

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



ELEKTROTECHNIKA - TEORIE

Jednofázové obvody

Ing. Jan Vaňuš Ph.D.

Ing. Roman Hrbáč Ph.D.

Ing. Tomáš Mlčák Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Jan Vaňuš Ph.D., Ing. Roman Hrbáč Ph.D., Ing. Tomáš Mlčák Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3049-0



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

3	JEDNOFÁZOVÉ OBVODY	3
3.1	ÚVOD.....	5
3.2	Symbolicko - komplexní metoda, fázory.....	8
3.3	Výkon střídavého proudu.....	10
3.3.1	Činný výkon	11
3.3.2	Jalový výkon	11
3.3.3	Zdánlivý výkon	12
3.4	Pasivní dvojpolý v obvodu střídavého (harmonického) proudu.....	12
3.4.1	Rezistor.....	12
3.4.2	Ideální cívka (induktor)	13
3.4.3	Ideální kondenzátor (kapacitor)	14
3.5	Sériové a paralelní řazení pasivních prvků	15
3.5.1	Sériové řazení prvků	15
3.5.2	Paralelní řazení prvků	16
3.5.3	Sériově paralelní řazení prvků	17
3.6	Rezonance	18
3.6.1	Sériový rezonanční obvod.....	18
3.6.2	Paralelní rezonanční obvod	19
3.7	Kompenzace účinníku.....	20
3.8	Neharmonické časové průběhy obvodových veličin	23
3.9	Literatura.....	25



3 JEDNOFÁZOVÉ OBVODY



OBSAH KAPITOLY:

Úvod

Základní pojmy z teorie střídavého proudu

Symbolicko - komplexní metoda, fázory

Výkon střídavého proudu

Pasivní dvojpóly v obvodu střídavého proudu

Sériové a paralelní řazení pasivních prvků

Rezonance

Kompenzace účinníku

Neharmonické průběhy

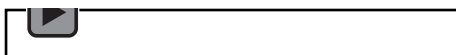


MOTIVACE:

Ke sledování televize, k práci na počítači nebo k večernímu čtení při lampičce je potřeba zdroj jednofázového napětí 230V. Tyto spotřebiče lze zapojit například připojením pohyblivého přívodu do zásuvky 230V. Každý z těchto zmíněných spotřebičů má své specifické parametry jako je např. jmenovitý činný, jalový nebo zdánlivý výkon, jmenovitý proud, jmenovitá frekvence, popřípadě charakter zátěže. Bližší vysvětlení uvedených termínů s popisem chování jednotlivých prvků v jednofázové soustavě je vysvětlen v následující přednášce o jednofázových střídavých obvodech.



Audio 3.1 Motivace



CÍL:

Perioda, amplituda, střední a efektivní hodnota střídavého proudu a napětí, kapacitní C , induktivní L a odporový R charakter zátěže, jejich vlastnosti v obvodech napájených zdrojem jednofázového střídavého napětí, symbolicko - komplexní metoda výpočtu jednofázových obvodů, fázory, vektorový diagram, paralelní a sériové řazení prvků R , L , C .
činný, jalový a zdánlivý výkon,



rezonance,
kompenzace účinníku,
neharmonické průběhy napětí a proudu.



3.1 ÚVOD

Doposud jsme se zabývali obvody, kde obvodové veličiny (proud a napětí) měly v ustáleném stavu konstantní, časově nezávislé hodnoty. Kromě těchto veličin se lze velmi často v praxi setkat s veličinami, které se s časem mění - veličiny střídavé. Obvody ve kterých se tyto veličiny vyskytují, se označují jako obvody střídavé.

Výklad základních pojmů, pro střídavý proud se vztahuje na jakoukoliv střídavou veličinu (tedy např. na napětí). Střídavý elektrický proud se může měnit v elektrickém obvodu v pravidelných nebo i nepravidelných časových intervalech v závislosti na změnách napětí napájecího zdroje včetně jeho polarity).

Důležité jsou zejména periodické průběhy střídavého harmonického proudu (sinusového). Jejich časový průběh se opakuje v pravidelných intervalech - periodách (cyklech, kmitech) - obr.1. Délka periody se nazývá doba kmitu T , její závislost je dána kmitočtem sítě f (rovnice 1).

$$T = \frac{1}{f} \text{ (s; Hz)}. \quad (1)$$

Jednotkou kmitočtu je hertz (Hz), který má rozměr (s^{-1}). Jedna perioda proudu se také nazývá vlna střídavého proudu. Pro okamžitou hodnotu (značí se malým písmenem) periodického proudu platí vztah 2.

$$i(t) = i(t+T) = i(t+kT). \quad (2)$$

Nejvyšší okamžitá hodnota, které periodický proud dosahuje, se nazývá maximální nebo vrcholová hodnota, amplituda, značí se velkým písmenem s indexem m, nebo max, např. I_m , $I_{\max}$.

Pro okamžitou hodnotu sinusového proudu platí vztah

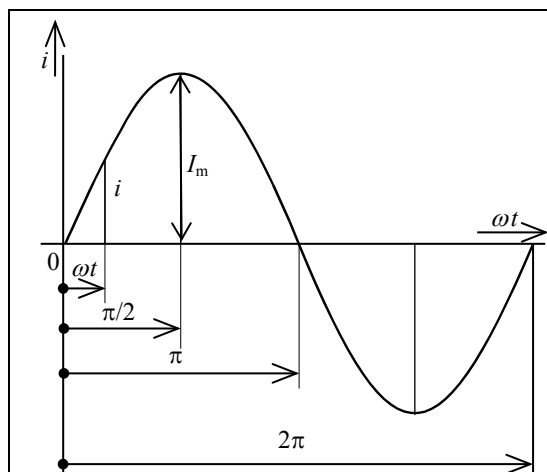
$$i(t) = I_m \sin(\omega t), \quad (3)$$

kde ω se nazývá úhlová rychlost.

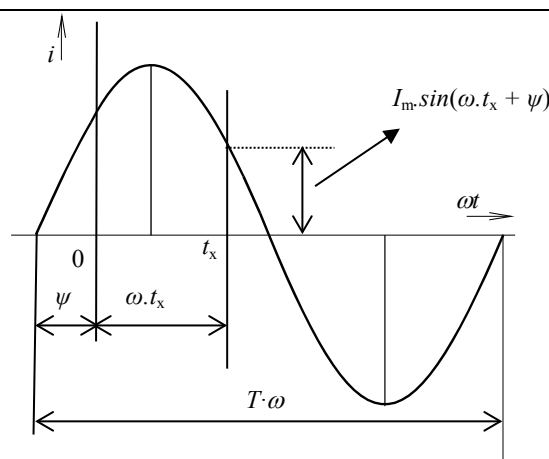
$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Harmonický průběh nemusí obecně začínat z nulové hodnoty, je to dáno volbou počátku časové osy. Průběh má potom v čase $t=0$ počáteční fázový úhel ψ , který může být kladný tak i záporný.





Obr. 1 Střídavý proud sinusového průběhu bez posunutého počátku.

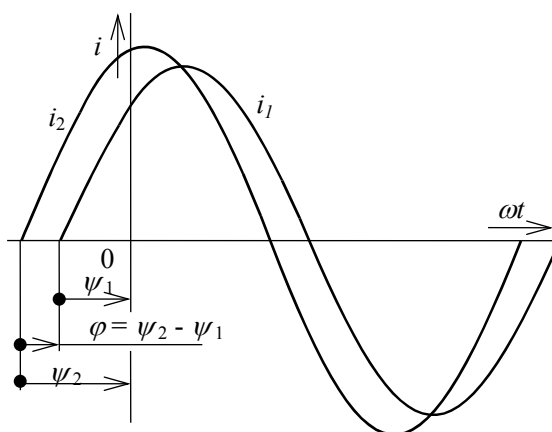


Obr. 2 Střídavý proud sinusového průběhu s posunutým počátkem.

