

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 – V
PŘÍKLADECH**

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013



Název: PRUŽNOST A PEVNOST 2 – V PŘÍKLADECH
Autoři: doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP, Ing. Milan Sivera, Ing. Richard Klučka, Ing. Josef Sedlák, Ing. Luboš Pečenka, Ing. Michal Šofer.
Vydání: první, 2013
Počet stran: 94
Náklad: 5
Jazyková korektura: nebyla provedena.



Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Modernizace výukových materiálů a didaktických metod
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/15.0463
Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP, Ing. Milan Sivera, Ing. Richard Klučka, Ing. Josef Sedlák, Ing. Luboš Pečenka, Ing. Michal Šofer.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Kvadratický moment a těžiště průřezu nosníku

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KVADRATICKÝ MOMENT A TĚŽIŠTĚ PRŮŘEZU NOSNÍKU	3
1.1	Obecný postup řešení.....	4
1.2	Příklad 1.....	4



1 KVADRATICKÝ MOMENT A TĚŽIŠTĚ PRŮŘEZU NOSNÍKU



OBSAH KAPITOLY:

Obecný postup řešení.

Kvadratický moment průřezu.

Těžiště průřezu nosníku.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

hlavní centrální kvadratický moment průřezu.



1.1 OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ

1/Libovolně si zvolíme souřadný systém

2/Pomocí tohoto zvoleného souřadného systému vypočítáme souřadnice těžiště

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}, z_T = \frac{\sum_{i=1}^n z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}. \quad (1.1)$$

3/Vzhledem k těžištním osám vypočítáme kvadratický moment průřezu J_y a J_z , případně pokud průřez nemá ani jednu osu symetrie, pak vypočítáme i deviační moment

$$J_{yT} = \iint_A z^2 dA, J_{zT} = \iint_A y^2 dA, J_{yTzT} = \iint_A yz dA. \quad (1.2)$$

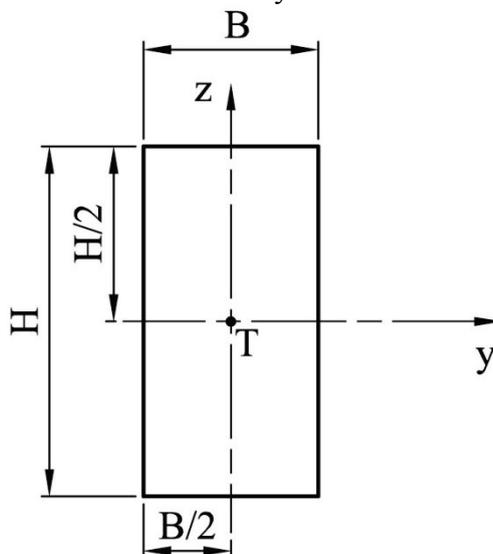
4/Vypočítáme hlavní centrální kvadratické momenty a polohu natočení hlavních os kolem středu v těžišti plochy

$$J_{T_{max,min}} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{yT} - J_{zT})^2}{4} + J_{yTzT}^2}, \quad (1.3)$$

$$\theta_T = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{2J_{yTzT}}{J_{zT} - J_{yT}} \right).$$

1.2 PŘÍKLAD 1

Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty obdélníkového průřezu.



Obr. 1.1 Rozměry průřezu

Souřadný systém si zvolíme do těžiště průřezu, jedná se o obdélníkový průřez o šířce B a výšce H (Obr. 1.1) se dvěma osami symetrie.

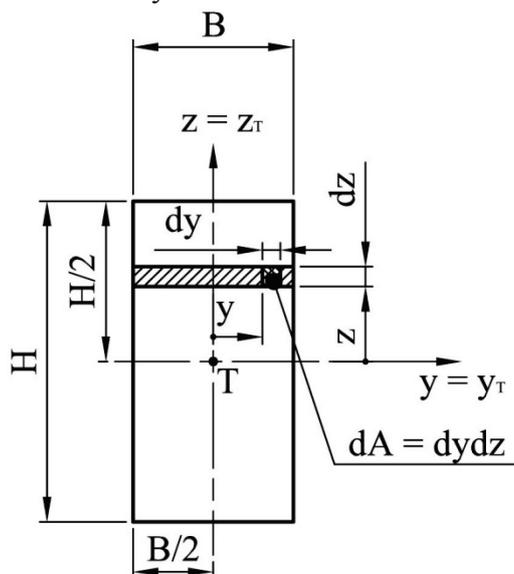
Pro výpočet kvadratických momentů průřezu pak využijeme vztahů (budou použity i v následujících příkladech)

$$J_{yT} = \iint_A z^2 dA, J_{zT} = \iint_A y^2 dA. \quad (1.4)$$

Pro odvození vztahů vyjmeme z obdélníkového průřezu ve výšce z element výšky dz a šířky dy ve vzdálenosti y od osy z . Jelikož máme souřadný systém umístěný v těžišti plochy, pak



integrační meze v ose y jsou velikosti $H/2$ v kladném i záporném směru a v ose z pak $B/2$ taktéž v záporném i kladném směru osy



Obr. 1.2 Vyjmutí elementu

$$J_{yT} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} z^2 dy dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 1 dy = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [y]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \frac{BH^3}{12}. \quad (1.5)$$

$$J_{zT} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} y^2 dy dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} 1 dz \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} y^2 dy = [y]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \frac{HB^3}{12}. \quad (1.6)$$

Deviční moment setrvačnosti u symetrického průřezu, kde souřadné osy, vůči nimž počítáme moment setrvačnosti, tvoří osy symetrie je nulový.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Kvadratický moment I

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

2	KVADRATICKÝ MOMENT I.....	3
2.1	Příklad 2.....	4
2.2	Příklad 3.....	5
2.3	Příklad 4.....	7



2 KVADRATICKÝ MOMENT I



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



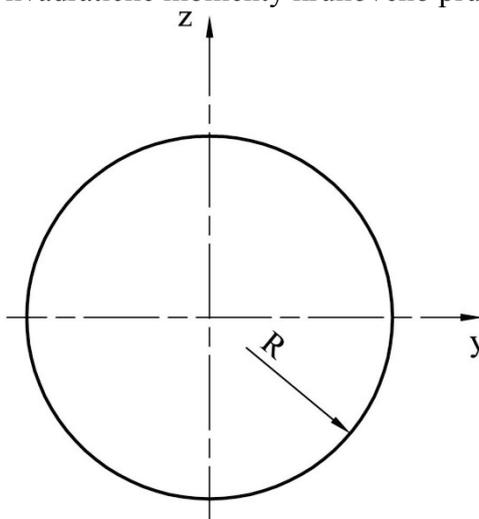
CÍL:

Kvadratický moment průřezu k posunutým osám,
kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,
deviační moment průřezu,
hlavní centrální kvadratický moment průřezu.



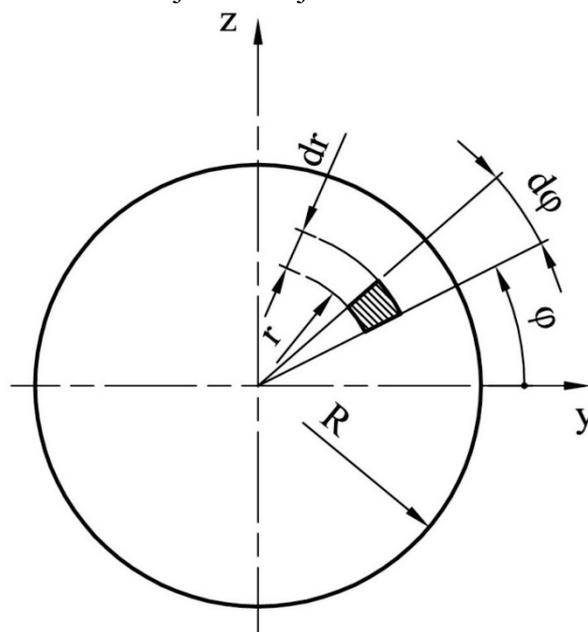
2.1 PŘÍKLAD 2

Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty kruhového průřezu.



Obr. 2.1 Rozměry průřezu

Jedná se o kruhový průřez o poloměru R . Souřadný systém si opět zvolíme do těžiště průřezu, tudíž do středu kruhu. Kvadratický moment průřezu určíme z elementu (Obr. 2.2), který vyjmeme ve vzdálenosti r od středu o tloušťce dr a v úhlové vzdálenosti φ a úhlovém výseku $d\varphi$. Kvadratické momenty průřezu J_y a J_z lze spočítat pomocí transformace do polárních souřadnic. Transformační rovnice mají následující tvar



Obr. 2.2 Vyjmutí elementu

$$\begin{aligned} y &= r \cdot \cos \varphi, \\ z &= r \cdot \sin \varphi, \\ J &= r. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Kde J je jakobián transformace

$$J_{yT} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \quad (2.2)$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (\sin\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \\
&J_{zT} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cdot \cos\varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Pro integraci výrazu $(\sin\varphi)^2$ a $(\cos\varphi)^2$ jsou využity následující vztahy a integrace pomocí substituce

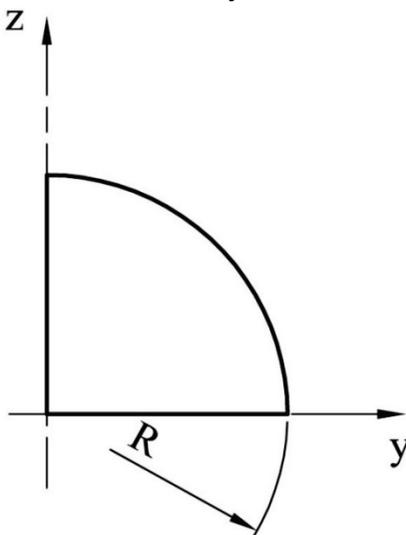
$$(\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi), \quad (\cos\varphi)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi). \quad (2.4)$$

Polární kvadratický moment setrvačnosti je pak prostým součtem kvadratických momentů průřezu J_y a J_z

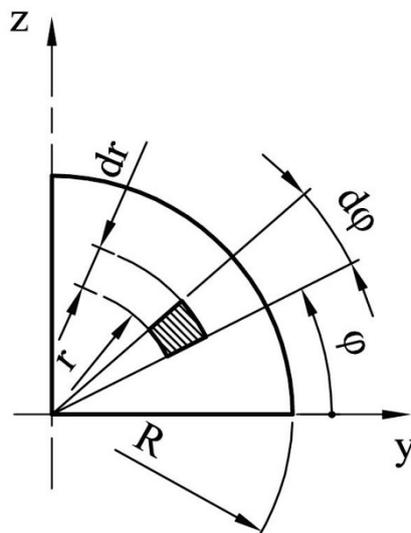
$$J_p = J_{yT} + J_{zT} = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (2.5)$$

2.2 PŘÍKLAD 3

Odvoďte obecně vztahy pro kvadratické momenty čtvrtkruhového průřezu.



Obr. 2.3 Rozměry průřezu



Obr. 2.4 Vyjmutí elementu

Podobně jako v předchozím příkladě se jedná o kruhový průřez, nyní ale pouze v rozmezí $0 - 90^\circ$, jde tedy o čtvrtkruh o poloměru R . Souřadný systém zde není zaveden to těžiště, ale je orientován podél spodní a levé hrany průřezu. K odvození vztahů pro kvadratický moment průřezu plochy použijeme opět element o rozměrech $d\varphi$ a dr vyjmutý ve vzdálenosti r od středu a φ od osy y (Obr. 2.4). K odvození využijeme opět transformaci do polárních souřadnic rovnice (2.1) a vztahy pro výpočet kvadratických momentů průřezu (rovnice (1.4))

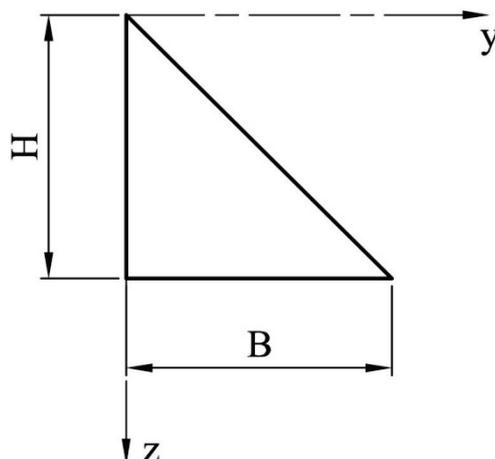
$$\begin{aligned}
 J_{yT} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cdot \sin\varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{R^4}{4} = \quad (2.6) \\
 &= \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{zT} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cdot \cos\varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^R r^3 dy = \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{R^4}{4} = \quad (2.7) \\
 &= \frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}.
 \end{aligned}$$



2.3 PŘÍKLAD 4

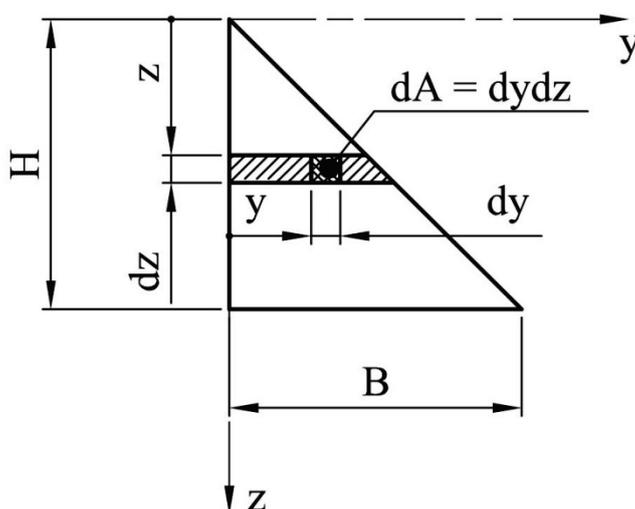
Odvod'te obecně vztahy pro kvadratické momenty trojúhelníkového průřezu.



Obr. 2.5 Rozměry průřezu

V tomto příkladě je nutné nejprve upozornit na jinou orientaci zvoleného souřadného systému. Kladná osa z směřuje podél levé hrany dolů, osa y pak doprava od vrcholu trojúhelníku. Z trojúhelníku opět vyjmeme element ve vzdálenosti z od osy y výšky dz a ve vzdálenosti y od osy z šířky dy (viz Obr. 2.5). Elementární plocha pak je $dA = dy \cdot dz$. Horní integrační mez pro souřadnici y je nutné určit z podobnosti trojúhelníků, a to

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{H} \rightarrow y = \frac{B \cdot z}{H}. \quad (2.8)$$



Obr. 2.6 Vyjmutí elementu

Pro výpočet kvadratických momentů setrvačnosti použijeme opět vztahy (1.4.), v tomto případě se jedná o průřez, který nemá osu symetrie, tudíž musíme vypočítat i deviační moment setrvačnosti

$$J_{yT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B \cdot z}{H}} z^2 dy dz = \int_0^H z^2 \cdot [y]_0^{\frac{B \cdot z}{H}} dz = \frac{B}{H} \cdot \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^H = \frac{BH^3}{4}, \quad (2.9)$$

$$J_{zT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B \cdot z}{H}} y^2 dy dz = \int_0^H \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{B \cdot z}{H}} dz = \frac{B^3}{3 \cdot H^3} \cdot \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^H = \frac{HB^3}{12}, \quad (2.10)$$



$$J_{yTzT} = \int_0^H \int_0^{\frac{B \cdot z}{H}} yz dy dz = \int_0^H z \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{B \cdot z}{H}} dz = \frac{B^2}{2 \cdot H^2} \cdot \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^H = \frac{B^2 H^2}{8}. \quad (2.11)$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Kvadratický moment II

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

3	KVADRATICKÝ MOMENT II	3
3.1	Příklad 5.....	4
3.2	Příklad 6.....	6



3 KVADRATICKÝ MOMENT II

**OBSAH KAPITOLY:**

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.

**CÍL:**

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

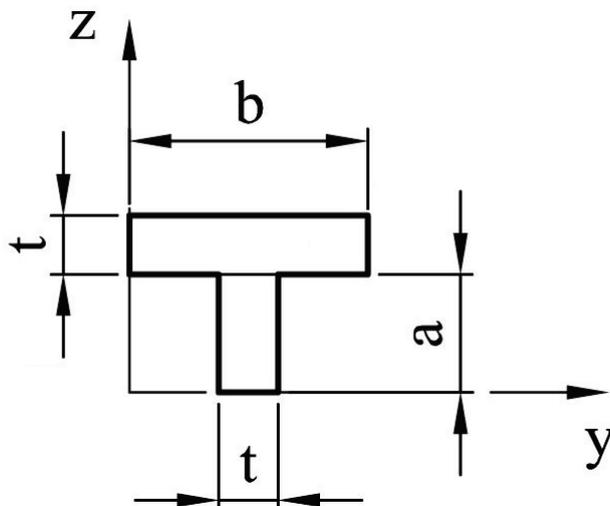
hlavní centrální kvadratický moment průřezu.



3.1 PŘÍKLAD 5

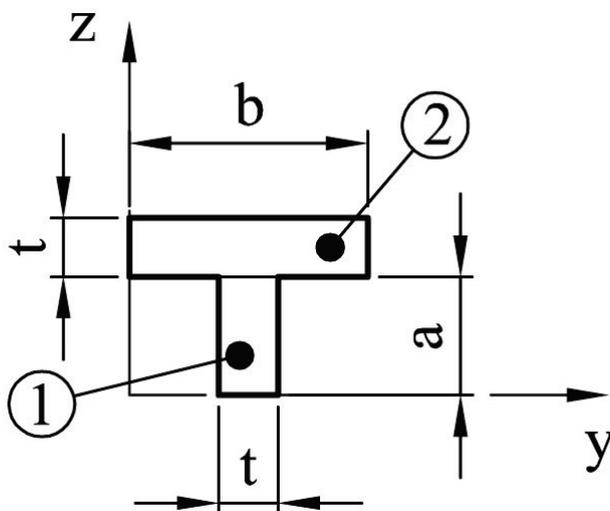
Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného složeného průřezu na Obr. 3.1 s jednou osou symetrie.

Zadané hodnoty jsou $t = 5\text{mm}$; $a = 10\text{mm}$; $b = 20\text{mm}$.

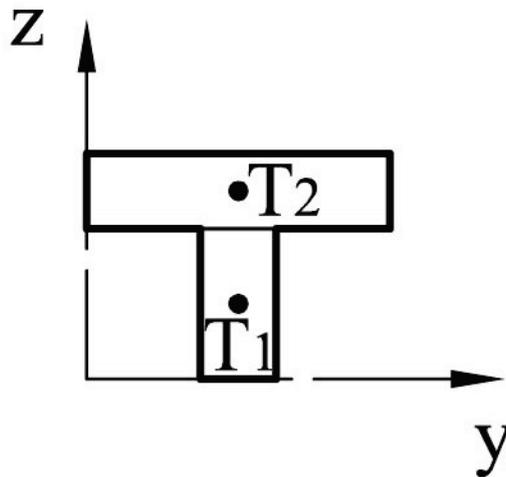


Obr. 3.1 Rozměry průřezu

Nejprve si zvolíme souřadný systém (viz Obr. 3.1) za pomoci něhož vypočítáme těžiště obrazce. Složený obrazec si rozdělíme na základní tvary, u nichž známe momenty setrvačnosti (obdélník, čtverec, kruh,...). Pomocí nám může být zapsání souřadnic těžišť a ploch jednotlivých elementárních útvarů do tabulky. Rozdělení složeného obrazce na jednotlivé základní tvary a těžiště dílčích ploch je naznačeno na Obr. 3.2 Obr. 3.3.



