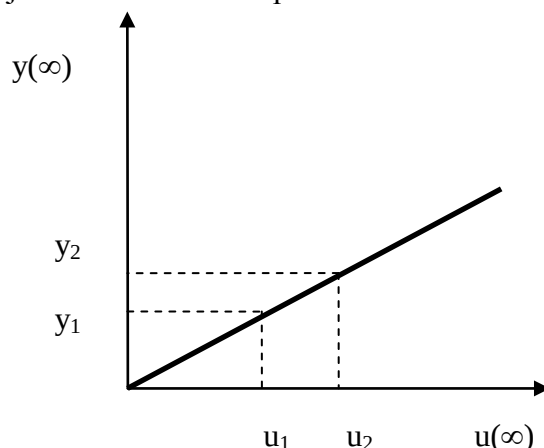
$$y = f(u) \quad (17)$$



Audio 1.3



U lineárních soustav předpokládáme tuto závislost lineární. Prakticky však bývá tato závislost nelineární a provádíme její linearizaci v okolí pracovního bodu dříve uvedenými metodami.



Obr. 2. Statická charakteristika

Nejjednodušším způsobem zjišťování této závislosti u dynamických soustav, kterými se nyní zabýváme, je metoda určování bod po bodu. Postupně nastavujeme hodnoty vstupní veličiny a měříme odpovídající hodnoty výstupní veličiny. Přitom dbáme, aby se neuplatnila dynamika systému. To zajistíme dodatečně odečítáním výstupní veličiny po určité době od změny vstupní veličiny, až se soustava dostane do ustáleného stavu.

V lineární diferenciální rovnici vyjadřuje tuto závislost poslední člen rovnice, protože v ustáleném stavu vymizí všechny změny v čase (derivace):

$$a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (18)$$

pro $t \rightarrow \infty$ (takto vyjadřujeme ustálený stav; pro různé systémy je čas potřebný k dosažení ustáleného stavu různý: 1 min, 1 h, atd.)

$$k = \frac{b_0}{a_0} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \quad (19)$$

Člen a_0 popisuje statické vlastnosti soustavy. Statickou charakteristikou pak bude přímka a její rovnice je:

$$y(\infty) = k u(\infty) \quad (20)$$

Směrnice přímky bude:

$$\operatorname{tg} \alpha = k = \frac{b_0}{a_0} \quad (21)$$

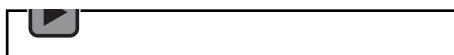
Na základě rovnice (20) můžeme dopředu určit, jaký bude výstup při daném vstupu v ustáleném stavu, ale rovnice nám nic neříká o tom, za jakou dobu tohoto výstupu dosáhneme. Nezískáme ještě úplný popis systému, nemůžeme jej ještě řídit.

Pro úplný popis systému musíme zjistit také dynamické vlastnosti systému, tedy závislost výstupní veličiny na čase.





Audio 1.4



Pro určení **dynamických vlastností soustav** zavádíme na vstup soustavy předem definované signály. Tyto signály jsou buď neperiodické nebo periodické. Podle těchto vstupních signálů dělíme deterministické metody na metody vyhodnocení přechodových, frekvenčních a impulsních charakteristik, a dále na metody, při kterých je vstupní signál ve tvaru obecné funkce času, splňuje však určité omezující předpoklady. Mezi nejčastěji používané neperiodické vstupní signály patří:

- Heavisideův jednotkový skok $\eta(t)$,
- Diracův jednotkový impuls $\delta(t)$,
- jednotkový skok rychlosti $\xi(t)$ resp. $v(t)$,
- jednotkový skok zrychlení $a(t)$ (užívaný méně často).

Mezi nejčastěji používané periodické signály patří:

- sinusový průběh,
- sled pravoúhlých impulsů,
- sled lichoběžníkových impulsů,
- sled trojúhelníkových impulsů.

Měření dynamických vlastností a zjišťování výstupních dynamických charakteristik využívají metody deterministické identifikace.

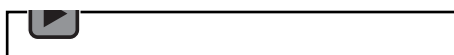
1.5 DEFINICE VSTUPNÍCH SIGNÁLŮ PRO DETERMINISTICKÉ METODY IDENTIFIKACE

Jedná se o experimentální metody identifikace, při kterých neuvažujeme působení náhodných veličin na objektech ani neuvažujeme nepřesnosti měření. Deterministické metody jsou jednoduché a názorné. Je-li měření na objektu provedeno pečlivě, dostaneme dobré výsledky. Hodí se především pro jednoparametrové soustavy. Pro víceparametrové soustavy se hodí tehdy, můžeme-li hodnoty nesledovaných veličin zanedbat nebo jejich vliv vyloučit (udržováním na konstantní hodnotě).