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (5)$$

Harmonické průběhy dvou veličin téhož kmitočtu mohou být vůči sobě vzájemně posunuty o úhel φ , kterému říkáme fázový posuv, pro který platí vztah

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1 \quad (6)$$



Obr. 3 Dva harmonické proudy posunuté o úhel φ .

Přitom může jít o různé veličiny, například o proud a napětí. Pro fázový posuv φ a tato situace je znázorněna na obr. 3.

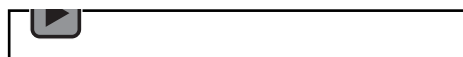
Pokud druhý průběh před prvním předbíhá, je úhel φ kladný, pokud se zpožďuje, je záporný. Pozor, v praxi je často velmi důležité dbát na znaménko fázového posuvu. Poněkud zvláštní význam má situace, kdy například dva proudy mají nulový fázový posuv, říkáme, že jsou ve fázi a jestliže mají posuv rovný π , říkáme, že jsou v protifázi.

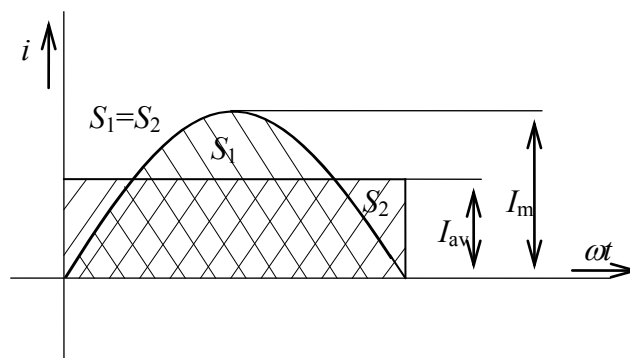
Mezi základní pojmy ve střídavých obvodech patří střední a efektivní hodnota veličin.

Střední hodnota odpovídá velikosti stejnosměrného proudu, který přenesl za jednotku času stejný náboj, jako daný střídavý proud. Je to vlastně výška obdélníku o stejné ploše, jako je plocha mezi průběhem proudu a nulovou osou, jak je uvedeno na obrázku 4.



Audio 3.2 Střední hodnota





Obr. 4 Střední hodnota střídavého proudu.

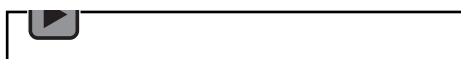
Pro harmonický proud ji počítáme pro jednu půlperiodu, protože obě půlperiody jsou stejné, ale s opačným znaménkem a za celou periodu by byla střední hodnota nulová. (Pro jiné průběhy kde není střední hodnota za celou periodu nulová, ji počítáme za celou periodu a udává nám vlastně stejnosměrnou složku veličiny.) Střední hodnota se obvykle značí velkým písmenem s indexem av (average), např. I_{av} . Pro střední hodnotu harmonického průběhu platí vztah 7.

$$I_{av} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i(t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \quad (7)$$

Efektivní hodnota střídavého proudu charakterizuje výkon proudu. Značí se velkým písmenem bez indexu, např. I a je to **nejběžněji udávaná hodnota střídavého proudu a napětí** (např. hodnota napětí v naší síti 230 V je právě efektivní hodnota tohoto napětí), rovněž většina měřicích přístrojů měří efektivní hodnoty napětí a proudů. Efektivní hodnota je velikost stejnosměrného proudu, který by při průchodu rezistorem vykonal za jednotku času stejnou práci (vyvinul teplo) jako daný průběh střídavého proudu.



Audio 3.3 Efektivní hodnota



Při odvození efektivní hodnoty se vychází z dříve uvedeného vztahu $p=R \cdot i^2$. Dosazením do rovnosti práci stejnosměrného proudu velikosti I a střídavého proudu i za dobu jedné periody, (za práci W dosazujeme integrál z výkonu) dostaneme vztah:

$$\int_0^T R \cdot I^2 dt = \int_0^T R \cdot i^2 dt \text{ z něhož efektivní hodnota } I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}. \quad (8)$$

Jestliže za i dosadíme rovnici harmonického proudu, vyjde nám jako výsledek vztah 9.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (9)$$

Poměr I_m/I se nazývá vrcholový činitel k_v , pro harmonické průběhy má hodnotu právě $\sqrt{2}$.



3.2 SYMBOLICKO - KOMPLEXNÍ METODA, FÁZORY

Pro zjednodušení matematického popisu a řešení střídavých obvodů je výhodné vyjadřovat obvodové veličiny, tedy proudy a napětí pomocí fázorů.

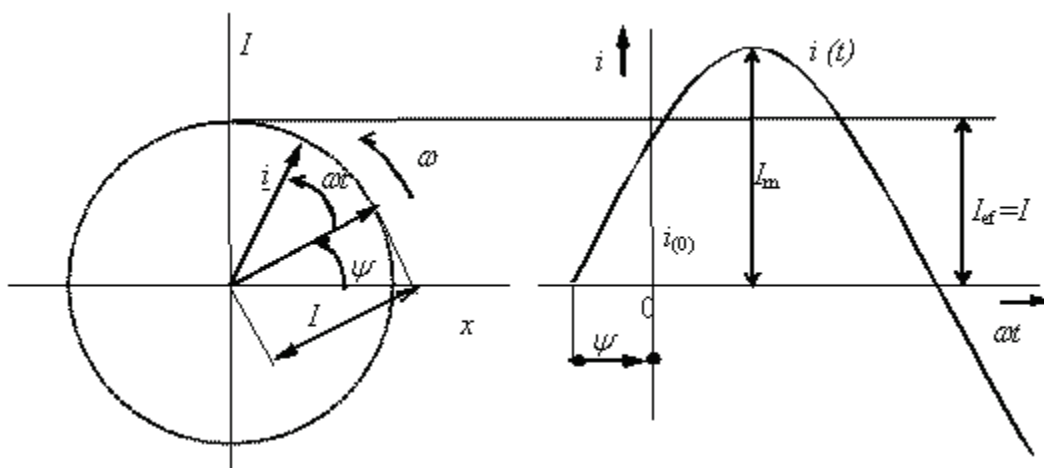
Fázorem rozumíme znázornění veličiny komplexní veličinou, jejíž argument se rovná počátečnímu fázovému úhlu a jejíž absolutní hodnota se rovná efektivní hodnotě dané veličiny.



Audio 3.4 Fázor



Příklad uvedeme opět pro proud. Fázor je otáčející se úsečka (vzhledem připomíná vektor), umístěný do počátku kartézského souřadnicového systému (nebo např. do komplexní Gaussovy roviny). Jeho velikost je rovna efektivní hodnotě proudu a otáčí se proti směru otáčení hodinových ručiček úhlovou rychlostí ω , která je totožná s úhlovou rychlostí proudu. Přitom v čase nula je pootočen o počáteční fázový úhel ψ . Průmět koncového bodu fázoru do svislé osy násobený přepočítacím koeficientem rovným $\sqrt{2}$ nám potom v každém okamžiku udává okamžitou hodnotu proudu. Jak ukázáno na obrázku 5, jedna vlna proudu vznikne otočením fázoru kolem dokola, o 2π radiánů (360°). (Sinusovka vlastně vzniká časovým rozvojem otáčivého pohybu.) Takový otáčející se fázor označujeme podtrženým malým písmenem, např. $\underline{i}$.



Obr. 5 Konstrukce časového průběhu proudu pomocí fázoru.

Při kladném úhlu ψ je fázor na počátku otočen v kladném směru otáčení, při záporném ψ naopak.

Otáčení fázoru ale uvažujeme, pouze hledáme-li okamžitou hodnotu veličiny. Jinak vystačíme s fázory zastavenými v jejich počáteční poloze (při $t'=0$), protože harmonická veličina je jednoznačně dána svou amplitudou a počátečním úhlem. Takovýto zastavený fázor už není funkcí času, proto ho značíme velkým písmenem.