Obr. 3.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary



Obr. 3.3 Těžiště dílčích ploch

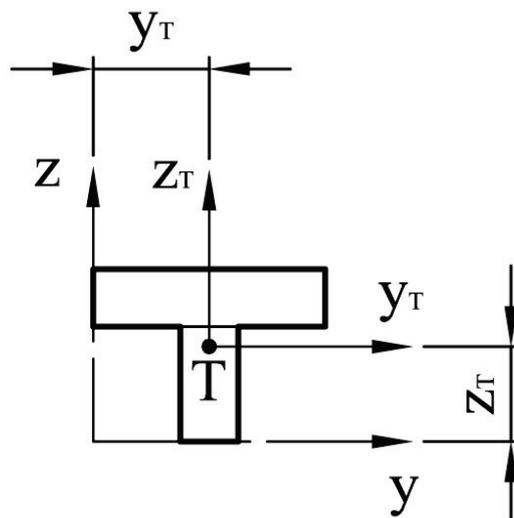
Tab. 1 Polohy těžiště dílčích ploch

$i[-]$	$y_{Ti}[mm]$	$z_{Ti}[mm]$	$S_i[mm^2]$
1	10	5	50
2	10	12,5	100

Těžiště složeného obrazce

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{b}{2} \cdot a \cdot t + \frac{b}{2} \cdot b \cdot t}{a \cdot t + b \cdot t} = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 100}{10 \cdot 5 + 20 \cdot 5} = 10 \text{ mm}, \quad (3.1)$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^2 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t + \left(\frac{t}{2} + a\right) \cdot b \cdot t}{a \cdot t + b \cdot t} = \frac{5 \cdot 50 + 12,5 \cdot 100}{10 \cdot 5 + 20 \cdot 5} = 10 \text{ mm}. \quad (3.2)$$



Obr. 3.4 Poloha těžiště složeného obrazce

Do tohoto těžiště (Obr. 3.4) pak rovnoběžně posuneme souřadný systém a počítáme kvadratické momenty setrvačnosti

$$\begin{aligned} J_{yT} &= \frac{t \cdot a^3}{12} + a \cdot t \cdot \left(z_T - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot \left(z_T + \frac{t}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{5 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 5 \cdot \left(10 - \frac{10}{2}\right)^2 + \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot \left(10 + \frac{5}{2}\right)^2 = \\ &= 17\,500 \text{ mm}^4, \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$J_{zT} = \frac{t \cdot b^3}{12} + \frac{a \cdot t^3}{12} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} + \frac{10 \cdot 5^3}{12} = 3\,437,5 \text{ mm}^4.$$

Zadaný průřez má jednu osu symetrie, která je zároveň i těžištní osou, proto pro výpočet kvadratického momentu setrvačnosti kolem osy z - J_{zT} není potřeba použití Steinerovy věty.

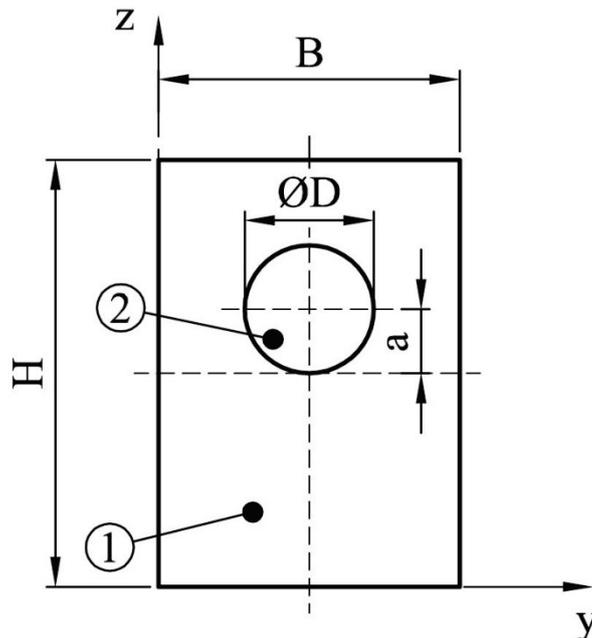
První a třetí člen ve výpočtu kvadratických momentů setrvačnosti J_{yT} je moment setrvačnosti základního tvaru, tudíž obdélníku vůči jeho vlastnímu souřadnému systému procházejícím těžištěm základního obrazce označenému na Obr. 3.3 T_1 a T_2 . Druhý a čtvrtý člen jsou pak důsledkem Steinerovy věty a jsou součinem obsahu dané elementární plochy a kvadrátu vzdálenosti těžištní osy elementárního souřadného systému od souřadného systému celého složeného obrazce.

Průřez má jednu osu symetrie, kterou tvoří těžištní souřadný systém, proto je deviační moment setrvačnosti nulový.

3.2 PŘÍKLAD 6

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného složeného průřezu na Obr. 3.5 s jednou osou symetrie.

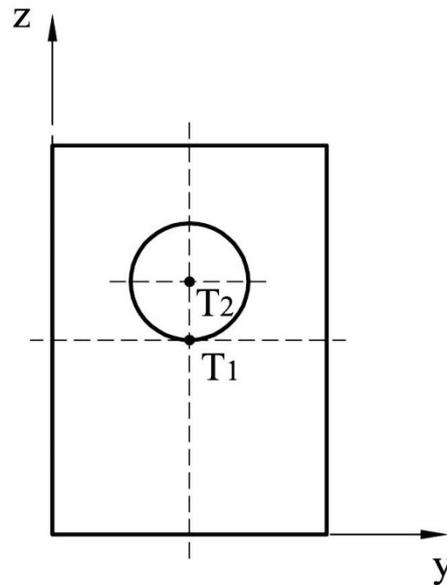
Zadané hodnoty jsou $B = 70\text{mm}$; $H = 100\text{mm}$; $D = 30\text{mm}$; $a = 15\text{mm}$.



Obr. 3.5 Rozměry průřezu a rozdělení na jednotlivé základní tvary

Opět si zvolíme souřadný systém, jehož počátek je tentokrát umístěn v levém dolním rohu průřezu. Tentokrát máme obdélník, který má uvnitř vyřezanou kruhovou díru, tudíž při výpočtu těžiště i kvadratických momentů setrvačnosti budeme kruhovou plochu odečítat. Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště





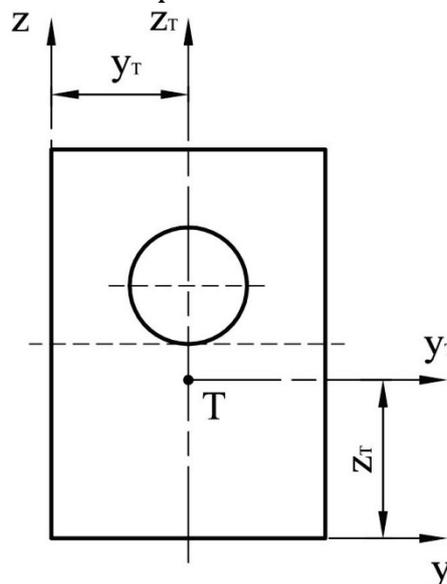
Obr. 3.6 Těžiště dílčích ploch

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{B}{2} \cdot B \cdot H - \frac{B}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{B \cdot H - \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{70}{2} \cdot 70 \cdot 100 - \frac{70}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}}{70 \cdot 100 - \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = \quad (3.4)$$

$$= 35 \text{ mm},$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^2 z_{Ti} S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{H}{2} \cdot B \cdot H - \left(\frac{H}{2} + a\right) \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{B \cdot H - \frac{\pi D^2}{4}} = \quad (3.5)$$

$$= \frac{\frac{100}{2} \cdot 70 \cdot 100 - \left(\frac{100}{2} + 15\right) \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}}{70 \cdot 100 - \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = 48,3 \text{ mm}.$$



Obr. 3.7 Poloha těžiště složeného obrazce

$$J_{y_T} = \frac{B \cdot H^3}{12} + B \cdot H \cdot \left(z_T - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4} \cdot \left(a + \frac{H}{2} - z_T\right)^2 = \quad (3.6)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{70 \cdot 100^3}{12} + 70 \cdot 100 \cdot \left(48,3 - \frac{100}{2}\right)^2 + \frac{\pi \cdot 30^4}{64} + \\
&+ \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot \left(15 + \frac{100}{2} - 48,3\right)^2 = \mathbf{6\,090\,460\,mm^4}, \\
J_{zT} &= \frac{H \cdot B^3}{12} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{100 \cdot 70^3}{12} + \frac{\pi \cdot 30^4}{64} = \mathbf{2\,898\,094\,mm^4}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Zadaný průřez má jednu osu symetrie, která je zároveň i těžištní osou, proto pro výpočet kvadratického momentu setrvačnosti kolem osy z - J_{zT} není potřeba použití Steinerovy věty. Průřez má jednu osu symetrie, kterou tvoří těžištní souřadný systém, proto je deviační moment setrvačnosti nulový.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Hodnoty kvadratických momentů základních průřezů

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

4	HODNOTY KVADRATICKÝCH MOMENTŮ ZÁKLADNÍCH PRŮŘEZŮ	3
4.1	Hodnoty kvadratických momentů základních průřezů	4



4 HODNOTY KVADRATICKÝCH MOMENTŮ ZÁKLADNÍCH PRŮŘEZŮ



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment základních průřezů.



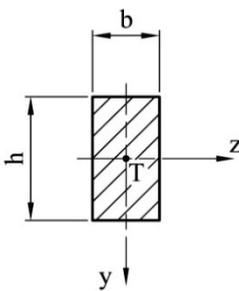
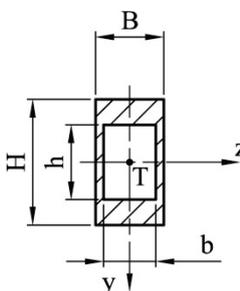
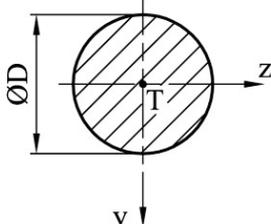
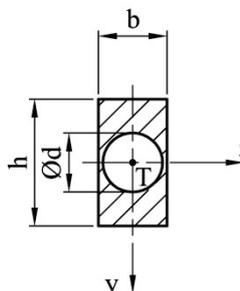
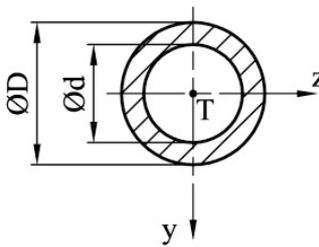
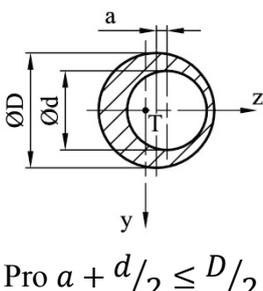
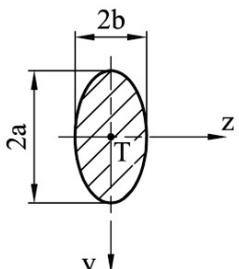
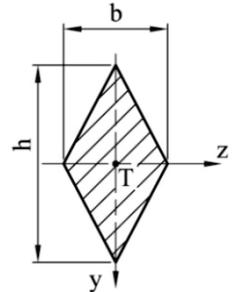
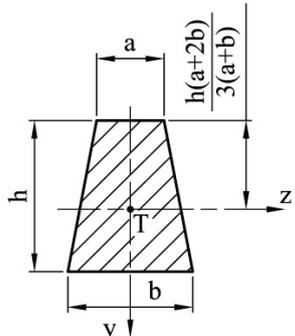
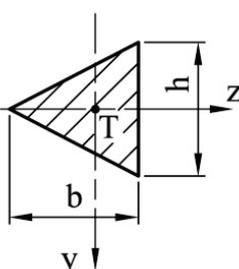
CÍL:

Hlavní centrální kvadratické momenty vybraných plochy.

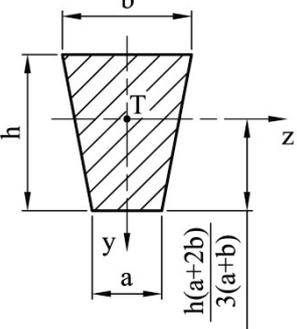
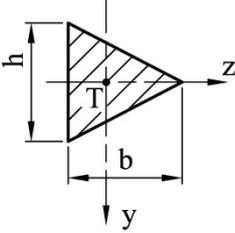
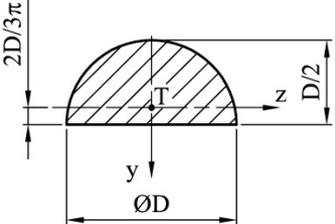
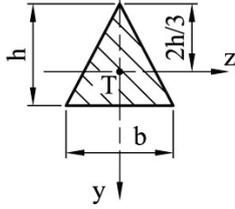
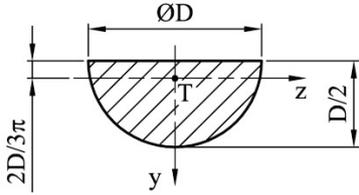
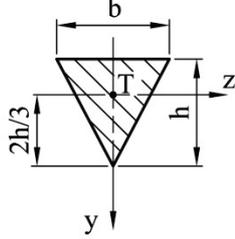
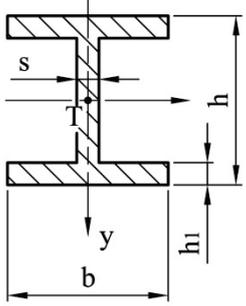
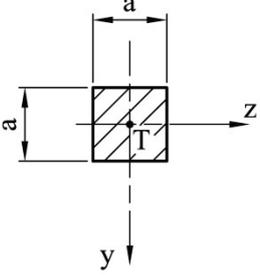
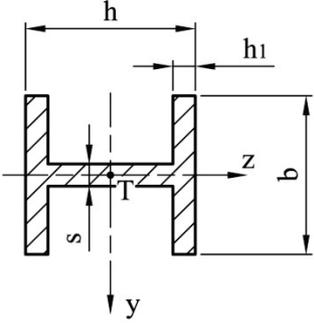
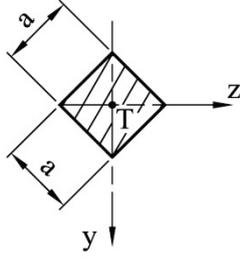


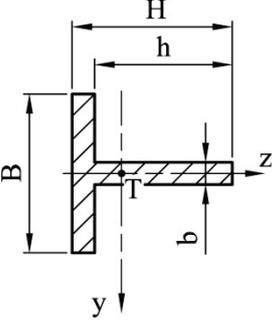
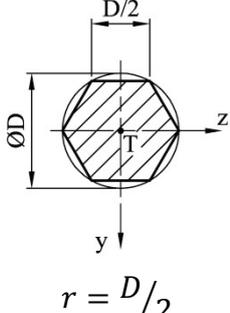
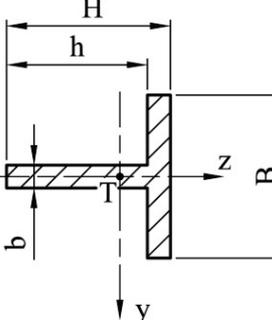
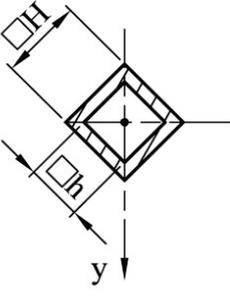
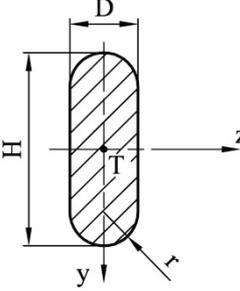
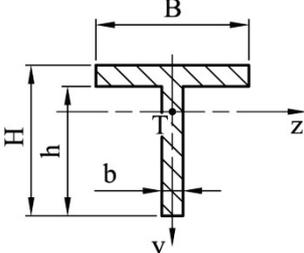
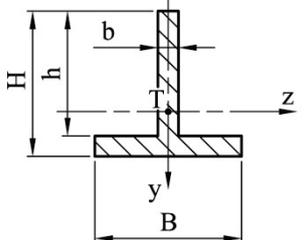
4.1 HODNOTY KVADRATICKÝCH MOMENTŮ ZÁKLADNÍCH PRŮŘEZŮ

Tab. 1 Hodnoty kvadratických momentů základních průřezů

Tvar průřezu	$J_{zT} [m^4]$	Tvar průřezu	$J_{zT} [m^4]$
	$\frac{bh^3}{12}$		$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$
	$\frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$		$\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$
	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ Pro $a + d/2 \leq D/2$
	$\frac{\pi b a^3}{4}$		$\frac{bh^3}{48}$
	$\frac{h^3(a^2 + b^2 + 4ab)}{36(a + b)}$		$\frac{bh^3}{48}$



	$\frac{h^3(a^2 + b^2 + 4ab)}{36(a + b)}$		$\frac{bh^3}{48}$
	$\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) D^4$		$\frac{bh^3}{36}$
	$\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) D^4$		$\frac{bh^3}{36}$
	$\frac{bh^3 - (b - s)(h - 2h_1)^3}{12}$		$\frac{a^4}{12}$
	$\frac{2h_1b^3 + (h - 2h_1)s^3}{12}$		$\frac{a^4}{12}$

	$\frac{bh^3 + (H - h)B^3}{12}$	 <p style="text-align: center;">$r = D/2$</p>	$\frac{5\sqrt{3}D^4}{256}$
	$\frac{bh^3 + (H - h)B^3}{12}$		$\frac{H^4 - h^4}{12}$
 <p style="text-align: center;">$r = D/2; H \geq D$</p>	$\frac{\pi D^2 [4(H - D)^2 + D^2]}{64} + \frac{D(H - D)[(H - D)^2 + 2D^2]}{12}$		
	$\frac{BH^3 - (B - b)h^3}{3} + \frac{[BH^2 - (B - b)h^2]^2}{[BH - (B - b)h]}$		
	$\frac{BH^3 - (B - b)h^3}{3} + \frac{[BH^2 - (B - b)h^2]^2}{[BH - (B - b)h]}$		

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady I

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

5	PŘÍKLADY I.....	3
5.1	Příklad 7.....	4



5 PŘÍKLADY I



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

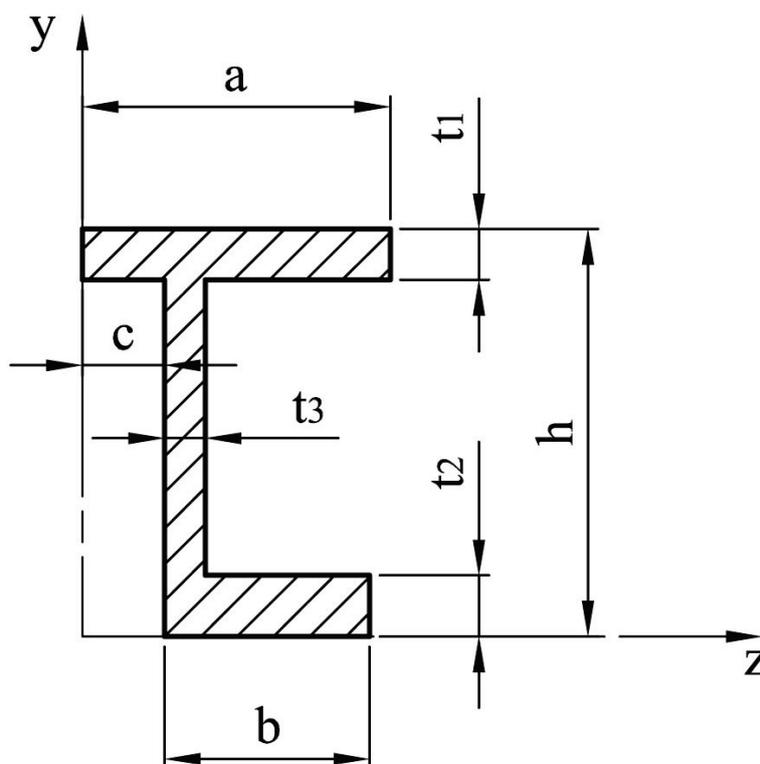
konstrukce Mohrovy kružnice.