1.5.1 Heavisideův jednotkový skok $\eta(t)$



Audio 1.5

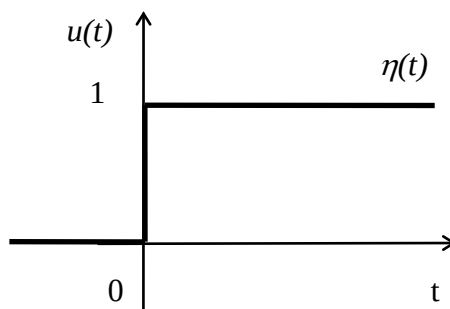


1.5.2 Je definován vztahy:

$$\eta(t) = 1 \text{ pro } t \geq 0$$

$$\eta(t) = 0 \text{ pro } t < 0$$





Obr. 3. Heavisideův jednotkový skok

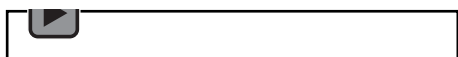
V Laplaceově transformaci $L\{\eta(t)\} = 1/p$.

V čase $t = 0$ se skokově změní hodnota signálu z nuly na jedničku.

Odezvu na Heavisideův jednotkový skok nazýváme *přechodová funkce*, její graf pak *přechodová charakteristika* soustavy a označujeme ji $h(t)$. Jednotlivé charakteristiky budou vyjádřeny v následné kapitole.



Audio 1.6



Diracův jednotkový impuls $\delta(t)$

Diracův impuls $\delta(t)$ je idealizovaná funkce fyzikálně nerealizovatelná. Lze ji charakterizovat vztahy:



Audio 1.7

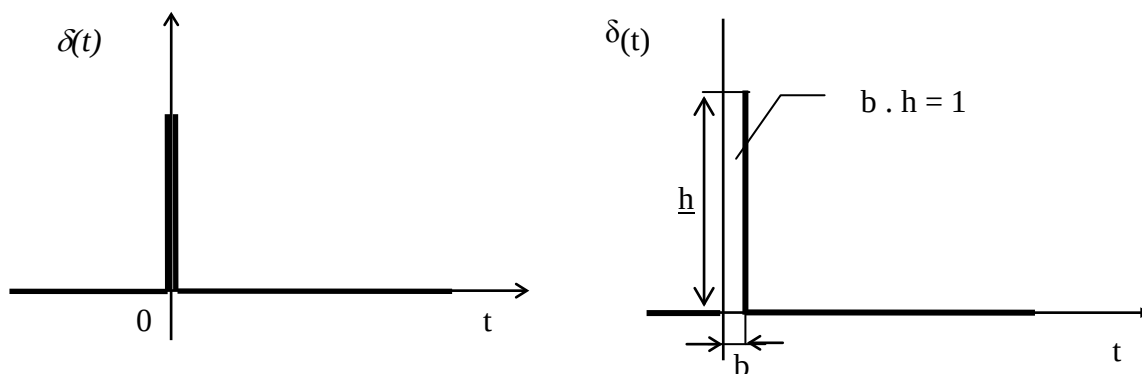


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 && \text{pro } t \neq 0 \\ \delta(t) &= \infty && \text{pro } t = 0. \end{aligned}$$

Představujeme si, že vzniká z impulsu o výšce h a šířce b . Plochu impulsu si zvolíme jednotkovou a při současném zmenšování šířky ($b \rightarrow 0$) zvětšujeme výšku ($h \rightarrow \infty$) tak, aby stále platilo

$$b \cdot h = 1 \quad (23)$$



Obr. 4. Diracův jednotkový impuls

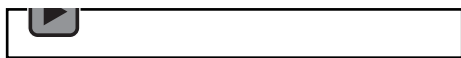


Laplaceův obraz $L\{\delta(t)\} = 1$.

Odezvou systému na vstupní signál ve tvaru Diracova impulsu je *impulsní funkce* a její grafické zobrazení pak *impulsní charakteristika* systému a označujeme je $g(t)$.



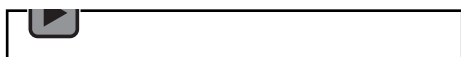
Audio 1.8



Diracův impuls je derivací Heavisideova jednotkového skoku a podobně je i impulsní charakteristika derivací přechodové charakteristiky.