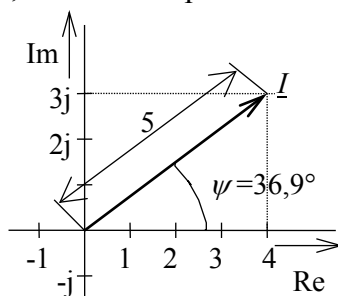
Fázor může být reprezentován komplexním číslem, což nám umožní provádět s ním poměrně snadno veškeré potřebné matematické operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení).

Způsobů označení fázoru, se kterými se můžete setkat v literatuře je několik, buďto tučně $\mathbf{I}$, $\dot{I}$, $\hat{I}$, my se přidržíme označení s podtržením $\underline{I}$.



Dále existuje několik způsobů jak fázor zapsat:

- **Složkový tvar.** Příklad fázoru je na obr. 6 a jeho zápis ve složkovém tvaru by byl $\underline{I} = (4+j3) \text{ A}$. (Komplexní číslo píšeme do závorky, protože jednotka patří k oběma jeho složkám.)
- **Verzorový tvar.** Používá se převážně v elektrotechnice, $\underline{I} = I \angle \psi$, kde I je efektivní hodnota proudu a ψ je počáteční fázový úhel ve stupních, případně v radiánech. Fázor z obrázku by se v tomto případě zapsal $\underline{I} = 5 \text{ A} \angle 36,9^\circ$. (Jednotka se píše hned za hodnotu proudu, protože fázový úhel ψ už nemá rozměr proudu.)
- Třetím tvarem je **exponenciální (Eulerův) tvar**, známý též z matematiky. $\underline{I} = I \cdot e^{j\psi}$, kde e je základ přirozených logaritmů. V exponenciálním tvaru bychom měli zapisovat úhel v radiánech, nikoli ve stupních.



Obr. 6 Příklad fázoru v komplexní rovině.

Dále je opakování základních matematických operací s komplexními čísly (tato látka by již měla být studentům známá z matematiky).

Při výpočtech budeme používat pouze složkový a verzorový tvar komplexních čísel. V principu jdou všechny potřebné matematické operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení a vytvoření komplexně sdruženého čísla) provádět ve složkovém tvaru, ale někdy je výhodnější používat tvar verzorový. Proto si objasníme převod mezi těmito tvary:

- **Ze složkového tvaru na verzorový.**

$$\underline{I} = x + jy = I \angle \psi,$$

kde absolutní hodnota proudu I a počáteční fázový úhel se spočítají dle vztahů

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Pozor, jestliže je reálná složka fázoru x záporná, je nutné k výslednému úhlu přičíst 180° , jestliže je reálná složka nulová, vztah sice nedokážeme vyčíslit, ale limitním řešením bychom dostali $\psi = +90^\circ$ ($y > 1$) nebo -90° ($y < 1$).

- **Z verzorového tvaru na složkový.**

$$\underline{I} = I \angle \psi = x + jy.$$

Složky x a y vypočítáme podle vztahu 11.

$$x = I \cos(\psi),$$



$$y = I \sin(\psi). \quad (11)$$

Nyní už k samotným matematickým operacím.

- **Sčítání a odčítání.** K těmto operacím používáme složkový tvar komplexního čísla, provádí se to tak, že sčítáme (odečítáme) zvlášť reálnou a zvlášť imaginární složku.

Například součet dvou proudů, které jsou:

$$\underline{I}_1 = x_1 + j y_1; \quad \underline{I}_2 = x_2 + j y_2,$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2).$$

- **Násobení** se provádí ve verzorovém tvaru, a to tak, že absolutní hodnoty dvou fázorů se vynásobí, a jejich fázové úhly se sečtou. Vynásobení předchozích fázorů by vypadalo:

$$\underline{I}_1 = I_1 \angle \psi_1; \quad \underline{I}_2 = I_2 \angle \psi_2,$$

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2 = I_1 I_2 \angle (\psi_1 + \psi_2).$$

- **Dělení** se provádí opět ve verzorovém tvaru, absolutní hodnoty fázorů se vydělí a úhly se odečtou.

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} \angle \psi_1 - \psi_2.$$

Pomocí těchto operací můžeme provádět všechny výpočty při řešení střídavých obvodů analogicky jako u stejnosměrných, s tím rozdílem, že všechny veličiny budou fázory (komplexní čísla).

3.3 VÝKON STŘÍDAVÉHO PROUDU

Střídavý proud i napětí mění periodicky svůj směr a velikost. Pro okamžitou hodnotu výkonu platí vztah $p = u \cdot i$.

Proto se bude v čase periodicky měnit i výkon v obvodu.

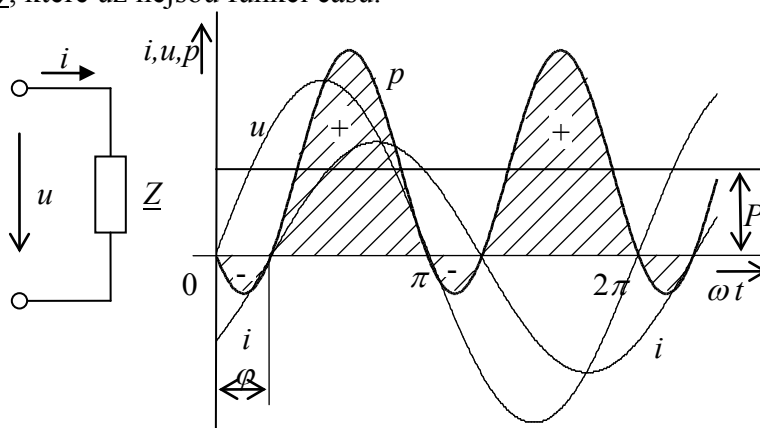
Grafický průběh výkonu na obecné zátěži, kde harmonické napětí a proud mají vzájemný fázový posun φ je na obrázku 7.

Jak je vidět, okamžitý výkon má také harmonický průběh, ale dvojnásobný kmitočet, oproti kmitočtu napětí a proudu a má určitou střední hodnotu. Záporné znaménko výkonu znamená, že v této chvíli zátěž vrací energii zpátky do zdroje. Dosadíme-li si do vztahu pro výkon za napětí a proud harmonické průběhy, dostaneme vztah 12

$$p = \sqrt{2}U \cdot \sin(\omega t) \cdot \sqrt{2}I \cdot \sin(\omega t + \varphi) = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi). \quad (12)$$



Abychom mohli výkon popsat konstantní hodnotou a ne časovým průběhem, zavádíme (podobně jako jsme pro proud a napětí zavedli efektivní hodnoty) tři druhy výkonu, činný, jalový, a zdánlivý, které už nejsou funkcí času.



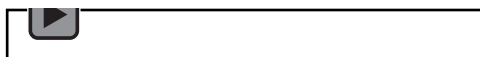
Obr. 7 Napětí, proud a výkon na obecné zátěži.

3.3.1 Činný výkon

Je to střední hodnota z průběhu výkonu. Tento výkon se ve spotřebiči přeměňuje na jiný druh energie, koná užitečnou práci, odtud název činný, označuje se písmenem P a jeho jednotkou je watt (W). Vyjádříme-li si ze vztahu 12 střední hodnotu výkonu, dostaneme pro činný výkon vztah:



Audio 3.5 Činný výkon



$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (13)$$

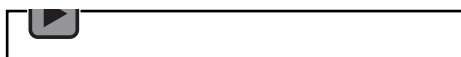
kde $\cos \varphi$ nazýváme účinník (v elektrotechnice je důležitá veličina).