5.1 PŘÍKLAD 7

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 5.1).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



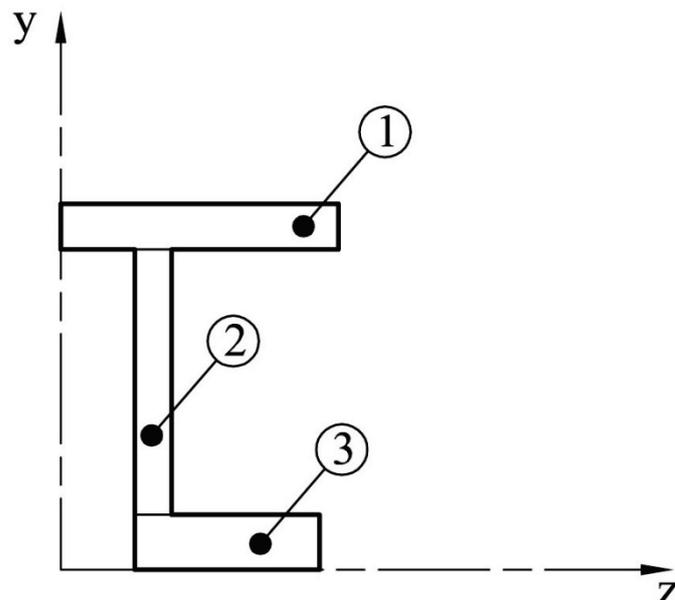
Obr. 5.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 5.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right) + b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right)}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right) + 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right)}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 13,82 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 23,68 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$



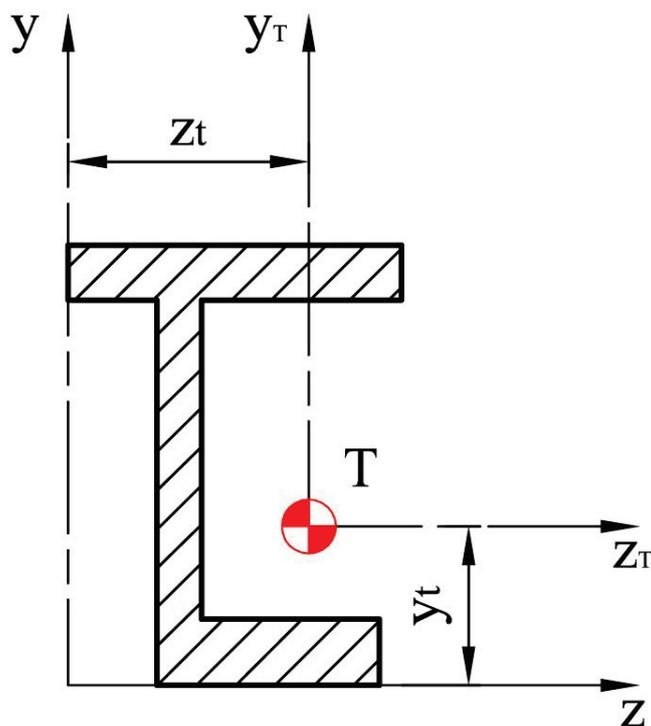


Obr. 5.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{a \cdot t_1^3}{12} + a \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{28 \cdot 6^3}{12} + 28 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 283\,081 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot a^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right)^2 + \\
 &+ \frac{t_2 \cdot b^3}{12} + b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 = \\
 &= \frac{6 \cdot 28^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right)^2 + \\
 &+ \frac{3 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right)^2 = 88\,725 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= a \cdot t_1 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + c\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) \cdot \frac{t_2}{2} \\
 &= 28 \cdot 6 \cdot \frac{28}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 8\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \left(\frac{24}{2} + 8\right) \cdot \frac{3}{2} = 112\,124 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



Obr. 5.3 Poloha těžiště složeného obrazce

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.

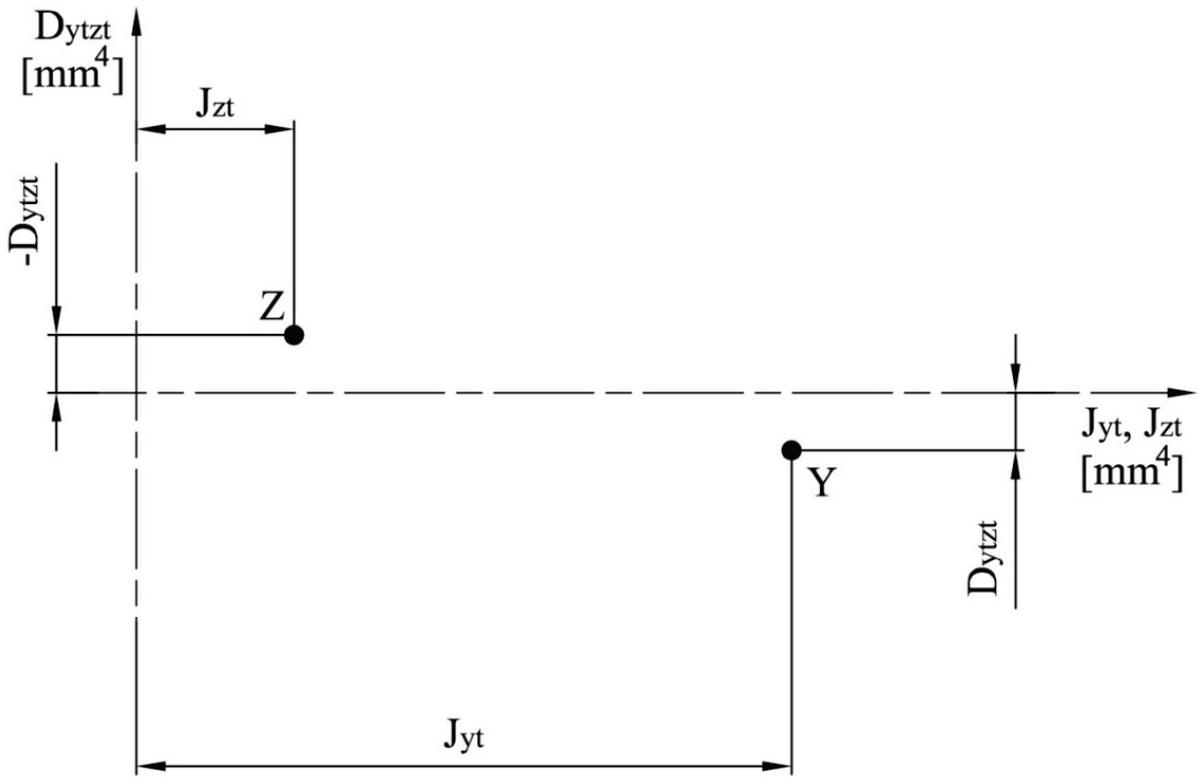
$$J_{y_T} = J_y - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = 283081 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68^2 = 79\,043 \text{ mm}^4, \quad (5.6)$$

$$J_{z_T} = J_z - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = 88725 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 13,82^2 = 19\,162 \text{ mm}^4, \quad (5.7)$$

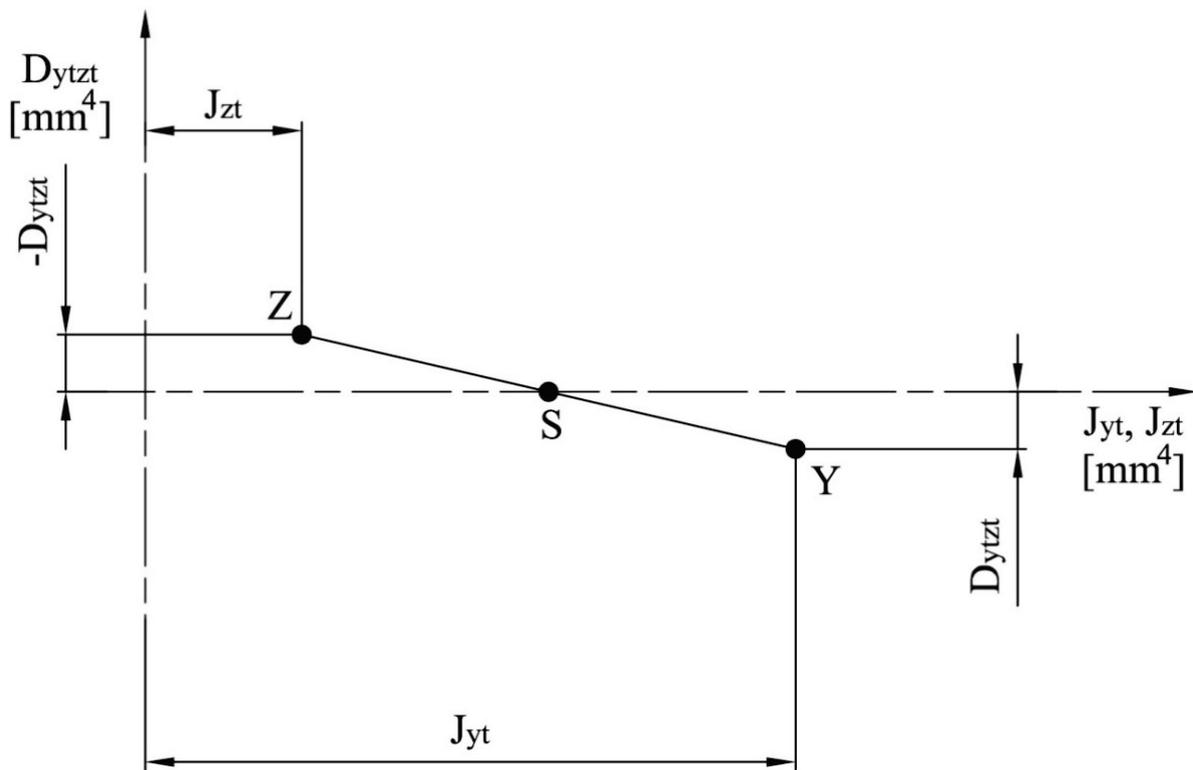
$$J_{y_T z_T} = J_{yz} - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T \cdot y_T = 112124 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68 \cdot 13,82 = -7\,013 \text{ mm}^4. \quad (5.8)$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 5.4).



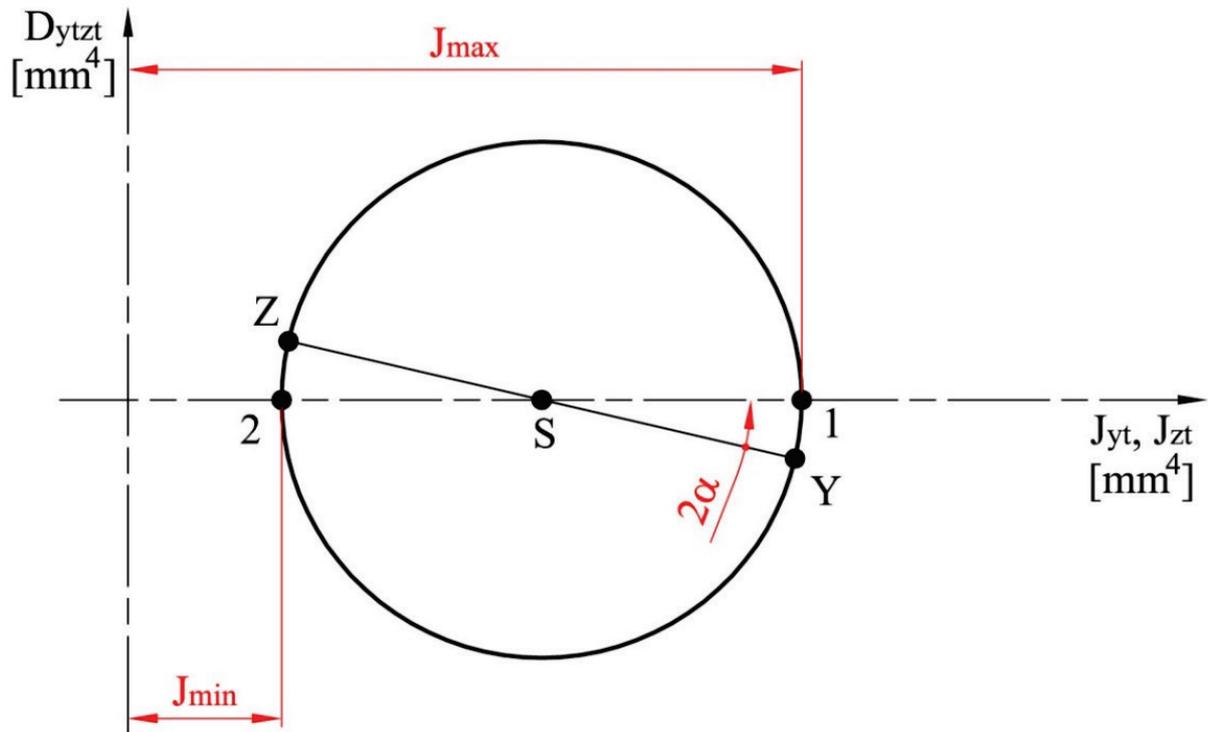


Obr. 5.4 Konstrukce Mohrovy kružnice

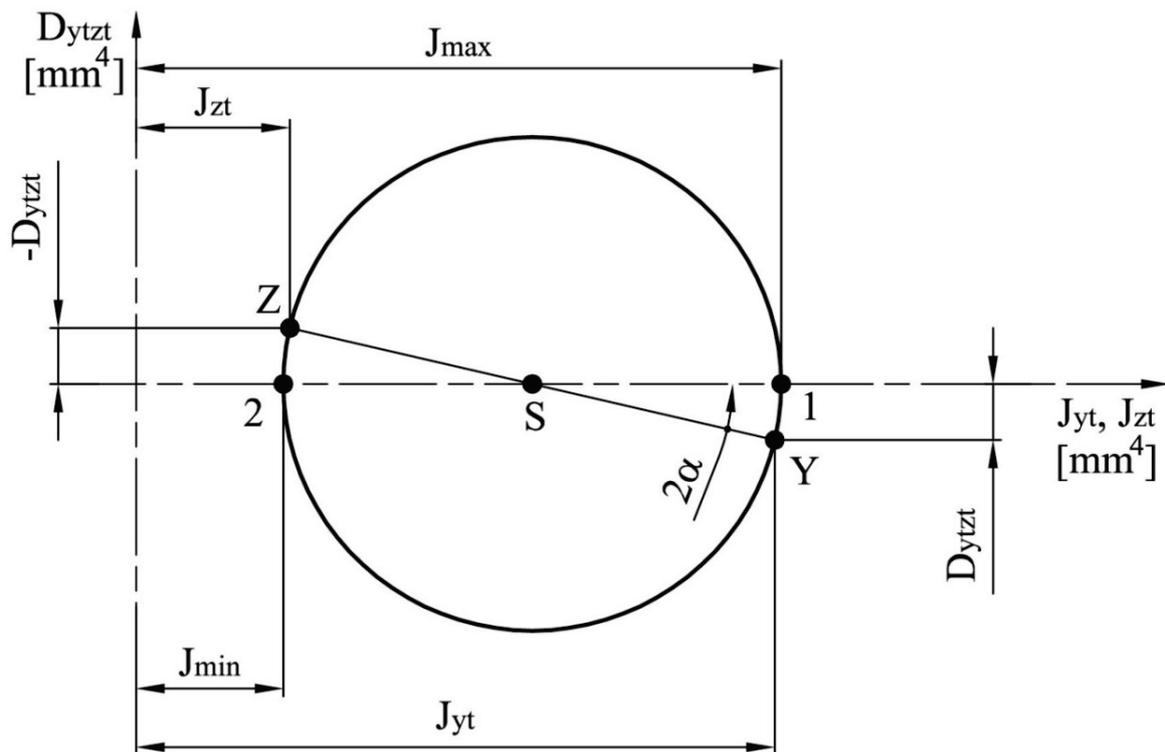


Obr. 5.5 Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 5.6 Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 5.7 Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (5.9)$$

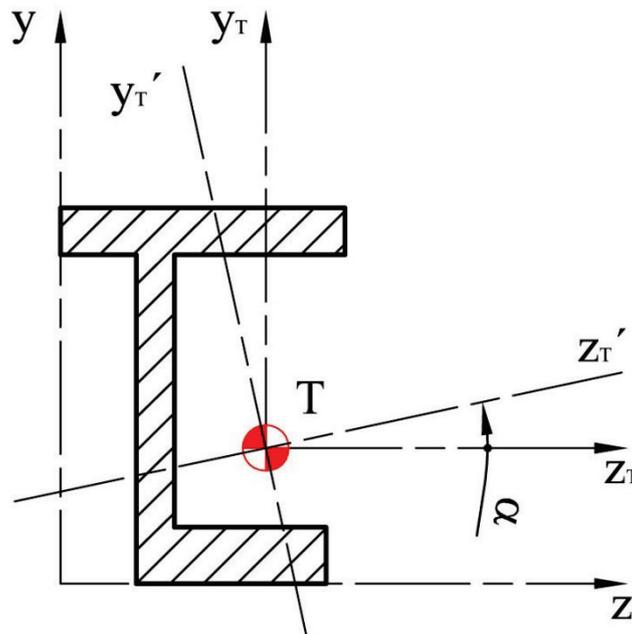


$$= \frac{79043 + 19162}{2} + \sqrt{\left(\frac{79043 - 19162}{2}\right)^2 + (-7013)^2} = \mathbf{79\ 853\ mm^4},$$

$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (5.10)$$

$$= \frac{79043 + 19162}{2} - \sqrt{\left(\frac{79043 - 19162}{2}\right)^2 + (-7013)^2} = \mathbf{18\ 352\ mm^4},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-7013)}{79043 - 19162} \right) \right| = \mathbf{6,59^\circ}. \quad (5.11)$$



Obr. 5.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady II

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

6	PŘÍKLADY II	3
6.1	Příklad 8	4
6.2	Příklad 9	9



6 PŘÍKLADY II



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

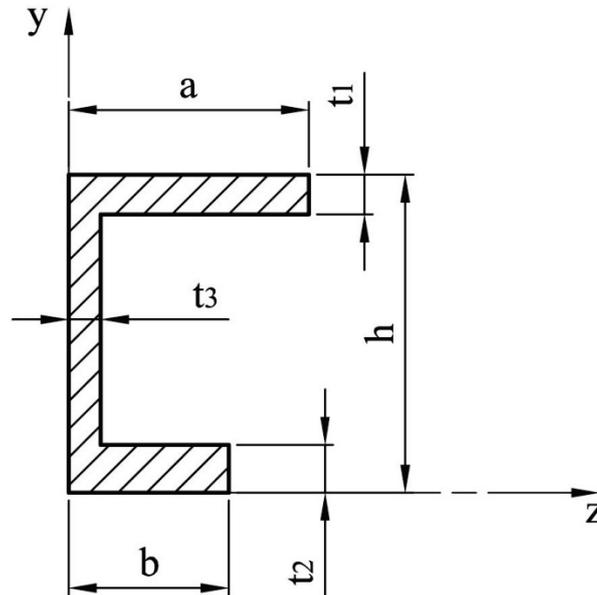
konstrukce Mohrovy kružnice.