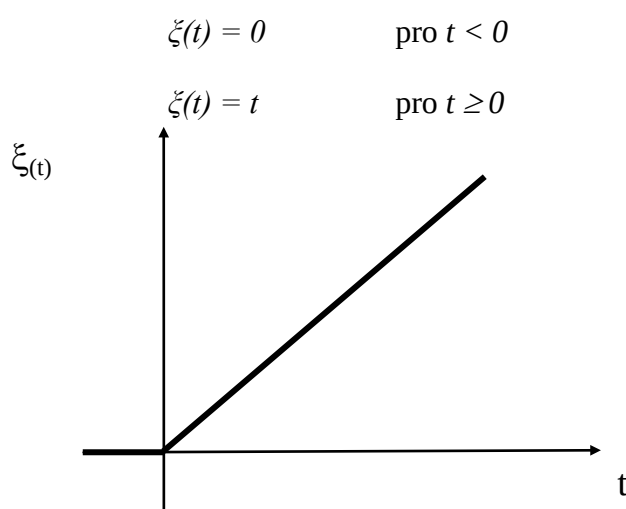


Audio 1.9



Skok rychlosti $\xi(t)$

Je definován vztahy:



Obr. 5 Skok rychlosti

Laplaceovým obrazem skoku rychlosti je:

$$L\{\xi(t)\} = \frac{1}{p^2} \quad (24)$$

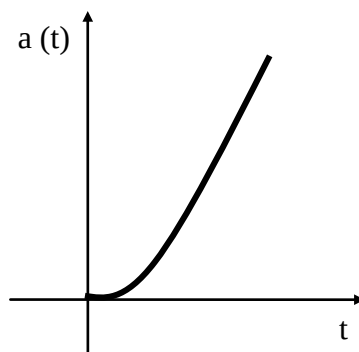
1.5.3 Skok zrychlení $a(t)$

Je definován vztahy:

$$a(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0$$

$$a(t) = \frac{1}{2} t^2 \quad \text{pro } t \geq 0$$





Obr. 6 Skok zrychlení

Laplaceovým obrazem skoku zrychlení je:

$$L\{a(t)\} = \frac{1}{p^3} \quad (25)$$

Vstupní funkce ve tvaru skoku rychlostí, jednotkového skoku a jednotkového impulsu si navzájem odpovídají podle vztahů:

$$\delta(t) = \eta'(t) = \xi''(t) \quad (26)$$

$$\eta(t) = \xi'(t) \quad (27)$$

Diracův impuls je derivací jednotkového skoku a druhou derivací skoku rychlosti; jednotkový skok je derivací skoku rychlosti.

Podobně lze hovořit i o vztahu mezi odezvami. Impulsní charakteristika $g(t)$ je derivací přechodové charakteristiky $h(t)$:

$$g(t) = h'(t) \quad (28)$$

Podobně je přechodová charakteristika derivací odezvy na skok rychlosti. Při praktické realizaci je nutno počítat s tím, že průběhy vstupních signálů nebudou ideální, ale dojde k jejich zkreslení.



2 PŘEDNÁŠKOVÝ TEXT SE VZTAHUJE K TĚMTO OTÁZKÁM

- Vyjádření lineární diferenciální rovnice n -tého řádu.
- Přenos systému v obrazovém tvaru pomocí LT.
- Statické vlastnosti a statická charakteristika soustavy.
- Dynamické vlastnosti a dynamické charakteristiky soustavy - přechodová a impulsní charakteristika.
- Vstupní signály pro deterministickou identifikaci – Diracův jednotkový impuls, Heavisideův jednotkový skok.



3 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JANČÍKOVÁ, Z. *Teorie systémů*. Studijní opory. VŠB-TU Ostrava, 2012.
- [2] <http://www.person.vsb.cz/archivcd/FMMI/TS/index.htm>
- [3] BALÁTĚ, J. *Automatické řízení*. 2. přeprac. vyd., Praha: BEN, 2004. ISBN 80-7300-148-9.
- [4] HANUŠ, B., BALDA, M. *Základy technické kybernetiky*. 1. vyd., Liberec: Vysoká škola strojní a textilní, 1980.
- [5] KOTEK, Z., VYSOKÝ, P., ZDRÁHAL, Z. *Kybernetika*. Praha: SNTL, 1990.
- [6] TOMIS, L., HEGER, M., BALCOVÁ, J., KADLČÍK, I. *ASŘ TP v hutích - výpočetní a laboratorní cvičení*. 1. vyd., Ostrava: Vysoká škola báňská, 1991. ISBN 80-7078-079-7.
- [7] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace*. 1. vyd., Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1068-9.
- [8] VORÁČEK, R. *Automatizace a automatizační technika*. 2, Automatické řízení. 1. vyd., Brno: CP Books, 2005. ISBN 80-251-0796-5.