3.3.2 Jalový výkon

Část výkonu, která se v určitých okamžicích vrací do zdroje, nazýváme jalovým výkonem. Označuje se Q , jiné možné označení podle normy je P_q a jeho jednotkou je var (ze slov voltampér reaktanční, protože jalový výkon se realizuje na reaktanci). Platí pro něj vztah:



Audio 3.6 Jalový výkon

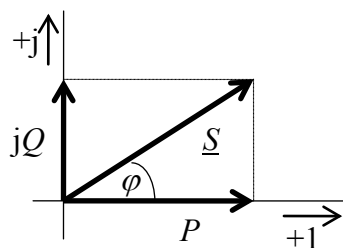


$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \quad (14)$$

Tento výkon nám nekoná žádnou užitečnou práci, ale je nutný pro funkci spotřebičů (k vytvoření elektrického nebo magnetického pole).



3.3.3 Zdánlivý výkon



Obr. 8 Fázorový diagram výkonů.

Zdánlivý výkon určitým způsobem shrnuje činný a jalový výkon. Značíme ho S jiné možné označení je P_S a jeho jednotkou je voltampér ($V \cdot A$). Pro zdánlivý výkon platí:



Audio 3.7 Zdánlivý výkon

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (15)$$

Tento výkon nám udává zatížení elektrických zdrojů, např. transformátorů.

Činný, jalový a zdánlivý výkon můžeme tedy znázornit pomocí fázorů, přičemž činný a jalový mají vzájemný fázový posun $\pi/2$ a zdánlivý je jejich součtem. Tuto situaci znázorňuje fázorový diagram výkonů na obr. 8.

3.4 PASIVNÍ DVOJPÓLY V OBVODU STŘÍDAVÉHO (HARMONICKÉHO) PROUDU

V této kapitole se budeme zabývat chováním ideálních pasivních prvků (rezistoru, induktoru a kapacitoru) v obvodech harmonického proudu. Pokud bychom chtěli uvažovat reálné prvky, museli bychom je nahradit takovouto kombinací několika ideálních prvků (viz. kapitola 6).

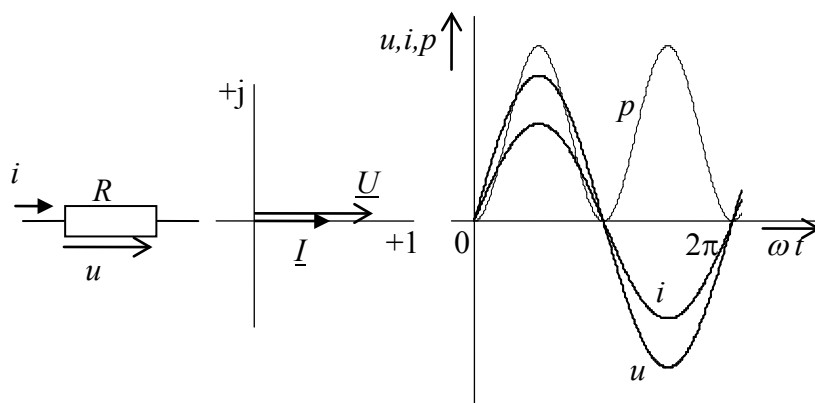
3.4.1 Rezistor

Mezi okamžitou hodnotou proudu a napětí na rezistoru platí vztah Ohmův zákon $u = R \cdot i$. To znamená, že velikost proudu je v každém okamžiku přímo úměrná velikosti napětí. Proto platí Ohmův zákon i pro efektivní hodnoty proudu a napětí a tím i pro fázory proudu a napětí na rezistoru.

$$I = U/R. \quad (16)$$

$$\underline{I} = \underline{U}/R. \quad (17)$$





Obr. 9 Časový průběh napětí, proudu a výkonu na rezistoru a fázorový diagram.

Mezi napětím a proudem není žádný fázový posuv, $\varphi=0$, $\cos(\varphi)=1$, $\sin(\varphi)=0$, jak je také vidět na obrázku 11, proto ze vztahu 13 plyne, že činný výkon na rezistoru je:

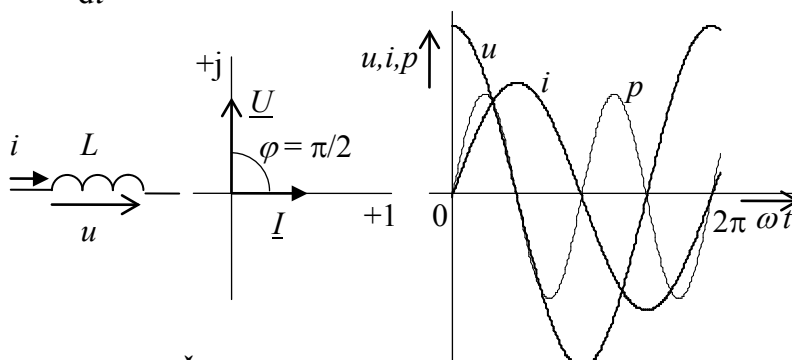
$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (18)$$

Kde U a I jsou efektivní hodnoty. Ze vztahu 14 je jasné, že se na rezistoru nevzniká žádný jalový výkon.

3.4.2 Ideální cívka (induktor)

Pro okamžité hodnoty napětí a proudu na ideální cívce platí vztah $u=L(di/dt)$, když za proud dosadíme vztah 5 pro harmonický proud podle, vyjde nám pro napětí vztah 19:

$$u = L \frac{di}{dt} = L \frac{d I_m \cdot \sin(\omega t + \psi)}{dt} = L \cdot I_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \psi) = I_m \cdot X_L \cdot \sin(\omega t + \psi + \pi/2) \quad (19)$$



Obr. 10 Časový průběh napětí, proudu a výkonu na cívce a fázorový diagram.

Kde X_L je takzvaná induktivní reaktance, její jednotkou je Ohm (Ω) a je to konstanta úměrnosti mezi velikostí napětí a proudu na cívce. Převrácená hodnota reaktance se nazývá (induktivní) susceptance $B_L=1/X_L$.

$$X_L = \omega \cdot L \quad (20)$$

Ze vztahu 3.19 je vidět, že napětí se předbíhá před proudem o $\pi/2$ (90°), $\varphi = \pi/2$. Napíšeme-li Ohmův zákon pro induktor, vyjde nám:



$$U = X_L \cdot I = \omega \cdot L \cdot I$$

$$I = \frac{U}{X_L} \quad (21)$$

Protože mezi napětím a proudem na induktoru je fázový posun $\varphi = \pi/2$, realizuje se na induktoru pouze jalový výkon. Jalovému výkonu na induktoru přisuzujeme kladné znaménko (u kapacitoru to bude naopak. Průběhy napětí a proudu na ideální cívce a jejich fázorový diagram jsou na obr. 10.

Stručně řečeno, cívka se chová vůči proudu jako setrvačný člen, (akumuluje energii v podobě proudu), proto se průběh proudu opoždí za průběhem napětí.

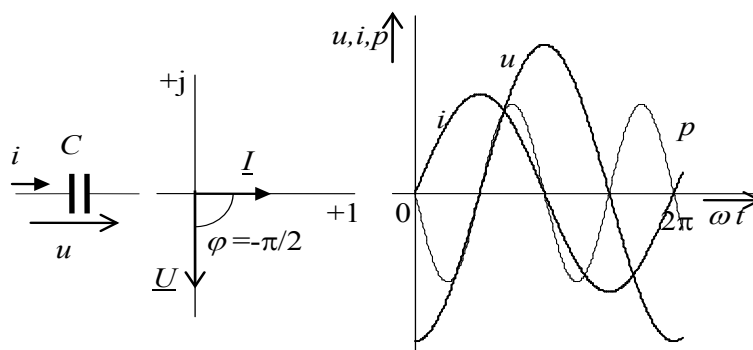
3.4.3 Ideální kondenzátor (kapacitor)

Mezi napětím a proudem na ideálním kondenzátoru platí vztah $u = \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt$. Když si z tohoto vztahu vyjádříme $\underline{U}$ a dosadíme harmonický průběh proudu, vyjde nám pro napětí řešení:

$$u = \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt = \frac{1}{C} \cdot \int I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) dt = \frac{I_m}{\omega \cdot C} \cdot -\cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{B_C} \cdot \sin(\omega t + \psi - \pi/2), \quad (22)$$

kde B_C je kapacitní susceptance, jednotkou je siemens, ale častěji se používá převrácená hodnota susceptance - kapacitní reaktance X_C , jednotkou je ohm (Ω).

$$X_C = \frac{1}{B_C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (23)$$



Obr. 11 Časový průběh napětí, proudu a výkonu na kondenzátoru a fázorový diagram.