6.1 PŘÍKLAD 8

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 6.1).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



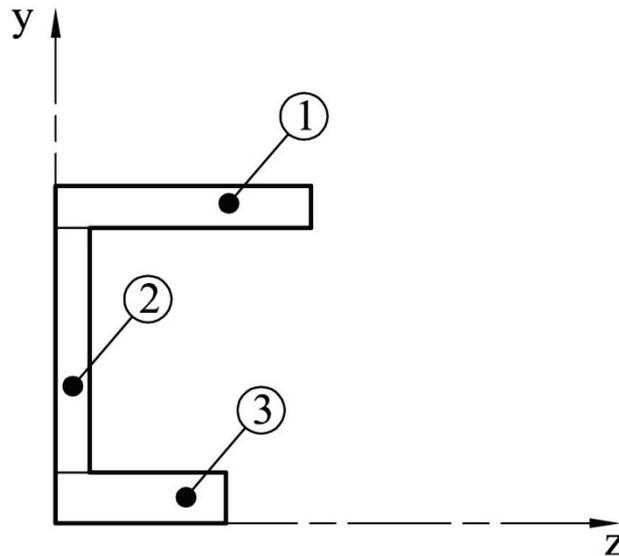
Obr. 6.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 6.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$\begin{aligned}
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \frac{t_3}{2} + b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 9,52 \text{ mm},
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \\
 &= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \\
 &= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} = \\
 &= 23,68 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$





Obr. 6.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

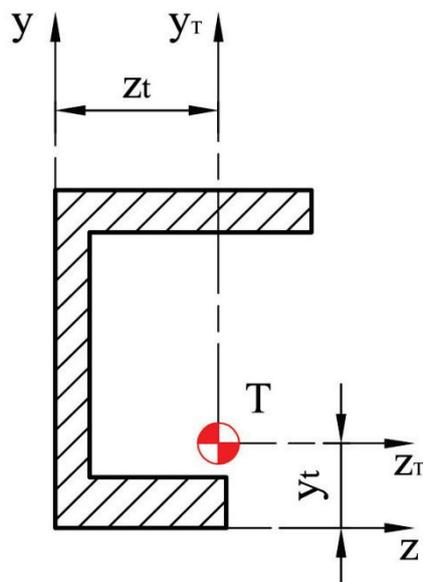
$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{a \cdot t_1^3}{12} + a \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{28 \cdot 6^3}{12} + 28 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 283\,081 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot a^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{3} + \frac{t_2 \cdot b^3}{3} = \\
 &= \frac{6 \cdot 28^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \frac{3 \cdot 24^3}{3} = 58\,389 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= a \cdot t_1 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \frac{t_3}{2} \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= 28 \cdot 6 \cdot \frac{28}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2} \cdot \frac{3}{2} = 92\,908 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.





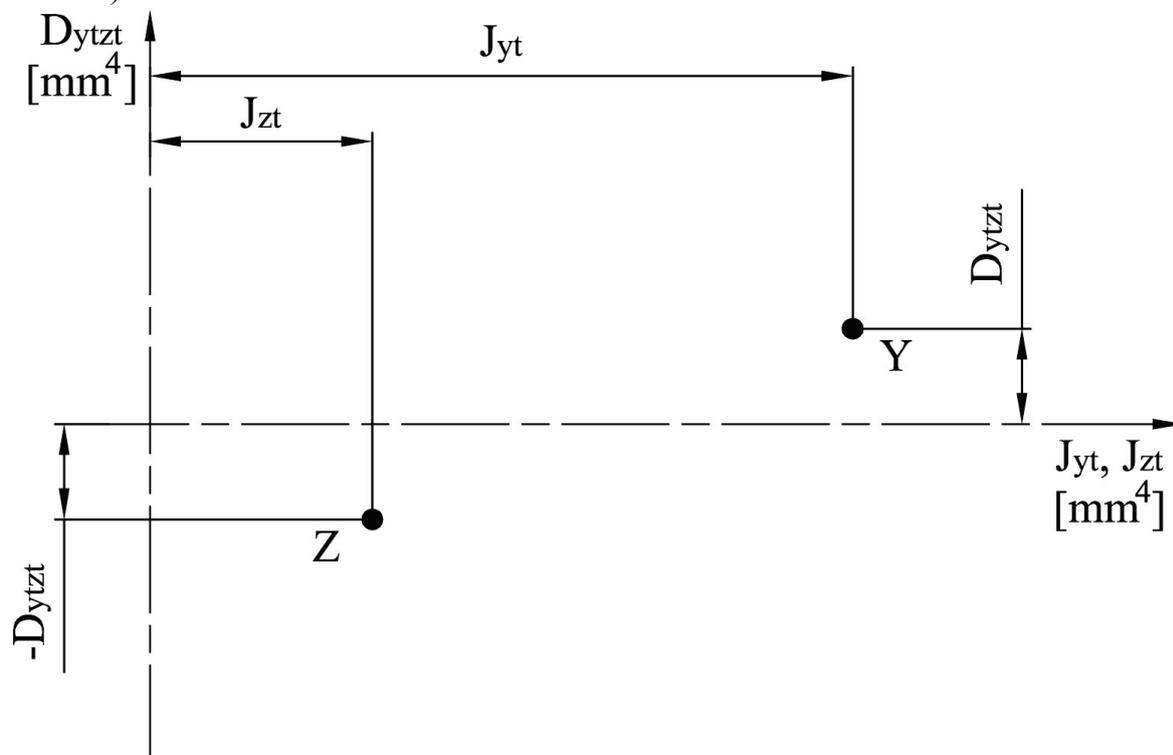
Obr. 6.3 Poloha těžiště složeného obrazce

$$J_{y_T} = J_y - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = 283081 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 23,68^2 = 79\,043 \text{ mm}^4, \quad (6.6)$$

$$J_{z_T} = J_z - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = 58389 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 9,52^2 = 25\,424 \text{ mm}^4, \quad (6.7)$$

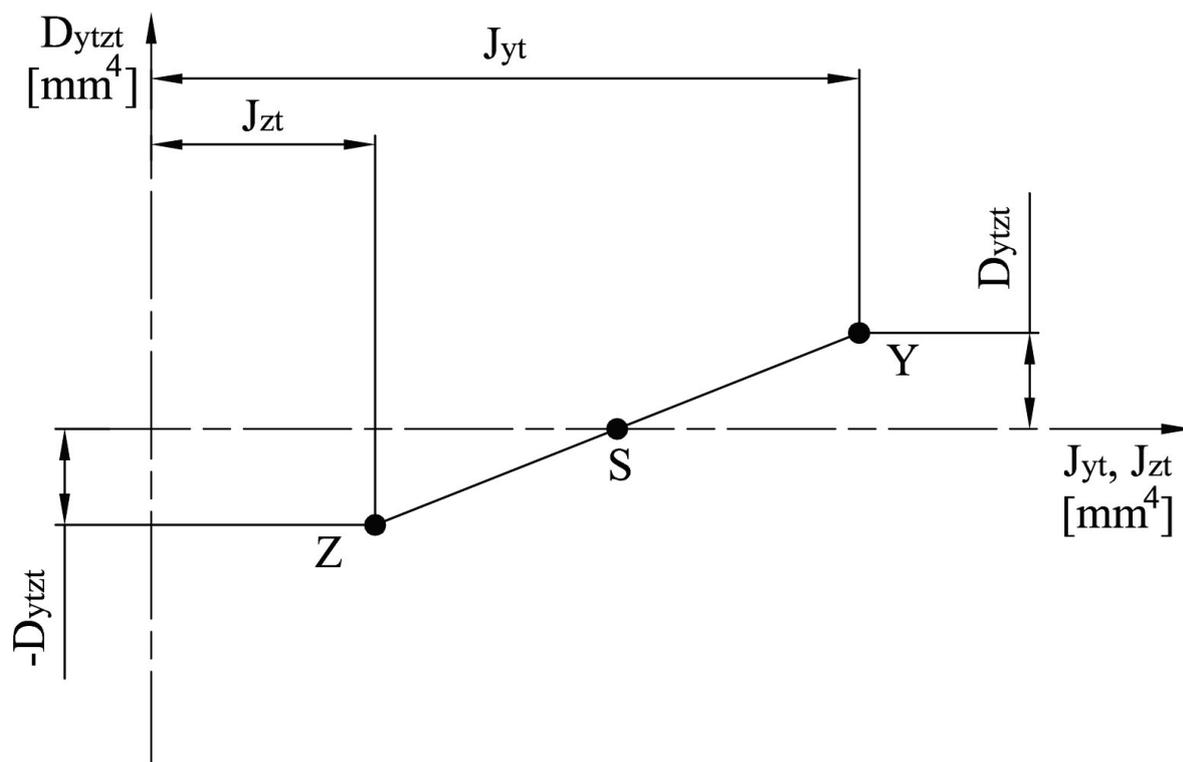
$$J_{y_T z_T} = J_{yz} - [a \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = 92908 - [28 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 9,52 \cdot 23,68 = 10\,895 \text{ mm}^4. \quad (6.8)$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 6.4 až Obr. 6.7).

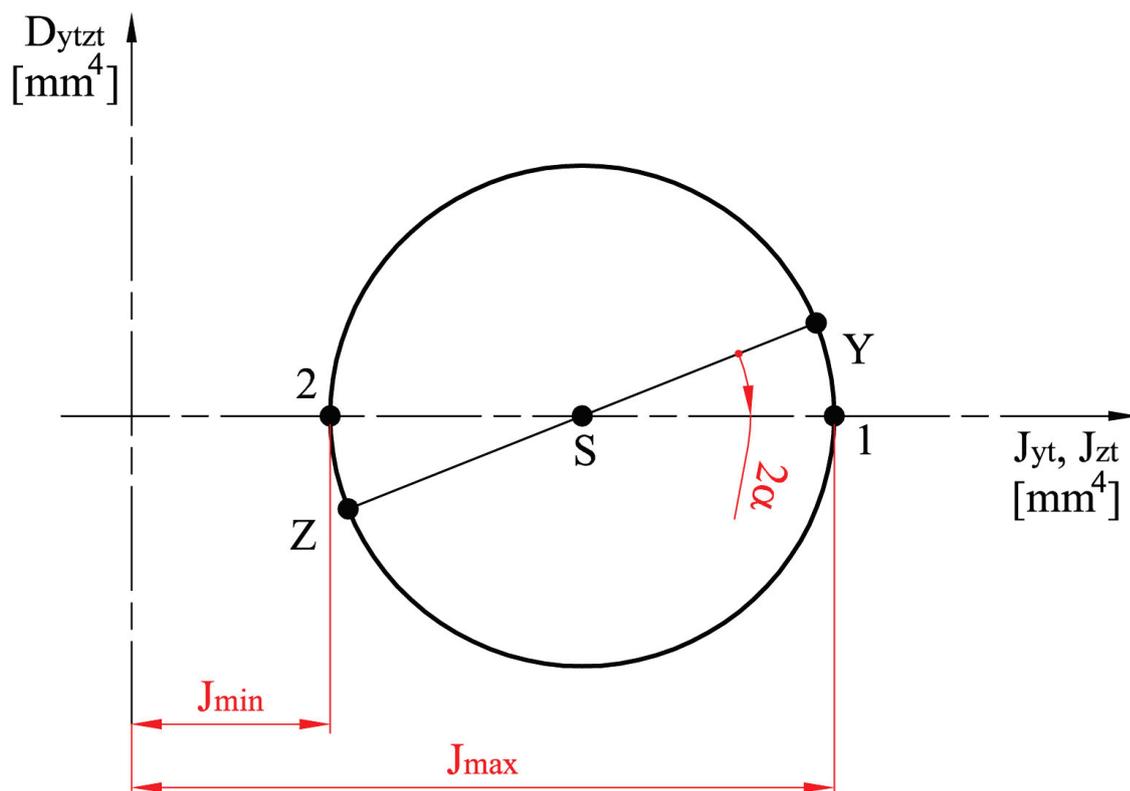


Obr. 6.4 - Konstrukce Mohrovy kružnice



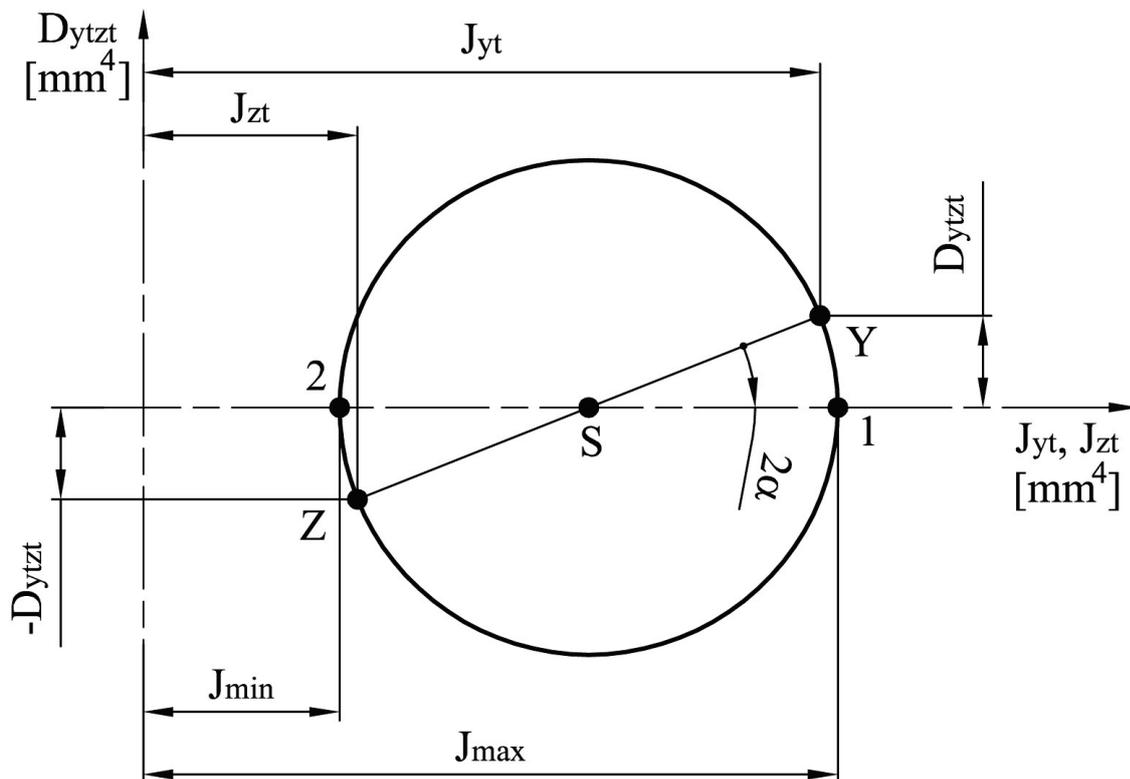


Obr. 6.5 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 6.6 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 6.7 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

$$= \frac{79043 + 25424}{2} + \sqrt{\left(\frac{79043 - 25424}{2}\right)^2 + 10895^2} = \mathbf{81\,172\,mm^4}, \quad (6.9)$$

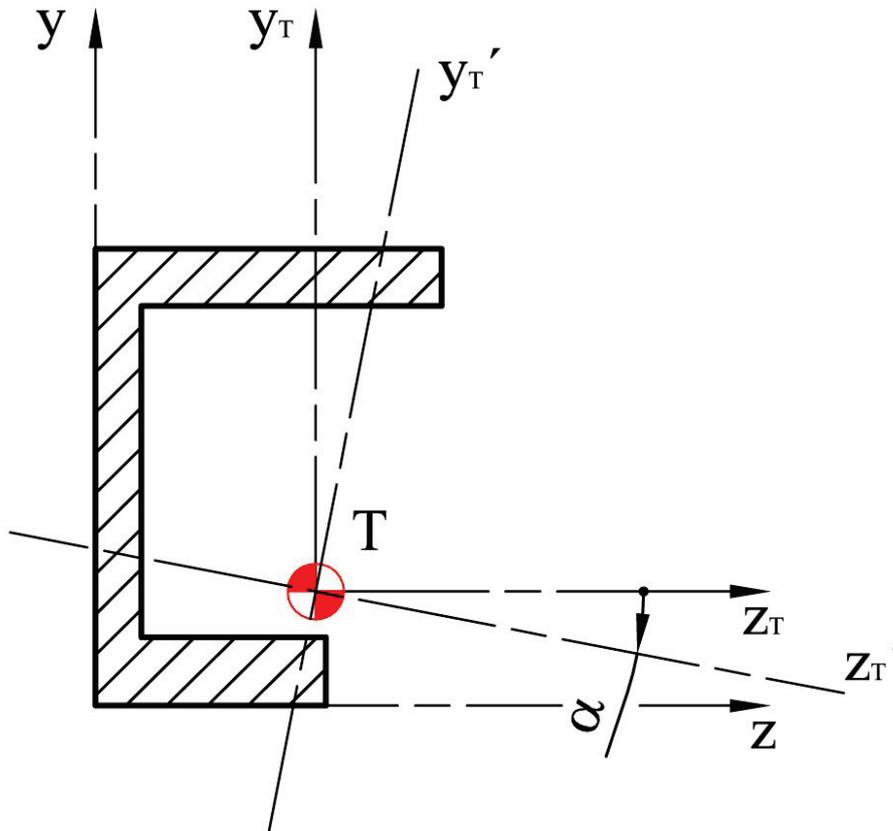
$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

$$= \frac{79043 + 25424}{2} - \sqrt{\left(\frac{79043 - 25424}{2}\right)^2 + 10895^2} = \mathbf{23\,295\,mm^4}, \quad (6.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot 10895}{79043 - 25424} \right) \right| = \mathbf{11,06^\circ}. \quad (6.11)$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = -11,06^\circ$.



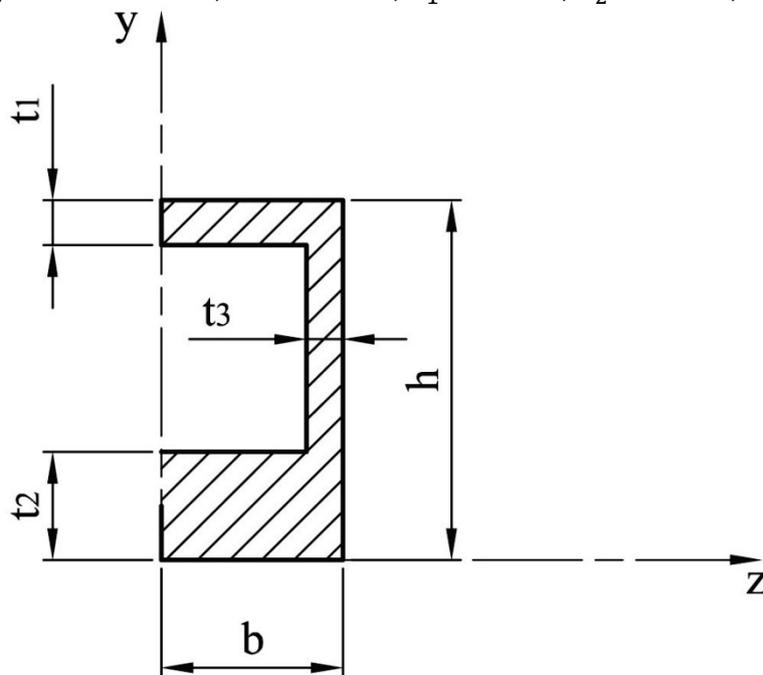


Obr. 6.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

6.2 PŘÍKLAD 9

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 6.9).

Zadané hodnoty jsou $b = 24 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



Obr. 6.9 Rozměry průřezu



Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 6.9). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} =$$

$$= \frac{\frac{b}{2} \cdot b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{t_3}{2} + b - t_3\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2}}{b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} =$$

$$= \frac{\frac{24}{2} \cdot 24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 24 - 4\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2}}{24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} =$$

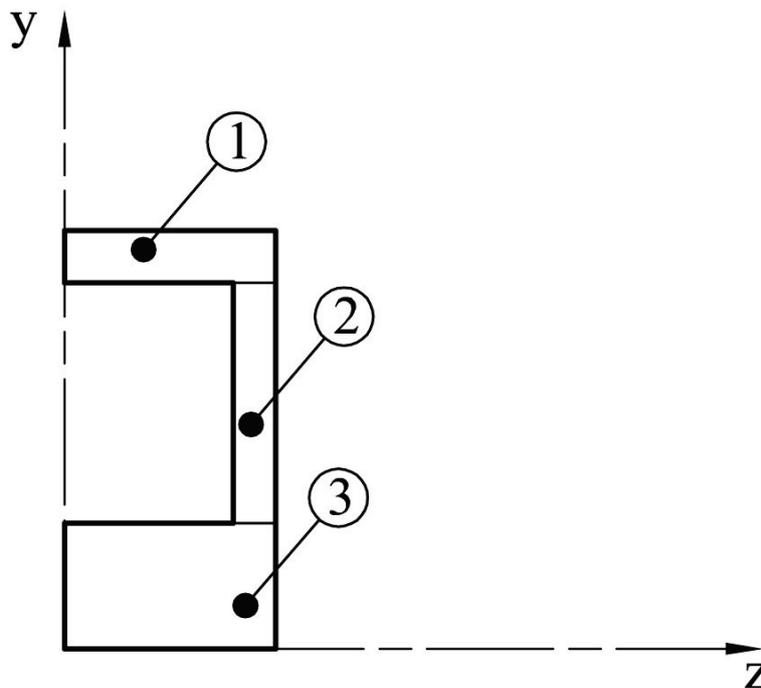
$$= 15,65 \text{ mm},$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} =$$

$$= \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} =$$

$$= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot 24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} =$$

$$= 22,74 \text{ mm}.$$



Obr. 6.10 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

$$J_y = \frac{b \cdot t_1^3}{12} + b \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} +$$

$$+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} =$$

$$= \frac{24 \cdot 6^3}{12} + 24 \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} +$$

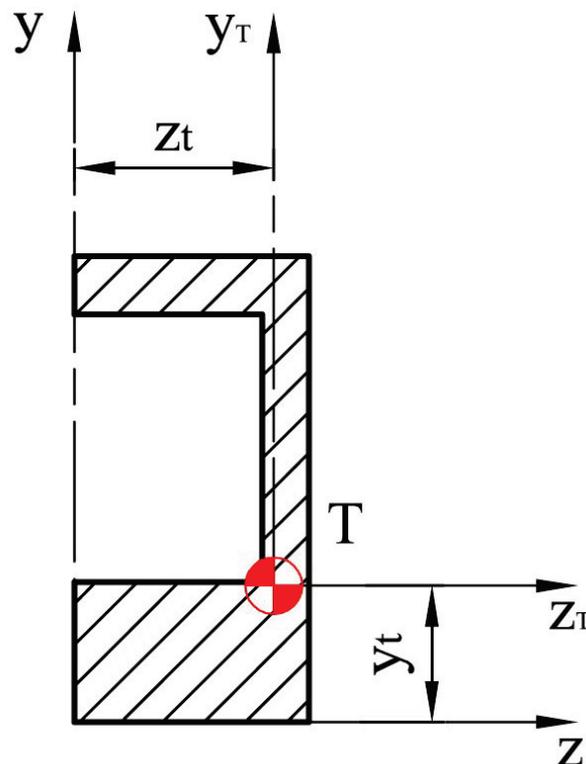
$$+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 250\,153 \text{ mm}^4,$$



$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot b^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(b - \frac{t_3}{2}\right)^2 + \frac{t_2 \cdot b^3}{3} = \\
 &= \frac{6 \cdot 24^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \\
 &(40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(24 - \frac{4}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 24^3}{3} = 101\,653 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= b \cdot t_1 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(b - \frac{t_3}{2}\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= 24 \cdot 6 \cdot \frac{24}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(24 - \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \frac{24}{2} \cdot \frac{3}{2} = 115\,700 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.



Obr. 6.11 Poloha těžiště složeného obrazce

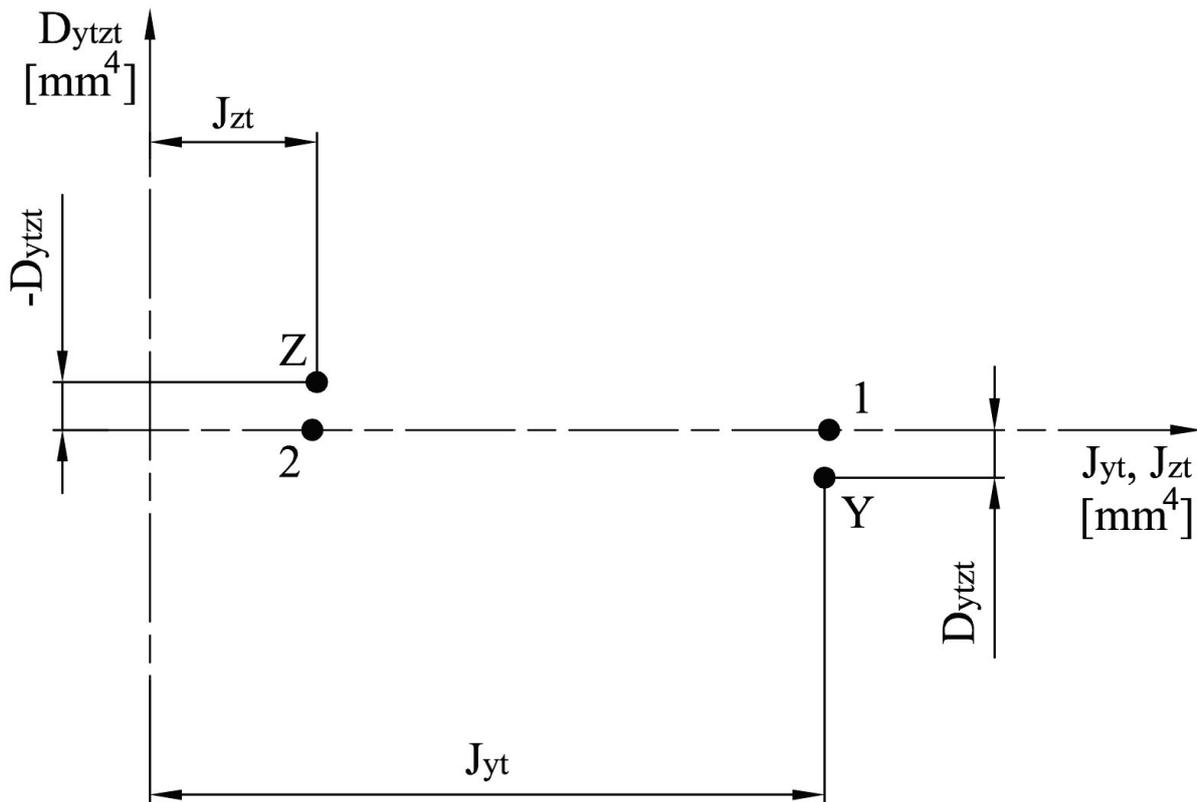
$$\begin{aligned}
 J_{yT} &= J_y - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = \\
 &= 250153 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 22,74^2 = 74\,410 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
 J_{zT} &= J_z - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = \\
 &= 101653 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 15,65^2 = 18\,411 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

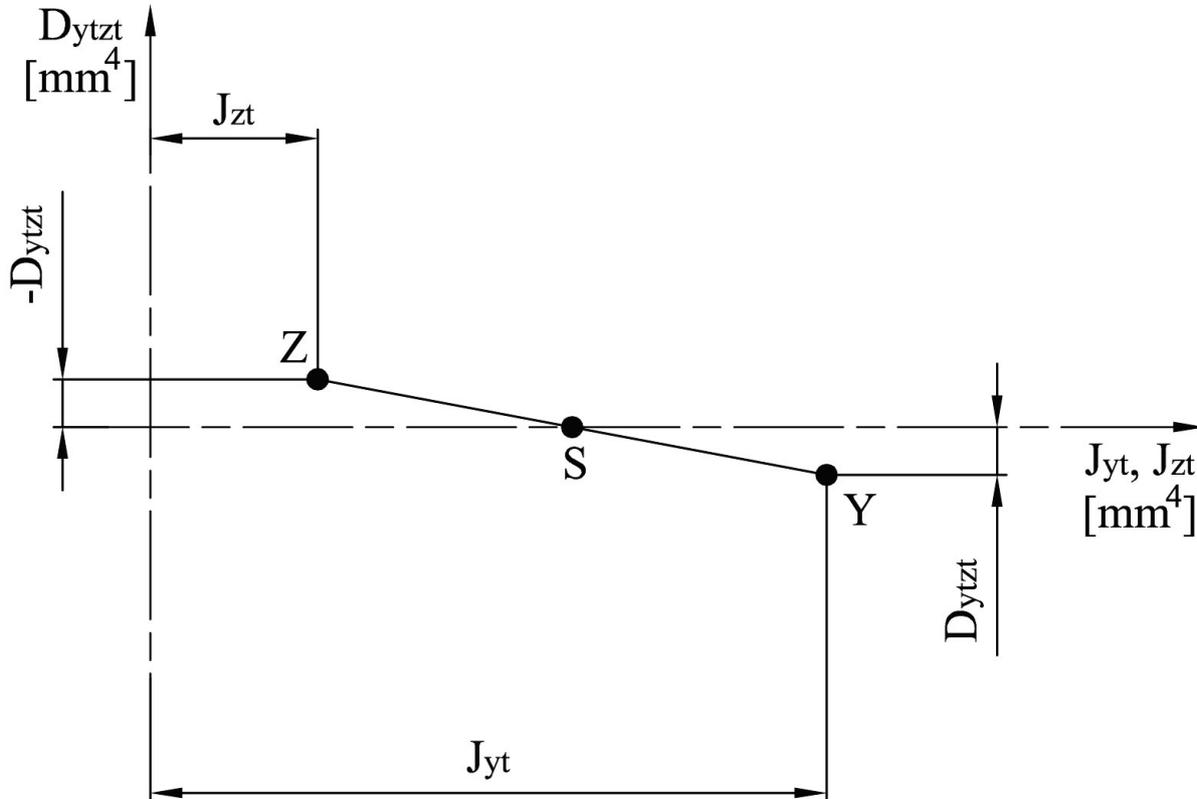
$$\begin{aligned}
 J_{yTzT} &= J_{yz} - [b \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = \\
 &= 115700 - [24 \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 15,65 \cdot 22,74 \\
 &= -5\,252 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$



K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 6.12 až Obr. 6.15).

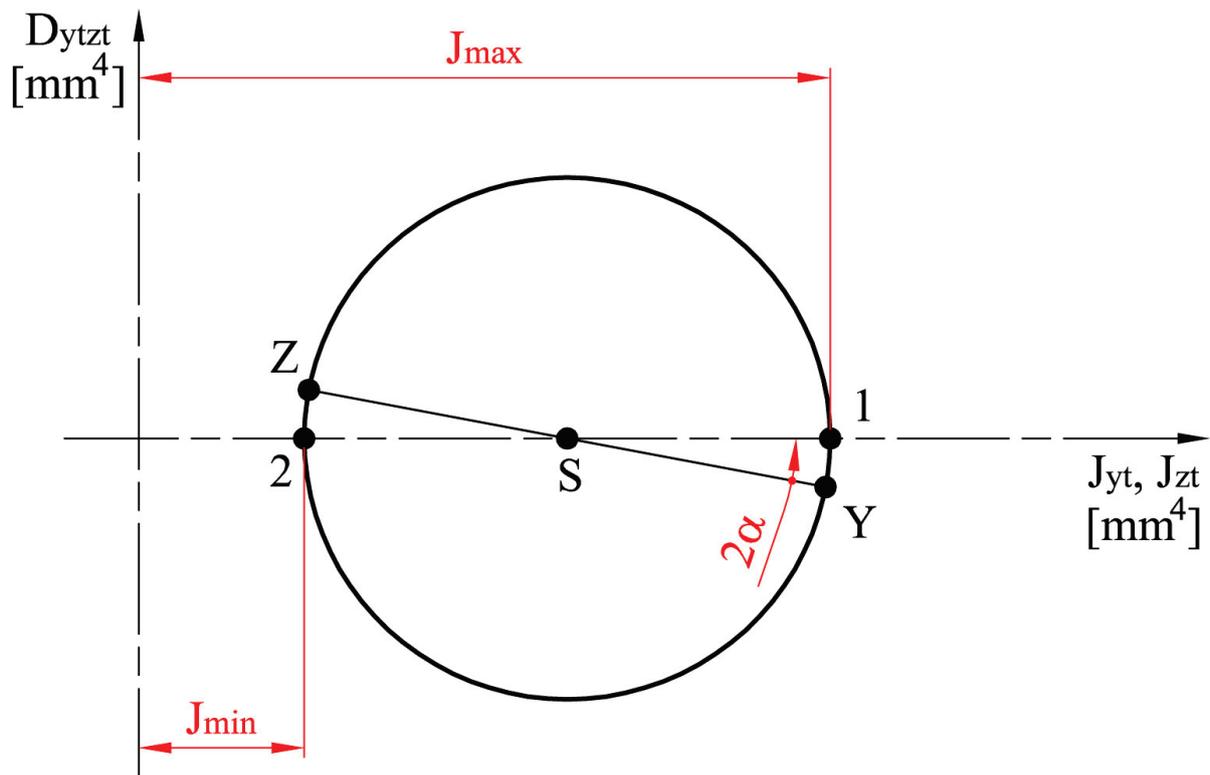


Obr. 6.12 - Konstrukce Mohrovy kružnice

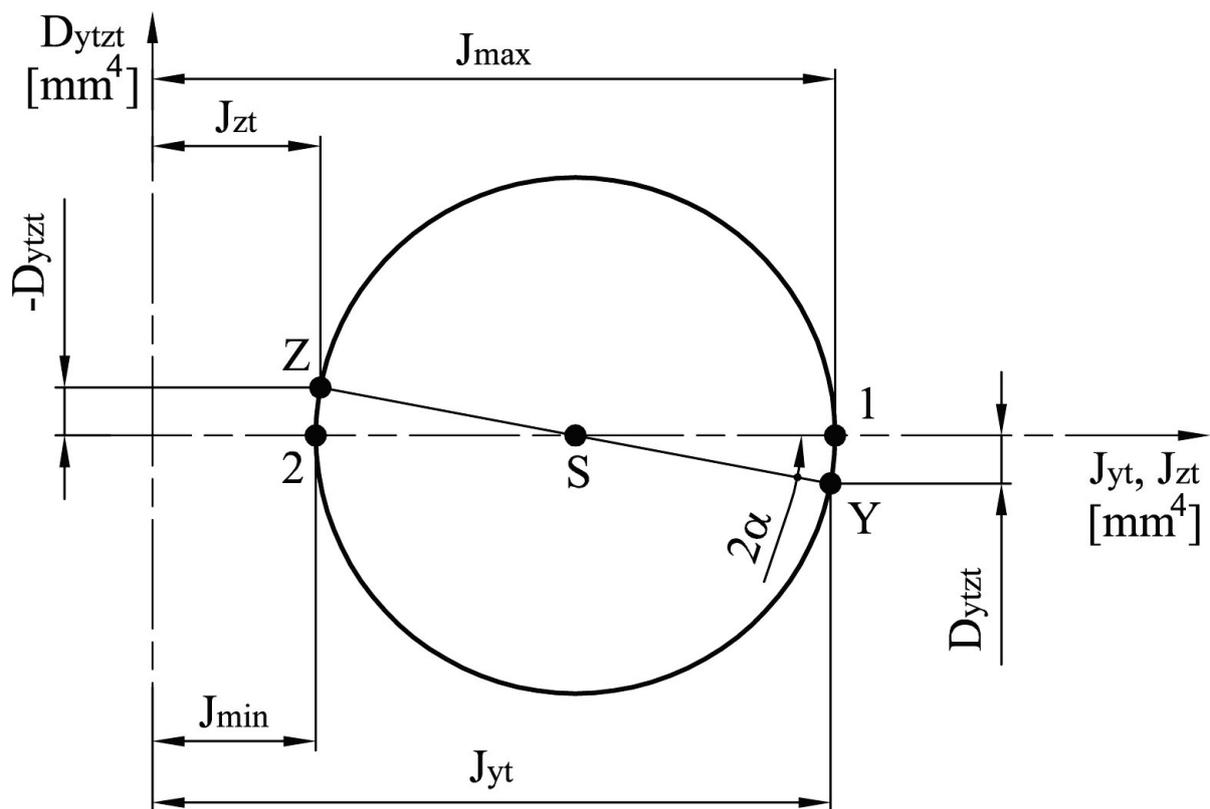


Obr. 6.13 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 6.14 - Konstrukce Mohrovy kružnice



Obr. 6.15 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (6.20)$$



$$= \frac{74410 + 18411}{2} + \sqrt{\left(\frac{74410 - 18411}{2}\right)^2 + (-5252)^2} = \mathbf{74\ 898\ mm^4},$$

$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} =$$

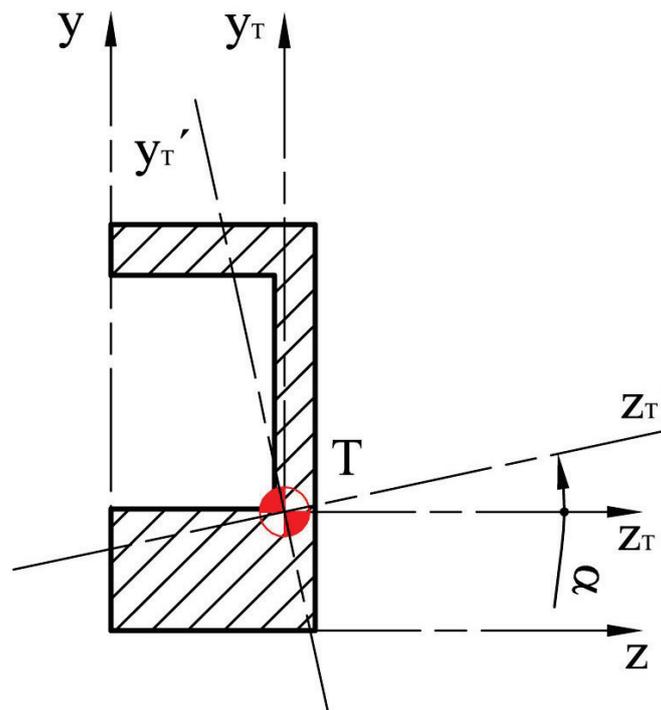
$$= \frac{74410 + 18411}{2} - \sqrt{\left(\frac{74410 - 18411}{2}\right)^2 + (-5252)^2} = \mathbf{17\ 923\ mm^4},$$

(6.21)

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-5252)}{74410 - 18411} \right) \right| = \mathbf{5,31^\circ}.$$

(6.22)

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = +5,31^\circ$.



Obr. 6.16 Zobrazení polohy hlavních centrálních os



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady III

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

7	PŘÍKLADY III.....	3
7.1	Příklad 10.....	4
7.2	Příklad 11.....	10



7 PŘÍKLADY III



OBSAH KAPITOLY:

Kvadratický moment průřezu a těžiště plochy.

Steinerova věta.