Mezi napětím a proudem je opět fázový posun $\pi/2$, ale v opačném směru než u cívky, napětí se zpožďuje za proudem, $\varphi = -\pi/2$. Časový průběh a fázorový diagram napětí a proudu na kondenzátoru nám ukazuje obrázek 11.

Podobně jako u cívky můžeme i pro kondenzátor napsat Ohmův zákon pro efektivní hodnoty proudu a napětí:

$$U = X_C \cdot I = X_C \cdot I \quad (24)$$

Analogicky s cívkou se také na kondenzátoru realizuje pouze jalový výkon, kterému ovšem přisuzujeme tentokrát záporné znaménko. To znamená, že jalový výkony kondenzátoru a



cívky se mohou vzájemně odečítat. Toho se ve skutečnosti také využívá (kompenzace účinníku).

3.5 SÉRIOVÉ A PARALELNÍ ŘAZENÍ PASIVNÍCH PRVKŮ

V praxi se ale v elektrických obvodech setkáváme s reálnými prvky, které nemají jen jednu požadovanou vlastnost, ale navíc mají i nežádoucí parazitní vlastnosti. Např. reálná cívka má indukčnost a odpor.

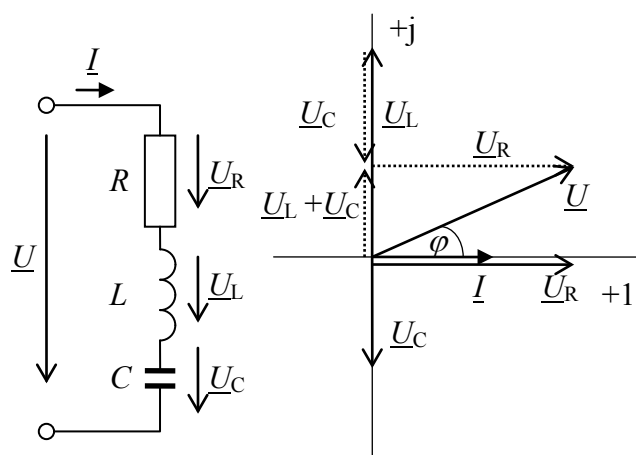
Náhradní schéma reálných prvků lze vytvořit z ideálních prvků zapojených sériově nebo paralelně. V praxi se také používají obvody, ve kterých jsou různě zkombinovány prvky R , L a C .

Abychom mohli vyřešit poměr mezi napětím a proudem u libovolného obvodu, zavedeme si pojem *impedance* a *admittance*. Impedance je poměr mezi napětím a proudem, je to určitá analogie odporu, zahrnuje v sobě jak odpory R , tak i reaktance X . Impedance může být vyjádřena jako reálné číslo, nebo jako komplexní číslo. Pokud ji vyjádříme komplexním číslem, značíme ji stejně jako fázor (i když to z fyzikální podstaty není fázor, neotáčí se v čase).

Impedanci značíme písmenem Z , její jednotkou je Ohm (Ω). Komplexní impedanci značíme $\underline{Z}$.

Převrácenou hodnotou impedance je admittance, je to opět určitá analogie vodivosti, označuje se Y , případně $\underline{Y}$ a její jednotkou je Siemens (S).

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \text{nebo} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (25)$$



Obr. 12 Sériové řazení prvků R , L , C a jejich fázorový diagram.

3.5.1 Sériové řazení prvků

Všemi prvky prochází **stejný proud** $\underline{I}$, a celkové napětí je rovno součtu napětí na jednotlivých prvcích. Na obrázku 12 máme sériové řazení rezistoru, kapacitoru a indukčnosti. Fázorový diagram nám znázorňuje napětí a proudy v obvodě a pomocí grafického součtu řeší výsledné napětí v obvodě.

Napětí na jednotlivých prvcích budou:

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}; \quad \underline{U}_L = jX_L \cdot \underline{I}; \quad \underline{U}_C = -jX_C \cdot \underline{I}$$

Výsledné napětí potom bude:



$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + jX_L \cdot \underline{I} - jX_C \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot (R + j(X_L - X_C))$$

Jestliže je impedance poměr napětí ku proudu, tak pro impedanci sériového řazení R , L , C potom platí vztah 26 :

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad (26)$$

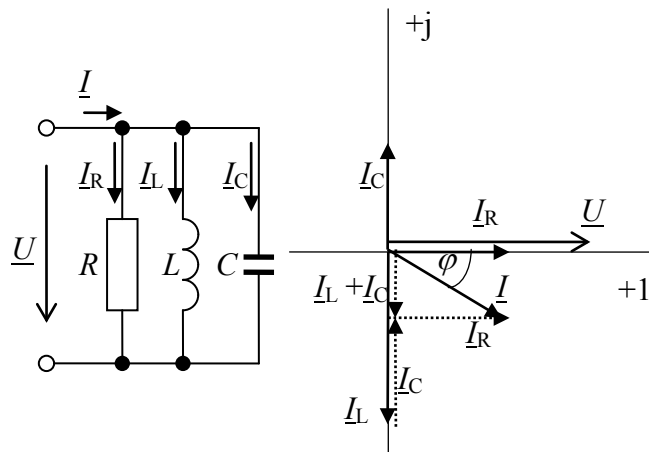
nebo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Fázový posuv mezi napětím a proudem lze v sériovém R , L , C obvodu vypočítat podle vztahu:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad (27)$$

3.5.2 Paralelní řazení prvků

Při paralelním spojení několika prvků je na všech **stejně napětí** $\underline{U}$, a výsledný proud $\underline{I}$ je dán součtem dílčích proudů.



Obr. 13 Paralelní řazení prvků R , L , C a jejich fázorový diagram.

Na obrázku 13 máme paralelní kombinaci R , L , C a příslušný fázorový diagram. Jednotlivé dílčí proudy budou:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}; \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{jX_L}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{-jX_C}$$

Pro celkový proud tedy platí:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jX_L} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \\ &= \underline{U} \cdot \left(\frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \right) \end{aligned}$$

V tomto případě bude výhodnější, vypočítáme li výslednou admitanci obvodu, a impedanci pak získáme jako její převrácenou hodnotu.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = G + j(B_C - B_L), \quad (28)$$



kde G je vodivost rezistoru a B_C a B_L jsou susceptance induktoru a kapacitoru. Impedance se vypočítá jako převrácená hodnota admitance. Lze ji vyjádřit i jako reálné číslo:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} \quad (29)$$

$$\varphi = \arctg \left(R \cdot \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \right)$$

3.5.3 Sériově paralelní řazení prvků

Máme-li v obvodě složitější sério - paralelní řazení prvků, postupujeme metodou postupného zjednodušování, analogicky jako u stejnosměrných obvodů (kapitola 2.3.1), s tím rozdílem, že všechny veličiny jsou fázory (komplexní čísla).

Jestliže máme v obvodě více zdrojů, můžeme použít metodu Kirchhoffových rovnic, nebo metodu smyčkových proudů. Pro řešení těmito metodami musí mít všechny zdroje v obvodě stejnou frekvenci.