CÍL:

Těžiště obecné plochy,

kvadratický moment průřezu,

kvadratický moment průřezu k posunutým osám,

kvadratický moment průřezu k pootočeným osám,

deviační moment,

centrální moment průřezu,

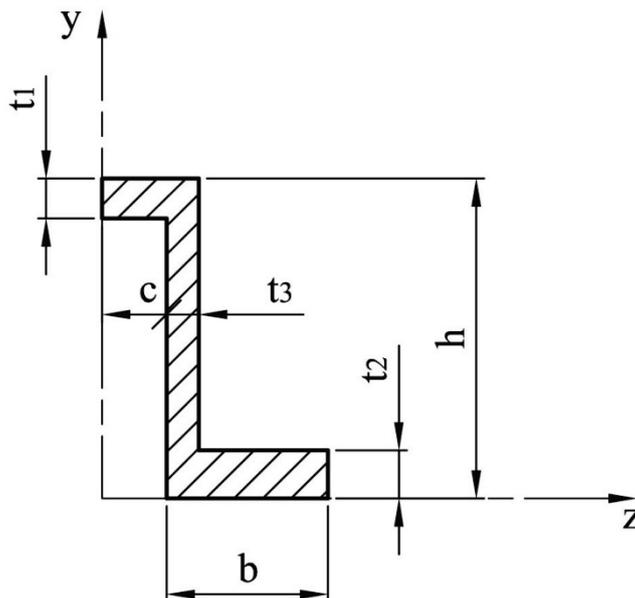
konstrukce Mohrovy kružnice.



7.1 PŘÍKLAD 10

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 7.1).

Zadané hodnoty jsou $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$; $t_1 = 6 \text{ mm}$; $t_2 = 3 \text{ mm}$; $t_3 = 4 \text{ mm}$.



Obr. 7.1 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 7.1). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \frac{\frac{c+t_3}{2} \cdot (c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c + \frac{t_3}{2}\right) + b \cdot t_2 \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right)}{(c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \quad (7.1)$$

$$= \frac{\frac{8+4}{2} \cdot (8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{2}\right) + 24 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{24}{2}\right)}{(8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} =$$

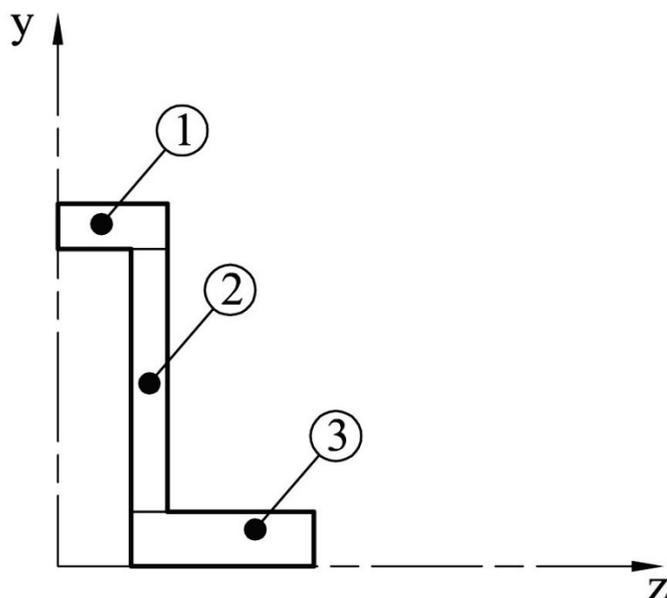
$$= 11,61 \text{ mm},$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^3 z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^3 S_i} = \frac{\left(h - \frac{t_1}{2}\right) \cdot (c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h-t_1-t_2}{2} + t_2\right) + b \cdot t_2 \cdot \frac{t_2}{2}}{(c+t_3) \cdot t_1 + (h-t_1-t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2} = \quad (7.2)$$

$$= \frac{\left(40 - \frac{6}{2}\right) \cdot (8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40-6-3}{2} + 3\right) + 24 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{(8+4) \cdot 6 + (40-6-3) \cdot 4 + 24 \cdot 3} =$$

$$= 18,90 \text{ mm}.$$





Obr. 7.2 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

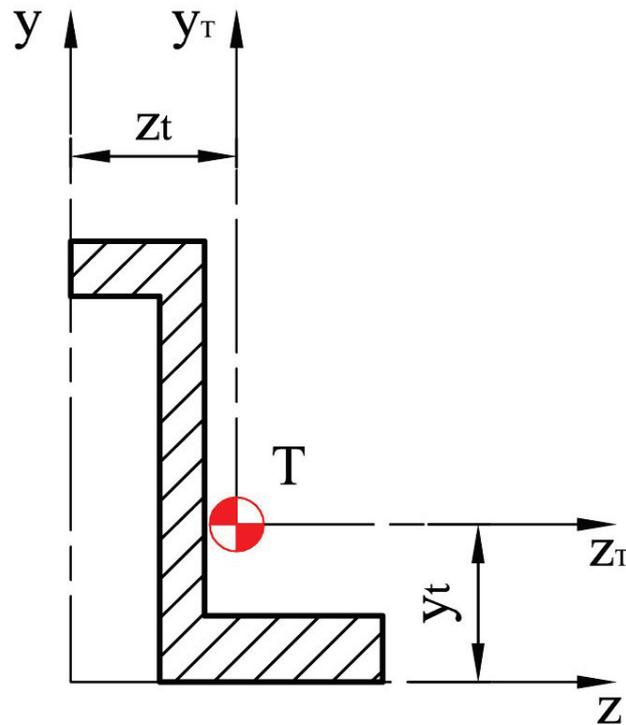
$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{(c + t_3) \cdot t_1^3}{12} + (c + t_3) \cdot t_1 \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{(h - t_1 - t_2)^3 \cdot t_3}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right)^2 + \frac{b \cdot t_2^3}{3} = \\
 &= \frac{(8 + 4) \cdot 6^3}{12} + (8 + 4) \cdot 6 \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right)^2 + \frac{(40 - 6 - 3)^3 \cdot 4}{12} + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right)^2 + \frac{24 \cdot 3^3}{3} = 151\,369 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{t_1 \cdot (c + t_3)^3}{3} + \frac{t_3^3 \cdot (h - t_1 - t_2)}{12} + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c + \frac{t_3}{2}\right)^2 + \frac{t_2 \cdot b^3}{12} + b \cdot t_2 \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right)^2 = \\
 &= \frac{6 \cdot (8 + 4)^3}{3} + \frac{4^3 \cdot (40 - 6 - 3)}{12} + \\
 &(40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{24}{2}\right)^2 = 48\,277 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= (c + t_3) \cdot t_1 \cdot \frac{(c + t_3)}{2} \cdot \left(h - \frac{t_1}{2}\right) + \\
 &+ (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 \cdot \left(c + \frac{t_3}{2}\right) \cdot \left(\frac{h - t_1 - t_2}{2} + t_2\right) + \\
 &+ b \cdot t_2 \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{t_2}{2} = \\
 &= (8 + 4) \cdot 6 \cdot \frac{(8 + 4)}{2} \cdot \left(40 - \frac{6}{2}\right) + \\
 &+ (40 - 6 - 3) \cdot 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{40 - 6 - 3}{2} + 3\right) + \\
 &+ 24 \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{24}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = 41\,084 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.





Obr. 7.3 Těžiště dílčích ploch

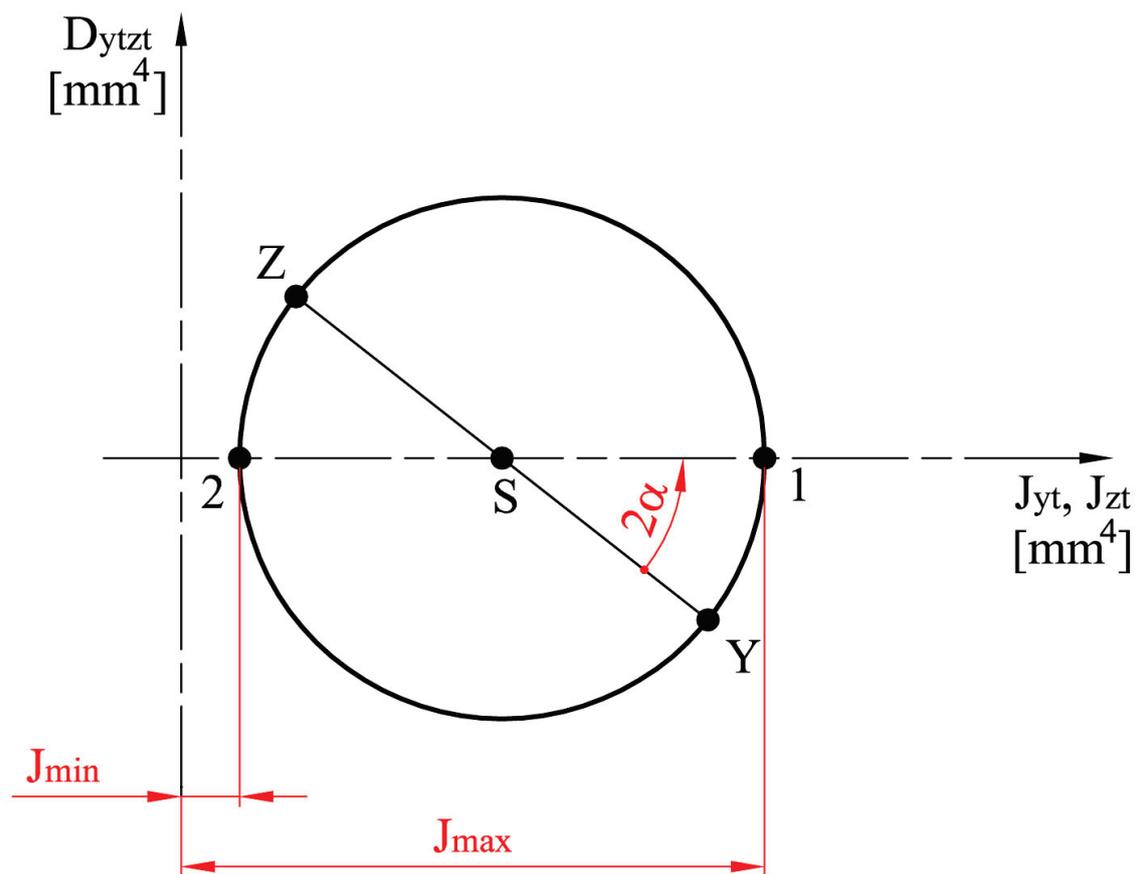
$$\begin{aligned}
 J_{y_T} &= J_y - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot z_T^2 = \\
 &= 151369 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 18,90^2 = \\
 &= 55\,607 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_T} &= J_z - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T^2 = \\
 &= 48277 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 11,61^2 = 12\,141 \text{ mm}^4,
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
 J_{y_T z_T} &= J_{yz} - [(c + t_3) \cdot t_1 + (h - t_1 - t_2) \cdot t_3 + b \cdot t_2] \cdot y_T \cdot z_T = \\
 &= 41084 - [(8 + 4) \cdot 6 + (40 - 6 - 3) \cdot 4 + 24 \cdot 3] \cdot 11,61 \cdot 18,90 = \\
 &= -17\,742 \text{ mm}^4.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

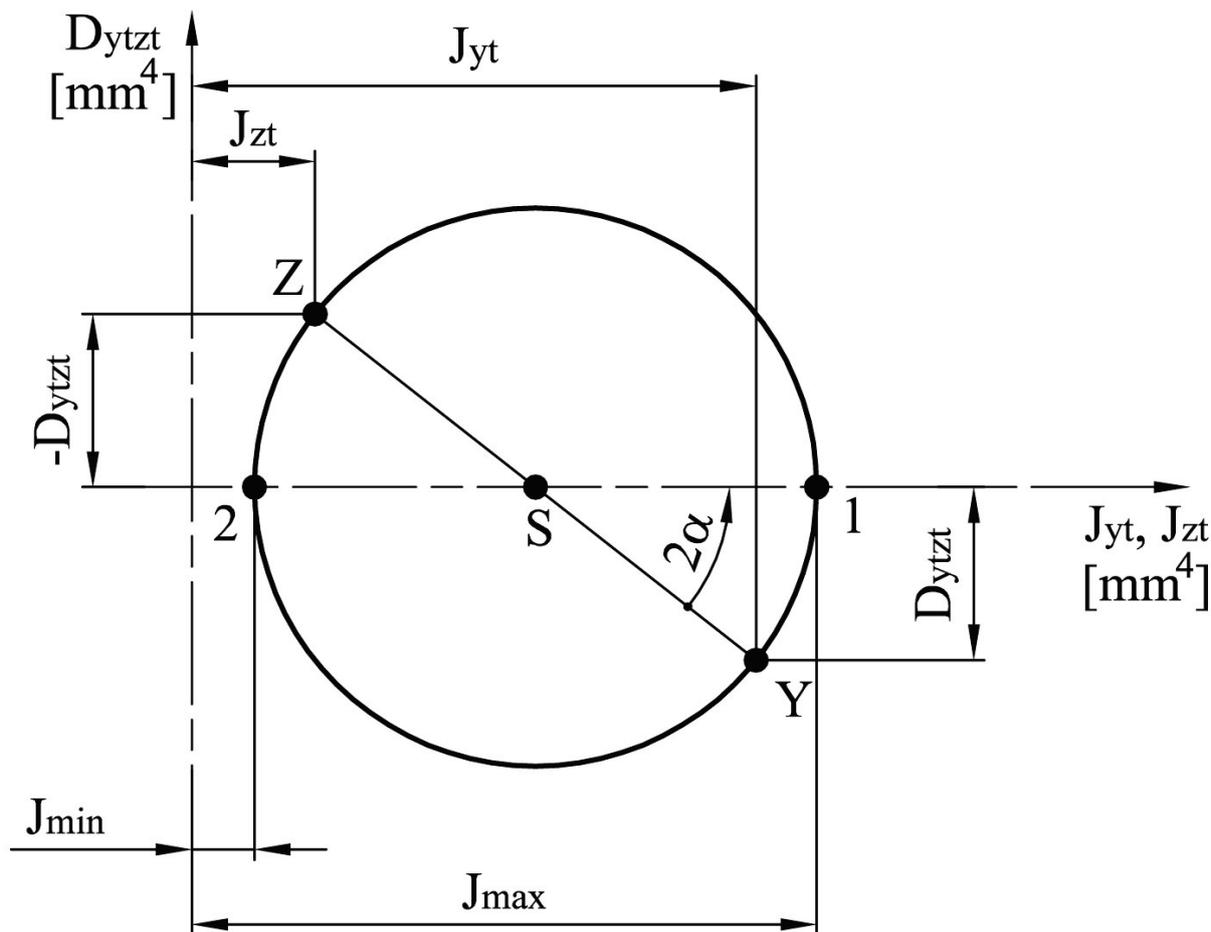
K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 7.4 až Obr. 7.7).





Obr. 7.6 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 7.7 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

$$J_{max} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (7.9)$$

$$= \frac{55607 + 12141}{2} + \sqrt{\left(\frac{55607 - 12141}{2}\right)^2 + (-17742)^2} = \mathbf{61\,929\,mm^4},$$

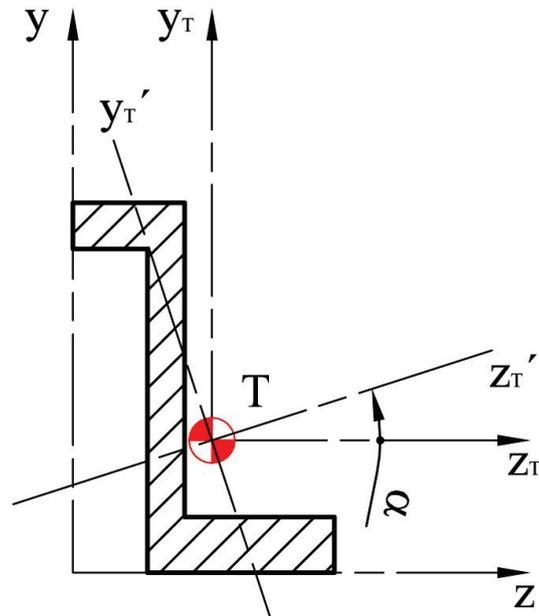
$$J_{min} = \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \quad (7.10)$$

$$= \frac{55607 + 12141}{2} - \sqrt{\left(\frac{55607 - 12141}{2}\right)^2 + (-17742)^2} = \mathbf{5\,819\,mm^4},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot (-17742)}{55607 - 12141} \right) \right| = \mathbf{19,61^\circ}. \quad (7.11)$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = +19,61^\circ$.



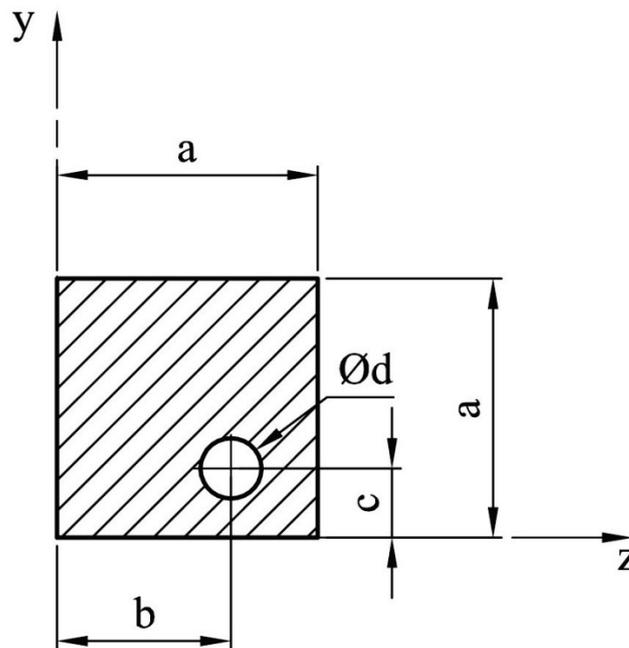


Obr. 7.8 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

7.2 PŘÍKLAD 11

Vypočítejte momenty setrvačnosti u zadaného průřezu (viz Obr. 7.9).

Zadané hodnoty jsou $a = 28 \text{ mm}$; $b = 24 \text{ mm}$; $c = 8 \text{ mm}$; $d = 7 \text{ mm}$; $h = 40 \text{ mm}$;



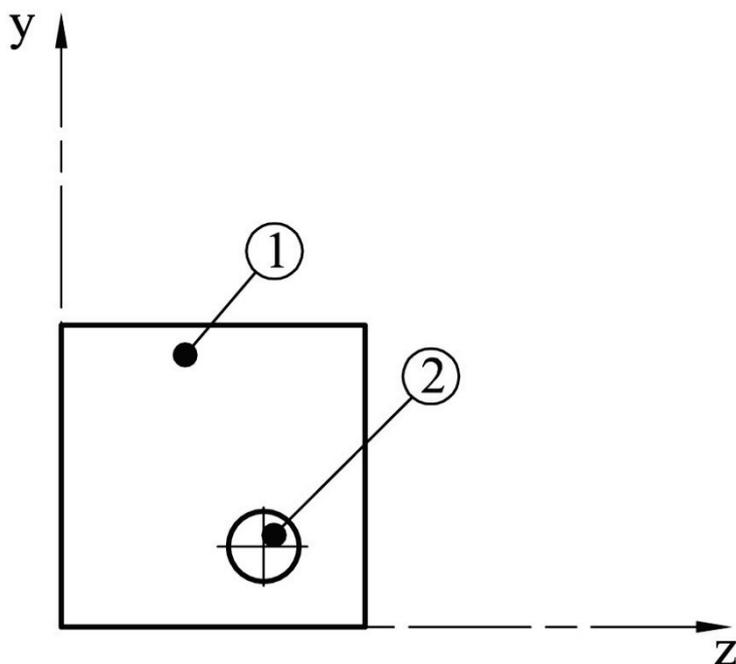
Obr. 7.9 Rozměry průřezu

Zvolíme si souřadný systém, jehož počátek je umístěn v levém dolním rohu (viz Obr. 7.9). Pomocí zvoleného souřadného systému vypočítáme těžiště a kvadratické momenty průřezu ke zvoleným osám.

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot a - b \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{a \cdot a - \frac{\pi d^2}{4}} = \quad (7.12)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 28 - 24 \cdot \frac{\pi \cdot 7^2}{4}}{28 \cdot 28 - \frac{\pi \cdot 7^2}{4}} = 13,48 \text{ mm}, \\
z_T &= \frac{\sum_{i=1}^2 z_{Ti} S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot a - c \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{a \cdot a - \frac{\pi d^2}{4}} = \\
&= \frac{\frac{28}{2} \cdot 28 \cdot 28 - 8 \cdot \frac{\pi \cdot 7^2}{4}}{28 \cdot 28 - \frac{\pi \cdot 7^2}{4}} = 14,31 \text{ mm}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$



Obr. 7.10 Rozdělení na jednotlivé základní tvary

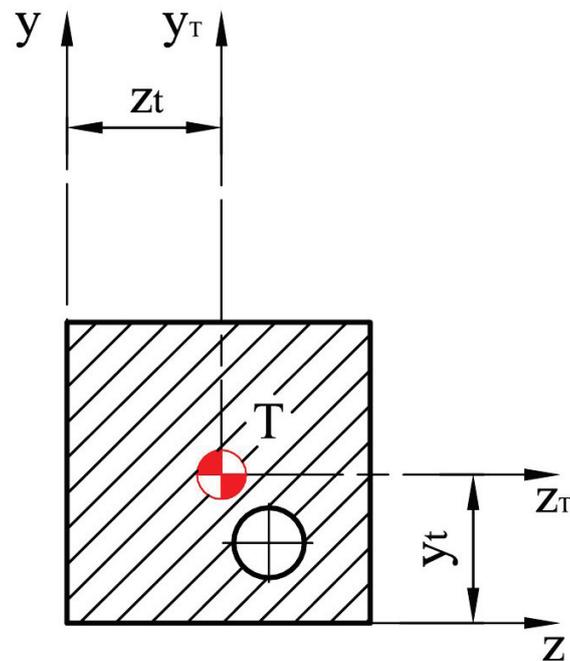
$$\begin{aligned}
J_y &= \frac{a^4}{3} - \left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot c^2 \right) = \\
&= \frac{28^4}{3} - \left(\frac{\pi \cdot 7^4}{64} + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 8^2 \right) = 202\,304 \text{ mm}^4,
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
J_z &= \frac{a^4}{3} - \left(\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot b^2 \right) = \\
&= \frac{28^4}{3} - \left(\frac{\pi \cdot 7^4}{64} + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 24^2 \right) = 182\,600 \text{ mm}^4,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
J_{yz} &= a \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{\pi d^2}{4} \cdot b \cdot c = \\
&= 28 \cdot 28 \cdot \frac{28}{2} \cdot \frac{28}{2} - \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \cdot 24 \cdot 8 = 146\,275 \text{ mm}^4.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Zadaný průřez nemá osu symetrie, k výpočtu kvadratických momentů průřezu k těžištním osám lze použít například Steinerovu větu.





Obr. 7.11 Poloha těžiště složeného obrazce

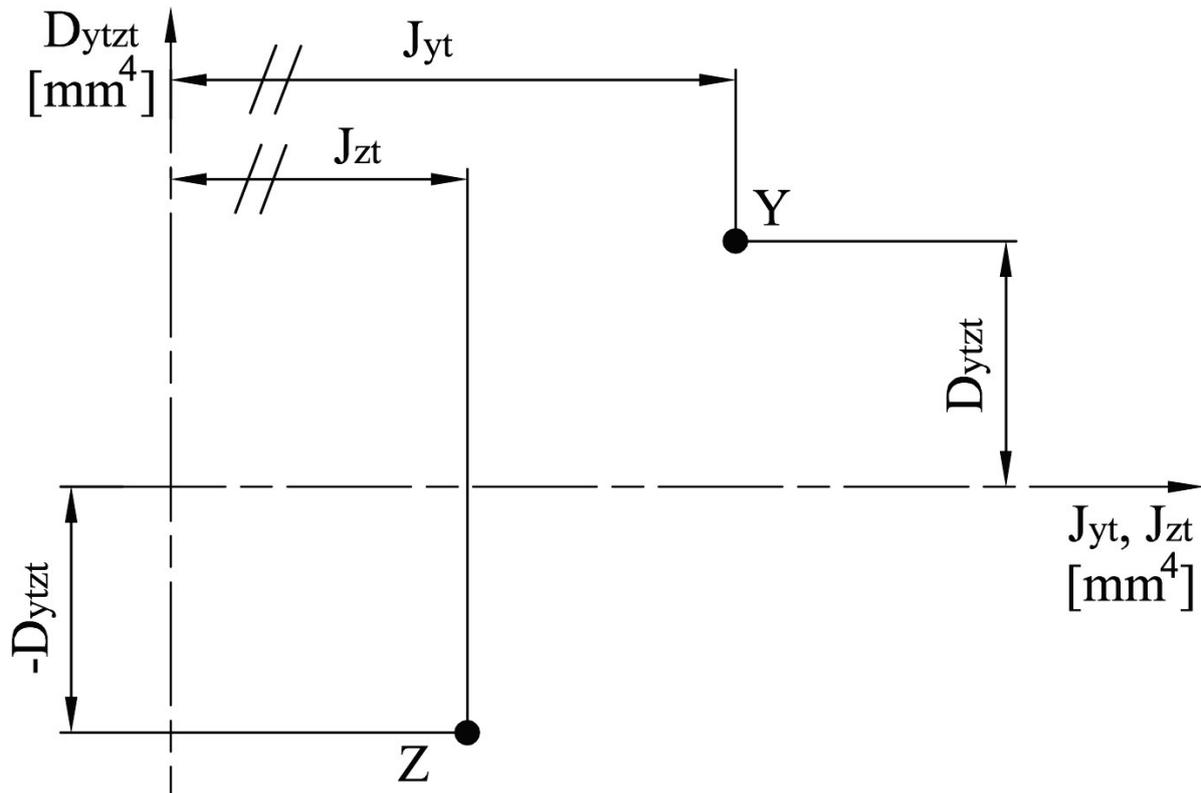
$$\begin{aligned}
 J_{y_T} &= J_y - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot z_T^2 = \\
 &= 202304 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 14,31^2 = 49\,647 \text{ mm}^4,
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_T} &= J_z - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot y_T^2 = \\
 &= 182600 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 13,48^2 = 47\,056 \text{ mm}^4,
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

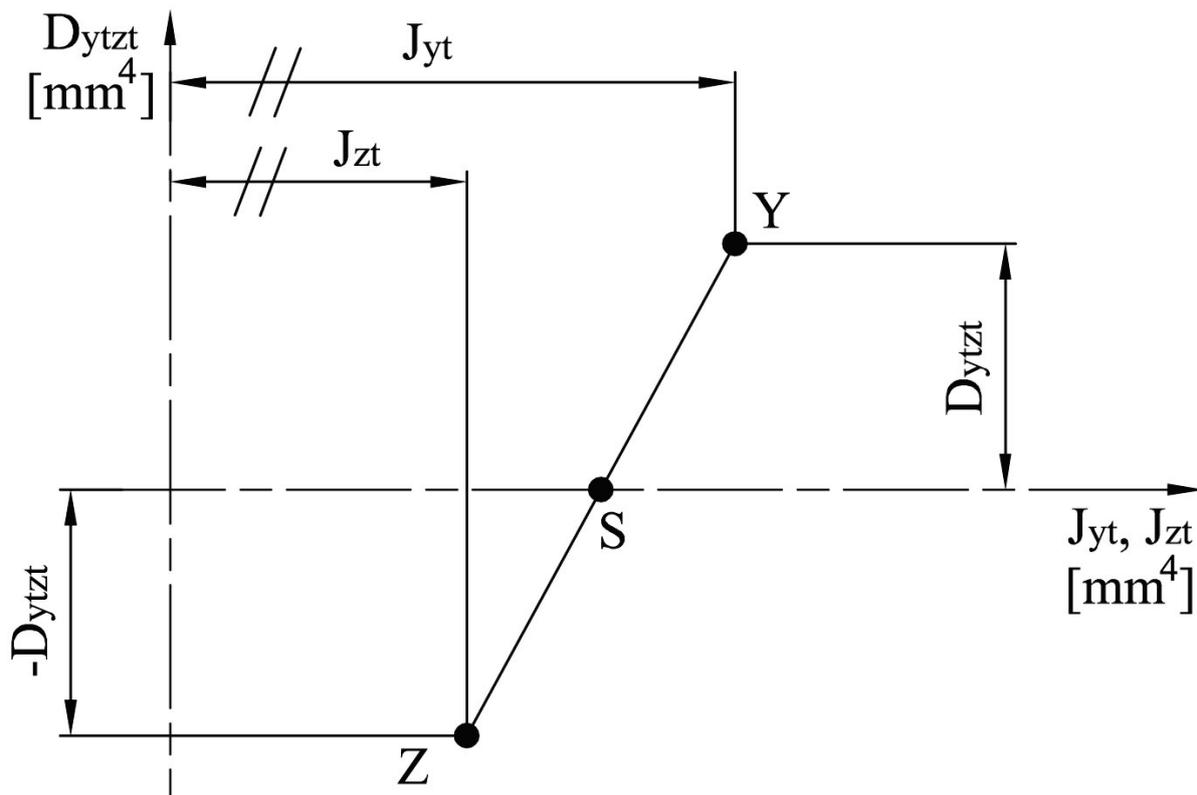
$$\begin{aligned}
 J_{y_T z_T} &= J_{yz} - \left(a \cdot a + \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot y_T \cdot z_T = \\
 &= 146275 - \left(28 \cdot 28 + \frac{\pi \cdot 7^2}{4} \right) \cdot 13,48 \cdot 14,31 = 2\,428 \text{ mm}^4.
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

K určení hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu a úhlu pootočení od těžištní osy lze použít grafické řešení, které spočívá v konstrukci Mohrovy kružnice (viz Obr. 7.12 až Obr. 7.15).



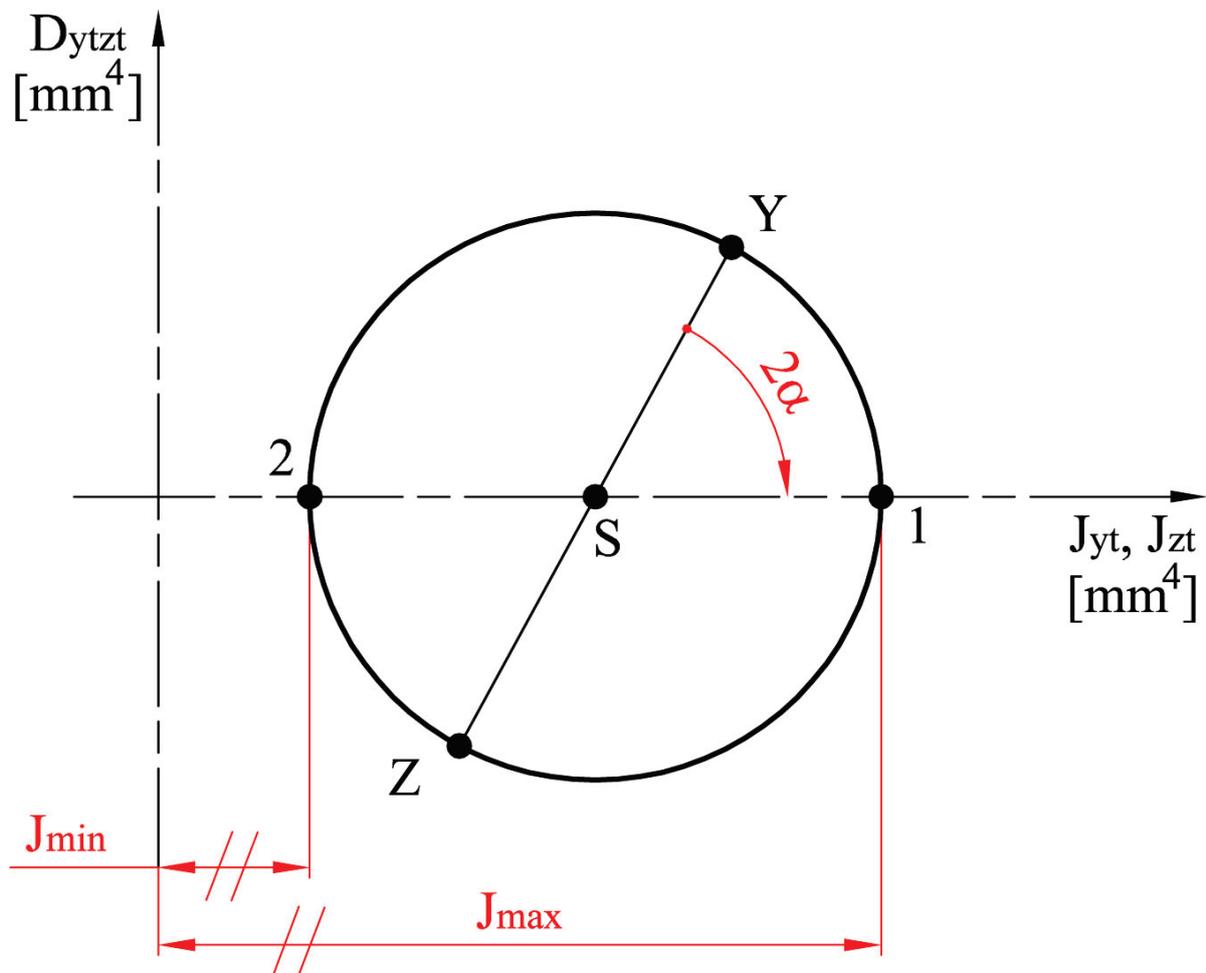


Obr. 7.12 - Konstrukce Mohrovy kružnice



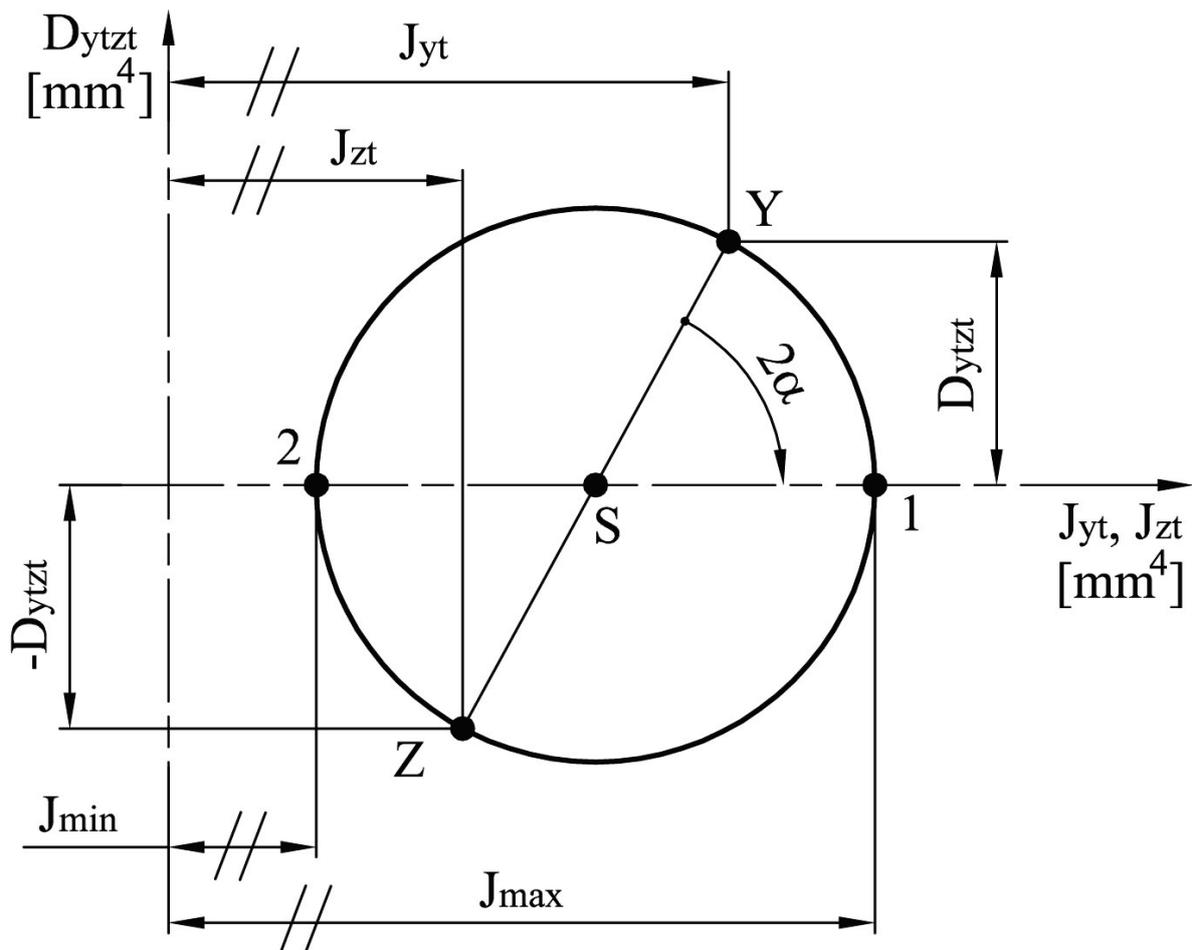
Obr. 7.13 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 7.14 - Konstrukce Mohrovy kružnice





Obr. 7.15 - Výsledná Mohrova kružnice

Z daného řešení lze také odvodit následující vztahy.

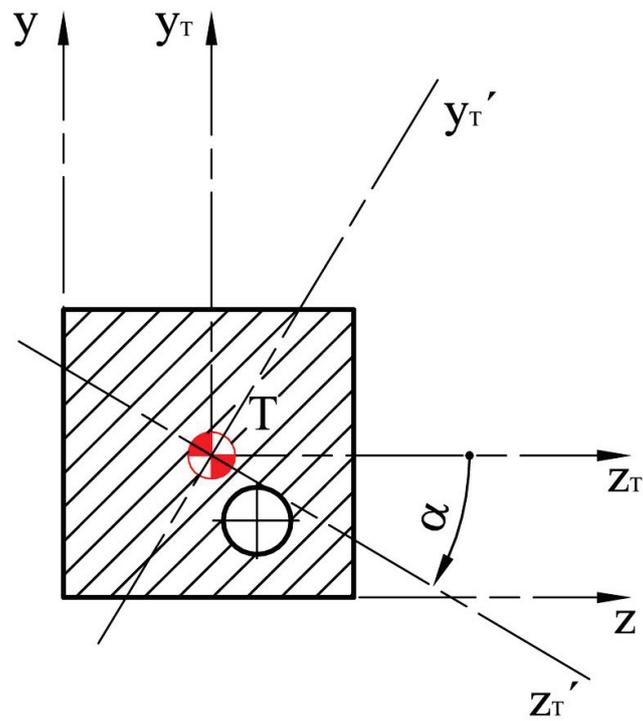
$$\begin{aligned}
 J_{max} &= \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \\
 &= \frac{49647 + 47056}{2} + \sqrt{\left(\frac{49647 - 47056}{2}\right)^2 + 2428^2} = \mathbf{51\ 103\ mm^4},
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
 J_{min} &= \frac{J_{yT} + J_{zT}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yT} - J_{zT}}{2}\right)^2 + J_{yTzT}^2} = \\
 &= \frac{49647 + 47056}{2} - \sqrt{\left(\frac{49647 - 47056}{2}\right)^2 + 2428^2} = \mathbf{45\ 599\ mm^4},
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot J_{yTzT}}{J_{yT} - J_{zT}} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \arctg \left(\frac{2 \cdot 2428}{49647 - 47056} \right) \right| = \mathbf{30,96^\circ}. \tag{7.22}$$

Znaménko pro úhel α se stanoví na základě platné znaménkové dohody (viz přednáškové texty z předmětu Pružnost a pevnost 2). V tomto případě je úhel $\alpha = -30,96^\circ$.