Při řešení složitějších obvodů máme často za úkol slovně popsat *výsledný charakter obvodu* (zátěže) vůči zdroji. Tento charakter vychází z fázového posunu mezi celkovým proudem a napětím. Přičemž jak jsme dříve uvedli, úhel se počítá od napětí k proudu. Charakter obvodu také určuje znaménko jalového výkonu dodávaného do obvodu. Spokojíme-li se s hrubším odhadem, postačí nám tři typy charakterů odporový ($\varphi=0$), induktivní ($\varphi>0$) a kapacitní ($\varphi<0$).

Chceme-li být ale zcela přesní, musíme rozeznávat 5 druhů charakterů zátěže:

Odporový - jestliže $\varphi=0$, $Q=0$. Tento stav může nastat ve dvou případech, buďto když máme v obvodě pouze odpory, nebo když dojde ke vzájemnému vyrušení kapacitních a induktivních reaktancí. Tento stav nazýváme rezonance a je obsahem další kapitoly.

Odporově induktivní - jestliže $0<\varphi<\pi/2$, $Q>0$. Obvod se nám chová jako spojení rezistoru a induktoru (např. reálná cívka).

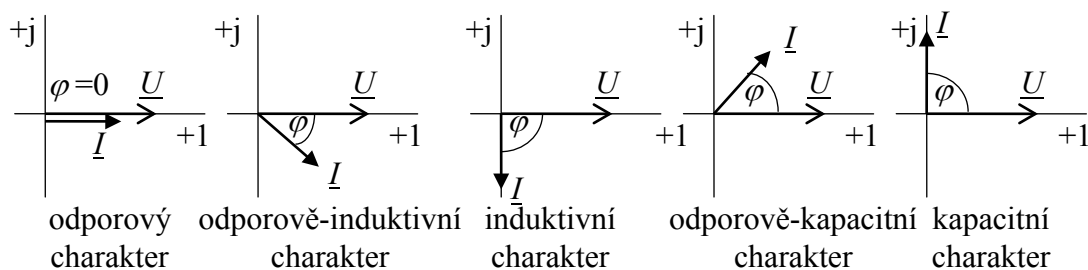
Induktivní - $\varphi = \pi/2$, $Q>0$. Tento stav nastane, máme-li v obvodě ideální induktor, eventuelně s ideálním kapacitorem, přičemž ovšem induktivní složka převažuje.

Odporově kapacitní - jestliže $-\pi/2<\varphi<0$, $Q<0$. Obvod se navenek chová jako spojení rezistoru a kapacitoru (např. reálný kondenzátor).

Kapacitní charakter - jestliže $\varphi = -\pi/2$, $Q<0$. Tento případ nastane, máme-li v obvodě ideální kapacitor. Může tam být spolu s ním i ideální induktor, ale kapacitní složka musí převažovat.

Fázorové diagramy jednotlivých případů znázorňuje obrázek 14.





Obr. 14 fázorové diagramy jednotlivých druhů zátěže.

3.6 REZONANCE

U každého střídavého obvodu, který obsahuje induktory, kapacitory a eventuelně rezistory (platí to i pro reálné obvody s cívkami, kondenzátory a odporníky) může nastat při určitém kmitočtu napájecího napětí stav, při němž je fázový posun roven nule. Tedy výsledné (celkové) napětí a proud jsou ve fázi, obvod se chová jako by měl pouze zapojen odpor. Tento stav je důležitý v technické praxi, často ho využíváme při kompenzaci účinníku (bude popsáno dále), v oscilátorech, ladicích obvodech. Jindy se mu ale snažíme zabránit, protože může být nebezpečný (vzniká přepětí).

Rezonance může nastat v libovolném obvodu, který obsahuje indukčnosti a kapacity, ale dále se omezíme pouze na sériové a paralelní $R-L$ obvody. Nejdříve budeme uvažovat, že máme ideální induktor a pak reálnou cívku, která má i odpor (kondenzátor můžeme většinou považovat za ideální prvek).

Při hledání rezonančního kmitočtu, postupujeme tak, že si vyjádříme vztah pro impedanci, nebo admitanci obvodu, a její imaginární část položíme rovnu nule.

3.6.1 Sériový rezonanční obvod

Jak uvidíme, u tohoto obvodu nemá na rezonanční kmitočet vliv, jestli je v obvodu zapojen ideální induktor, nebo reálná cívka. Odvození tedy provedeme pro obvod s reálnou cívku. Jde potom vlastně o sériový obvod $R-L-C$, jak nám ho znázorňuje obr. 15.

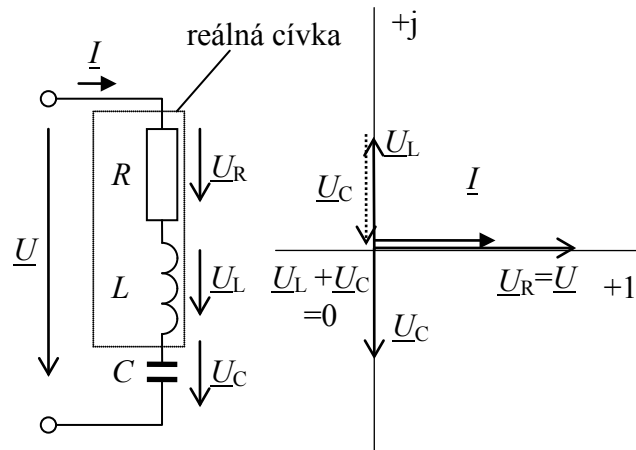
Imaginární část impedance položíme rovnou nule:

$$\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = 0$$

Tuto rovnici poměrně jednoduše vyřešíme, a jako řešení pro rezonanční úhlovou rychlost ω_r a kmitočet f_r dostaneme vztah 30, který je známý pod názvem Thomsonův vztah:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \\ f_r &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \end{aligned} \quad (30)$$





Obr. 15 Sériový rezonanční obvod a jeho fázorový diagram.

3.6.2 Paralelní rezonanční obvod

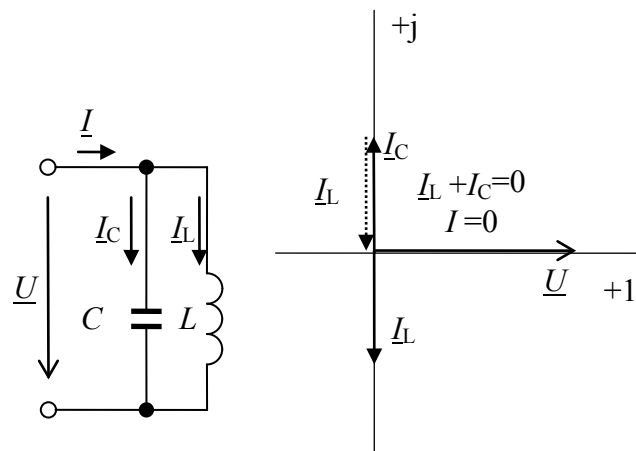
U tohoto obvodu již bude záležet na tom, jestli budeme uvažovat ideální induktor, nebo reálnou cívku, nejdříve si tedy provedeme odvození pro ideální prvky.

Ideální paralelní rezonanční obvod

Tuto situaci znázorňuje obrázek 16.

Budeme vycházet z admitance obvodu, protože ta se dá u paralelního obvodu snadněji vyjádřit.

$$\underline{Y} = j(B_C - B_L) = j\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right). \quad (31)$$



Obr. 16 Paralelní rezonanční obvod a jeho fázorový diagram.

Admitance vlastně nemá reálnou část, takže ji celou položíme rovnu nule:

$$\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) = 0. \quad (32)$$

Vyřešením této rovnice dojdeme ke stejnému výsledku pro rezonanční úlovou rychlost a kmitočet jako pro ideální paralelní rezonanční obvod je: jako u sériového obvodu,

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \\ f_r &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \end{aligned} \quad (33)$$



Jelikož admitance je tohoto obvodu je při rezonanci nulová, impedance se blíží nekonečnu, ideální paralelní rezonanční obvod neodebírá ze zdroje žádný proud.

3.7 KOMPENZACE ÚČINÍKU

Mnoho běžně používaných spotřebičů má induktivně odporový charakter, například asynchronní motory, transformátory, svářečky, zářivková svítidla ap. Tyto spotřebiče potřebují ke své činnosti jalový výkon induktivního charakteru. Ten ale nekoná žádnou práci. Jalový výkon se pouze přelévá po vedení mezi zdrojem a spotřebičem a způsobuje ztráty. Princip kompenzace spočívá v tom, že potřebný induktivní jalový výkon vyrobíme v kondenzátorech (nebo synchronních kompenzátorech, což jsou speciální synchronní stroje) přímo u spotřebiče a po vedení přivádíme buď pouze činný výkon, nebo velikost jalového výkonu podstatně zmenšíme. To bude mít za následek zmenšení proudu protékajícího přívodním vedením a tím pádem menší ztráty, nebo při stejných ztrátách můžeme použít vedení s menším průřezem. V energetických sítích bývá obvyklé, že se kompenzuje tak, aby $\cos \varphi$ byl 0,95 induktivního charakteru.

Kompenzaci provádíme nejčastěji jako trojfázovou, protože rozvod většina spotřebičů v průmyslu bývají trojfázové. Při kompenzaci pomocí kondenzátorů zapojujeme tři kondenzátory do hvězdy, nebo častěji do trojúhelníka. Kompenzace může buďto regulovaná nebo neregulovaná. Regulace se provádí buďto nespojitě, tak že místo jednoho kondenzátoru je v každé fázi paralelní baterie kondenzátorů a automatický regulátor provádí jejich připojování nebo odpojování podle potřeby jalového výkonu v síti. Nebo může být regulace spojitá pomocí výkonových polovodičových prvků. Tento způsob je složitější.

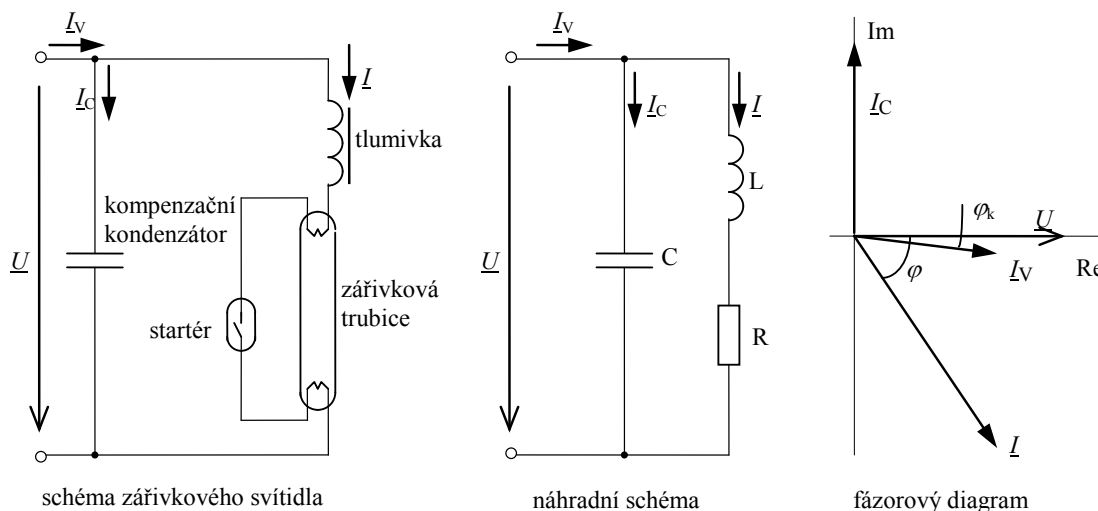
Podle umístění můžeme mít kompenzaci

Individuální - každý spotřebič má své vlastní kompenzační kondenzátory. Výhodou je to, že tato kompenzace většinou nemusí být regulovaná a že kompenzace se provede co nejbližší spotřebiči, takže po přívodním vedení se nemusí přelévat žádný jalový výkon. Nevýhodou je že ke každému spotřebiči potřebujeme kompenzační kondenzátory. Tato kompenzace se používá například v klasických zářivkách, kde v každém svítidle bývá kompenzační kondenzátor.

Skupinová - kompenzuje se najednou několik spotřebičů připojených na jeden rozvaděč, např. spotřebiče v jedné dílně. Zde ušetříme počet kompenzačních kondenzátorů, ale nevýhodou je, že kompenzace musí být regulovaná, protože spotřebiče nepracují vždy současně a velikost odebíraného jalového výkonu se mění.

Centrální - kompenzace se provádí centrálně v rozvodně pro celý závod, výhody a nevýhody jsou obdobné jako u skupinové kompenzace.





Obr. 17. Schéma a fázorový diagram zářivkového svítidla s filtračním kondenzátorem.

Jak vypočítat velikost potřebné kondenzátorové baterie je uvedeno na následujícím příkladě zářivkového svítidla. Schéma, náhradní schéma a fázorový diagram je na obr. 17.

V tomto případě se činný výkon odebíraný ze spotřebiče před a po kompenzaci nemění, pro jalový výkon kompenzačního kondenzátoru lze odvodit vztah:

$$Q_C = P \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_k) \quad (34)$$

Kde: P je činný výkon odebíraný spotřebičem,

Q_C je jalový výkon kondenzátorové baterie

φ a φ_k je fázový posuv před a po kompenzaci, (φ nebo $\cos(\varphi)$ většinou udává výrobce zařízení)

Známe-li potřebný jalový výkon, příslušnou kapacitu kondenzátoru vypočítáme jako

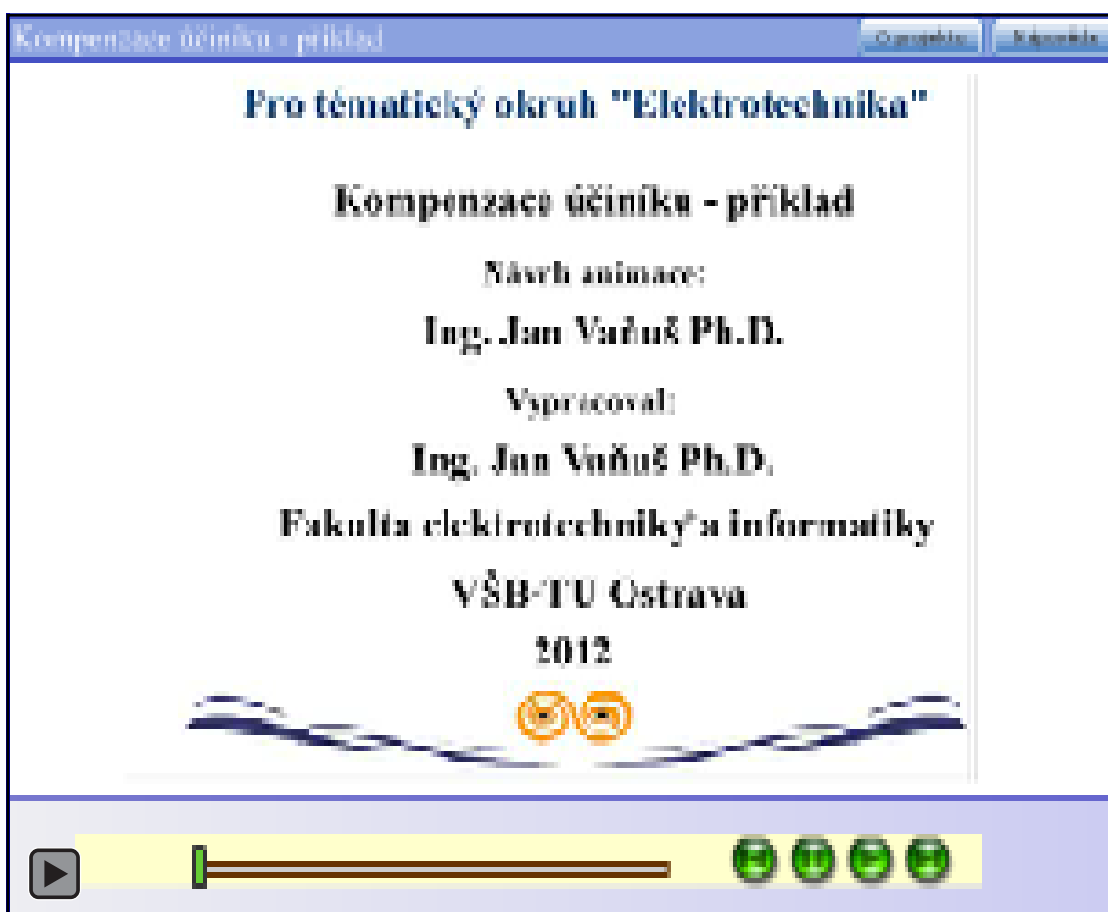
$$C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} \quad (35)$$

Kde: ω je úhlová rychlost napájecí sítě

U je napětí na které je kondenzátor připojen.

V případě že by se jednalo o trojfázovou kompenzaci, byla by kapacita jednoho kondenzátoru třetinová.

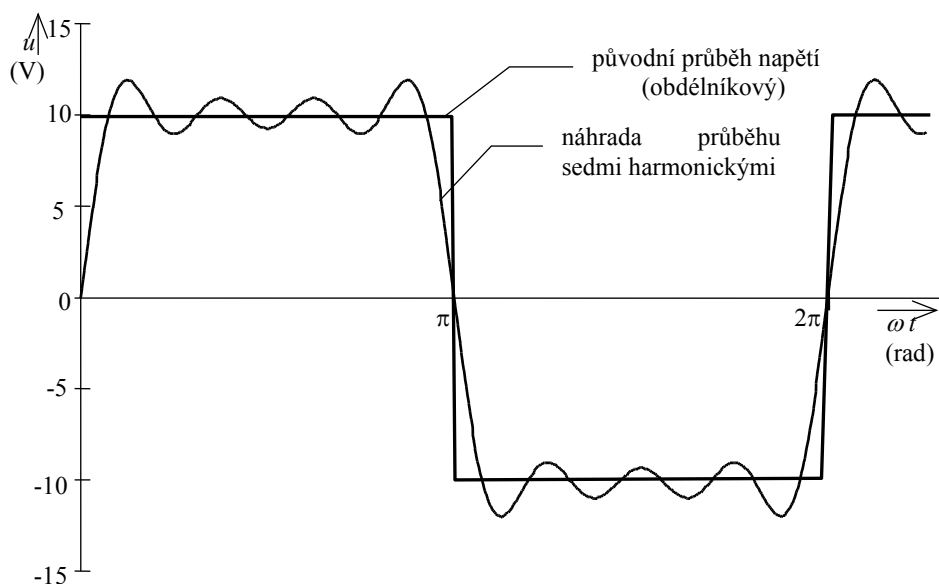




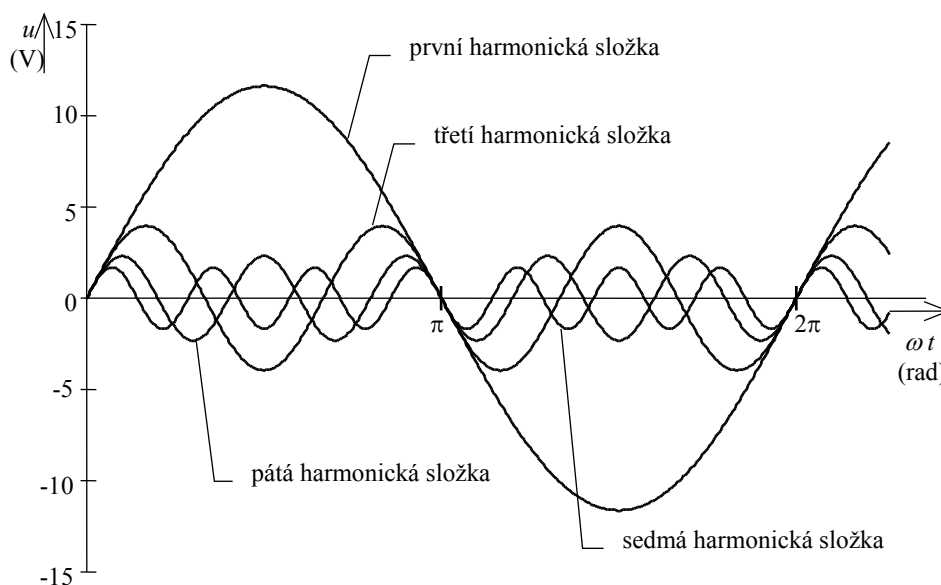
3.8 NEHARMONICKÉ ČASOVÉ PRŮBĚHY OBVODOVÝCH VELIČIN

Zatím jsme uvažovali střídavé obvody s harmonickými (sinusovými) průběhy napětí a proudu. V praxi se ale vyskytují i proudy a napětí s průběhy jinými, které obecně nazýváme neharmonické průběhy. Zvláště se vyskytují v obvodech, kde jsou nelineární prvky (např. polovodičové měniče).

Řešením takových obvodů se nebudeme zabývat, pro přehled zde pouze naznačíme metodiku řešení.



Náhrada průběhu sedmi harmonickými



Rozklad původního průběhu na jednotlivé harmonické složky.

Obr. 18 Náhrada obdélníkového průběhu řadou harmonických složek.

Při řešení takovýchto obvodů vycházíme z toho, že každý periodický průběh s úhlovou rychlostí ω lze rozložit na řadu harmonických průběhů, které nazýváme **harmonické složky**. Jejich úhlové rychlosti a tím i kmitočty jsou násobkem základní úhlové rychlosti ω a základnímu kmitočtu. Napětí a proud potom řešíme jako součet těchto všech harmonických



složek. Tomuto rozkladu se říká *Fourierova řada* a existují matematické postupy, podle kterých se provádí. Uvedeme si jako příklad rozklad napětí obdélníkového průběhu se základním kmitočtem 50 Hz ($\omega = 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) a s amplitudou 10 V na sedm harmonických složek. Pro vyšší přesnost, bychom museli počítat více harmonických složek.

$$u(t) = 12,73 \cdot \sin(\omega t) + 4,24 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 2,55 \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + 1,82 \cdot \sin(7 \cdot \omega t)$$

první harmonická
třetí harmonická
pátá harmonická
sedmá harmonická

Pro toto obdélníkové napětí rozložené na 7 harmonických platí:

Průběh neobsahuje druhou a čtvrtou harmonickou složku (žádné sudé), protože je symetrický podle časové osy.

Původní průběh i jeho náhradu pomocí pěti harmonických složek ukazuje obrázek 18.



3.9 LITERATURA

Smejkal J, Elektrotechnika, VUT Brno,

TKOTZ K., Příručka pro elektrotechnika: Europa - Sobotáles cz. s.r.o., 2 vydání

Bastian P a kolektiv, Praktická elektrotechnika; Europa - Sobotáles cz. s.r.o., 2 vydání

Kolář V., Vrána V.: Elektrické obvody střídavého proudu, učební text VŠB TU Ostrava, FEI, kat 452, 2005

Internet

http://fei1.vsb.cz/kat420/index_stary.html