Obr. 7.16 Zobrazení polohy hlavních centrálních os

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Vzpěr

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP

Ing. Milan Sivera

Ing. Richard Klučka

Ing. Josef Sedlák

Ing. Luboš Pečenka

Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

8	VZPĚR	3
8.1	Obecný postup	4



8 VZPĚR



OBSAH KAPITOLY:

Pojem stabilita.

Pružný vzpěr přímého nosníku.



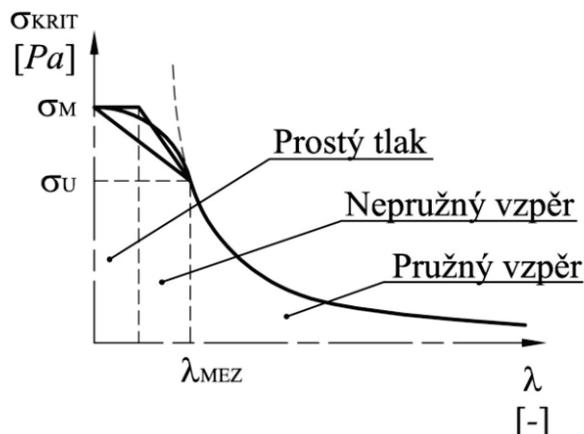
CÍL:

Základní příklady Eulerova vzpěru,
stanovení kritické síly a kritického napětí.



8.1 OBECNÝ POSTUP

Nejprve je nutné ze zadaných veličin stanovit, zda lze použít Eulerovu teorii pro pružný vzpěr nebo využít vzorce pro nepružný vzpěr (např. Tetmayer, Jasinský,...). Na Obr. 8.1 lze vidět průběh kritického napětí v závislosti na mezní štíhlosti.



Obr. 8.1 Obecné rozdělení vzpěru

Mezní štíhlost pak vypočítáme pomocí veličin charakterizující materiál

$$\lambda_{mez} = \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} \quad (8.1)$$

Koeficient n stanovíme dle Tab. 3.

Tab. 1 Základní případy vzpěru axiálně zatížených nosníků

		Základní případy vzpěru axiálně zatížených nosníků					
		1. případ	2. případ	3. případ	4. případ	5. případ	6. případ
SCHEMA A TVAR PRŮHYBU							
	POPIS	Vetknutí a volný konec	Kloub posuvný konec	Vetknutí a posuvný konec	Vetknutí a vertikálně posuvné vetknutí	Kloub a horizontálně posuvné vetknutí	Vetknutí a horizontálně posuvné vetknutí
KOEFIICIENT n	Teoretický	2	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	2	1
	Praktický	2.1	1	0.8	0.65	2	1.2

Štíhlost pak ze zadání vypočítáme pomocí vztahů

$$\lambda = \frac{L_{red}}{j_{min}}, \quad j_{min} = \sqrt{\frac{J_{Tmin}}{S}}. \quad (8.2)$$

Kritickou sílu pak vypočítáme ze vztahů, dle Eulera (pro $\lambda \geq \lambda_{mez}$)

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{Tmin}}{L_{red}^2}. \quad (8.3)$$

V případě že se nejedná o pružný vzpěr $\lambda \leq \lambda_{mez}$, zvolíme pro výpočet kritické síly a kritického napětí vztahy podle Tetmayera (8.4) nebo Jasinského (8.5)

$$\sigma_{krit} = a - b\lambda, \quad (8.4)$$

$$\sigma_{krit} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (8.5)$$

Jasinského vztah nemá smysl v případě, že se jedná o ocel a dřevo kde konstanta $c = 0 \text{ MPa}$.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady IV

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

9	PŘÍKLADY IV	3
9.1	Příklady 12	4
9.2	Příklad 13	5



9 PŘÍKLADY IV



OBSAH KAPITOLY:

Výpočet pružného vzpěru přímého prutu.



CÍL:

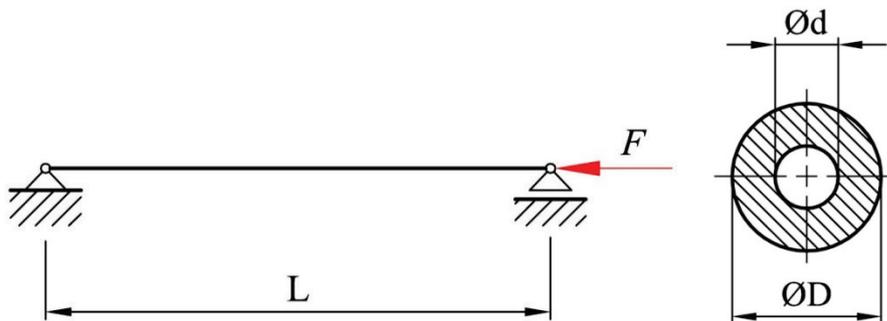
Stanovení kritické síly a kritického napětí případ uložení prutu.



9.1 PŘÍKLADY 12

Určete kritickou sílu při vzpěru prutu délky L zobrazeného na Obr. 9.1, jež má mezikruhový průřez a je vyroben z oceli.

Zadané hodnoty jsou $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 210 \text{ MPa}$, $D = 50 \text{ mm}$, $d = 36 \text{ mm}$, $L = 1,5 \text{ m}$.



Obr. 9.1 Zadání úlohy

Na základě materiálových vlastností nejdříve spočítáme mezní štíhlost

$$\lambda_{mez} = \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} = \frac{\pi}{1} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} \cong 99,35. \quad (9.1)$$

Děle z rozměrů konstrukce vypočítáme štíhlost zadaného prutu a porovnáme s mezní štíhlostí. Na základě těchto hodnot potom zvolíme vztah, podle něhož budeme počítat kritickou sílu v prutu. Jelikož se jedná o případ 2 z Tab. 3, volíme konstantu $n = 1$

$$J_{min} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (50^4 - 36^4)}{64} \cong 224\,348 \text{ mm}^4. \quad (9.2)$$

Obsah mezikruží

$$S = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (50^2 - 36^2)}{4} \cong 945,6 \text{ mm}^2. \quad (9.3)$$

Minimální poloměr kvadratického momentu plochy

$$j_{min} = \sqrt{\frac{J_{Tmin}}{S}} = \sqrt{\frac{224\,348}{945,6}} \cong 15,4 \text{ mm}. \quad (9.4)$$

Štíhlost zadaného prutu

$$\lambda = \frac{L_{red}}{j_{min}} = \frac{1500}{15,4} \cong 97,4. \quad (9.5)$$

$$\lambda < \lambda_{mez} \rightarrow \text{nepružná oblast} - \text{Tetmayerův vztah} \quad (9.6)$$

Jelikož je mezní štíhlost menší než štíhlost zadaného prutu, nacházíme se v nepružné oblasti a pro výpočet kritické síly musíme použít Tetmayerův vztah (8.4).

$$\sigma_{krit} = a - b\lambda = 320 - 1,2 \cdot 97,4 = 203,12 \text{ MPa}. \quad (9.7)$$

Konstanty a a b pro ocel jsou dané ($a = 320 \text{ MPa}$, $b = 1,2 \text{ MPa}$)

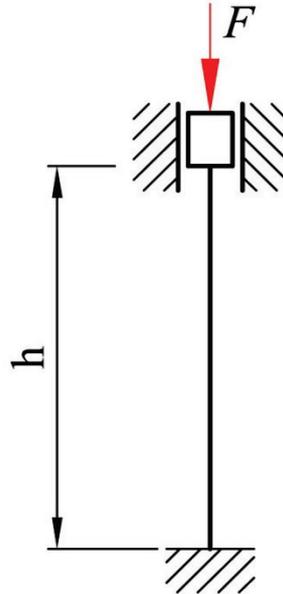
Kritickou sílu, kterou konstrukce ještě přenese, aniž by došlo ke ztrátě stability tvaru, pak vypočteme pomocí již známé hodnoty σ_{krit}

$$F_{krit} = \sigma_{krit} \cdot S = 203,12 \cdot 945,6 \cong 192\,070 \text{ N} \cong \mathbf{192 \text{ kN}}. \quad (9.8)$$



9.2 PŘÍKLAD 13

Prut na Obr. 9.2 je na jedné straně vetknut a na druhé straně umístěn vertikálně posuvně a má výšku $h = 2$ m. Prut je vyroben ze dřeva o materiálových vlastnostech $E = 8 \cdot 10^3$ MPa, $\sigma_u = 19,5$ MPa. Průřez prutu nemá žádnou osu symetrie a je zobrazen na Obr. 9.2.



Obr. 9.2 Zadání úlohy

Pro uložení dřevěného prutu z Obr. 9.2 je koeficient $n = 0,5$ dle Tab. 3. Nejprve spočítáme mezní štíhlost prutu

$$\lambda_{mez} = \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{8 \cdot 10^3}{19,5}} \cong 127,3. \quad (9.9)$$

Minimální poloměr kvadratického momentu plochy

$$j_{min} = \sqrt{\frac{J_{Tmin}}{S}} = \sqrt{\frac{5\,818,6}{268}} \cong 4,66 \text{ mm}. \quad (9.10)$$

Štíhlost zadaného prutu je

$$\lambda = \frac{h_{red}}{j_{min}} = \frac{0,5 \cdot 2000}{4,66} \cong 214,6, \quad (9.11)$$

$$\lambda > \lambda_{mez} \rightarrow \text{pružná oblast} - \text{Eulerův vztah}. \quad (9.12)$$

Jelikož je mezní štíhlost prutu menší než štíhlost prutu, nacházíme se v pružné oblasti a pro výpočet kritické síly můžeme použít Eulerův vztah

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{Tmin}}{h_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 5818,6}{(0,5 \cdot 2000)^2} = 459 \text{ N}. \quad (9.13)$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklady V

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

10	PŘÍKLADY V.....	3
10.1	Příklady 14.....	4



10 PŘÍKLADY V



OBSAH KAPITOLY:

Výpočet pružného vzpěru přímého prutu.



CÍL:

Stanovení kritické síly a kritického napětí případ uložení prutu.



10.1 PŘÍKLADY 14

Vetknutý prut vyrobený z oceli je zahříván a tímto působením může dojít ke ztrátě stability tvaru prutu. Určete teplotní rozdíl, při kterém ke ztrátě stability dojde a jaká je tímto kritickým působením vyvinuta síla.

Zadané hodnoty jsou $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_u = 210$ MPa, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Rozměry průřezu jsou zadané na Obr. 10.1.



Obr. 10.1 Zadání úlohy

Kritickou hodnotu síly, kterou zahříváný prut přeneše, aniž by došlo se ztrátě stability tvaru, vypočteme za pomoci vztahu pro tepelnou deformaci

$$F_{krit} = \sigma_t \cdot S = E \cdot \varepsilon_t \cdot S = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot S. \quad (10.1)$$

Tuto kritickou sílu můžeme vypočítat i pomocí vztahů pro ztrátu stability tvaru

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{Tmin}}{L_{red}^2}. \quad (10.2)$$

Porovnáním vztahů (10.1) a (10.2) pak můžeme vypočítat rozdíl teploty ΔT , při které dojde ke ztrátě stability tvaru

$$\Delta T = \frac{\pi^2 \cdot J_{Tmin}}{\alpha \cdot S \cdot L_{red}^2}. \quad (10.3)$$

Nejprve je opět nutné posoudit konstrukci z hlediska možnosti použití Eulerovi nebo Tetmayerovy teorie. Mezní štíhlost pro ocel, kde vetknutý prut má konstantu $n = 2$

$$\lambda_{mez} = \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} \cong 49,68. \quad (10.4)$$

Pro štíhlost zadaného prutu musíme nejdříve určit minimální kvadratický moment průřezu. Jelikož se jedná o průřez s jednou osou symetrie (viz Obr. 10.1), je nutné vypočítat nejdříve těžiště a poté spočítat kvadratické momenty průřezu vůči těžištním osám.

Výpočet těžiště

$$y_T = \frac{25 \cdot 10 \cdot 50 + 25 \cdot 10 \cdot 50}{10 \cdot 50 + 10 \cdot 50} = 25 \text{ mm}, \quad (10.5)$$

$$z_T = \frac{25 \cdot 10 \cdot 50 + 55 \cdot 10 \cdot 50}{10 \cdot 50 + 10 \cdot 50} = 40 \text{ mm}. \quad (10.7)$$

Výpočet kvadratických momentů průřezu

$$J_{yT} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (40 - 25)^2 + \frac{50 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (55 - 40)^2 = 123\,333 \text{ mm}^4, \quad (10.8)$$



$$J_{zT} = \frac{50 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 50^3}{12} = 108\,333 \text{ mm}^4 = J_{Tmin}. \quad (10.9)$$

Tímto jsme stanovili hodnotu minimálního kvadratického momentu průřezu a to $J_{Tmin} = 108\,333 \text{ mm}^4$.

Obsah plochy průřezu

$$S = 10 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 1\,000 \text{ mm}^2. \quad (10.10)$$

Minimální poloměr kvadratického momentu průřezu

$$j_{min} = \sqrt{\frac{J_{Tmin}}{S}} = \sqrt{\frac{108\,333}{1000}} \cong 10,4 \text{ mm}. \quad (10.11)$$

Štíhlost zadaného prutu

$$\lambda = \frac{L_{red}}{j_{min}} = \frac{2 \cdot 1000}{10,4} \cong 192,3. \quad (10.12)$$

$$\lambda > \lambda_{mez} \rightarrow \text{pružná oblast} - \text{Eulerův vztah} \quad (10.13)$$

Jedná se o pružný vzpěr tudíž lze použít Eulerovu teorii pro výpočet kritické síly

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 E \cdot J_{Tmin}}{L_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 108\,333}{(2 \cdot 1000)^2} \cong 56\,133 \text{ N}. \quad (10.14)$$

Ze vztahu (10.3) pak určíme maximální rozdíl teplot

$$\Delta T = \frac{\pi^2 \cdot J_{Tmin}}{\alpha \cdot S \cdot L_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 108\,333}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 1000^2 \cdot 2^2} = 22,3 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (10.15)$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Obecný postup řešení vzpěru v pružně plastické oblasti

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

11	OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ VZPĚRU V PRUŽNĚ PLASTICKÉ OBLASTI	3
11.1	Obecný postup řešení vzpěru v pružně plastické oblasti.....	4



11 OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ VZPĚRU V PRUŽNĚ PLASTICKÉ OBLASTI



OBSAH KAPITOLY:

Obecný postup řešení vzpěru v pružně plastické oblasti.



CÍL:

Vzpěr v pružně plastické oblasti,
síly a kritického napětí.



11.1 OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ VZPĚRU V PRUŽNĚ PLASTICKÉ OBLASTI

Vzpěr v pružně plastické oblasti

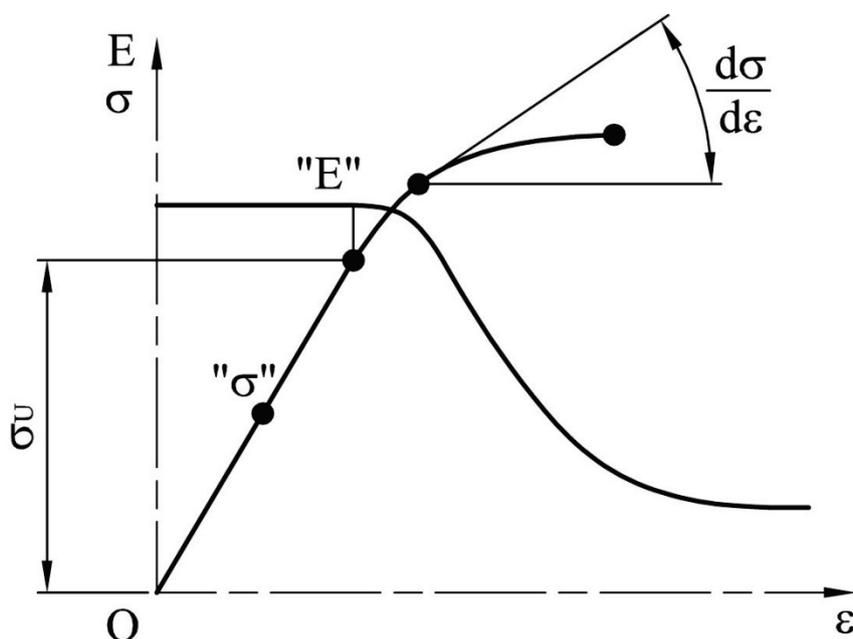
V oblasti pružně plastické oblasti je možné vzpěr řešit metodami, které je možné rozdělit podle principu na:

- Metodu redukce modulu pružnosti.
- Metodu nahrazení závislosti $\sigma_{krit} - \lambda$ experimentálně získanými konstantami.
- Metodu využívající součinitel vzpěrnosti.

První z uvedených metod rozšiřuje platnost vztahů odvozených pro oblast pružných deformací zavedením tzv. redukovaného modulu pružnosti, který je možné vyjádřit ve tvaru

$$E_{red} = E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (11.1)$$

Kde E_t je tzv. tangenciální modul pružnosti (viz Obr. 11.1). Pro obdélníkový profil podle Kármana platí



Obr. 11.1 Závislost modulu pružnosti na poměrné deformaci

$$E_{red} = \frac{4 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}. \quad (11.2)$$

Tento vztah je pak možno použít i pro jednoduché plné průřezy jiného tvaru zavedením korekčního faktoru η .

Kritickou sílu pak dostáváme ve tvaru

$$F_{krit} = \eta \cdot \frac{\pi^2 \cdot E_{red} \cdot J_{Tmin}}{L_{red}^2}. \quad (11.3)$$

V mnoha případech se křivka diagramu $\sigma_{krit} - \lambda$ pro pružně plastickou oblast nahrazuje experimentálně získanou závislostí. Nejčastěji se však používá výpočet podle Tetmayera, který předpokládá tvar funkce $\sigma_{krit}(\lambda)$ pro houževnaté materiály ve tvaru

$$\sigma_{krit} = a - b \cdot \lambda. \quad (11.4)$$

Pro křehké materiály (litina) přidává Tetmayer další člen

$$\sigma_{krit} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2. \quad (11.5)$$



Kde a, b, c jsou konstanty. Pokud ale tyto konstanty neznáme, je možné přímku grafu proložit bodami A: ($\lambda = 0$; $\sigma_{\text{krit}} = \sigma_k$); B: ($\lambda = \lambda_m$; $\sigma_{\text{krit}} = \sigma_k$).

Někdy se $\sigma_{\text{krit}} = \sigma_k$ může považovat až po hodnotu $\lambda = 30$.

Poslední z uvedených metod má svoje uplatnění tam, kde je variabilita používaných materiálů malá (stavebnictví). Hodnoty kritických napětí jsou pro jednotlivé štíhlosti, materiály a typy průřezů zpracované v tabulkách. Údaje jsou společné pro oblast pružných i pro pružně plastických deformací. V tabulkách uvedených v normách ČSN jsou místo absolutních hodnot napětí bezrozměrná čísla φ nebo c , které nazýváme součinitele vzpěrnosti.

Pevnostní podmínka při namáhání na vzpěr má podle normy tvar

$$\frac{N}{S} \leq \varphi \cdot R \quad (11.6)$$

Kde je:

- N – výpočtová osová síla
- S – neoslabená plocha průřezu
- φ – součinitel vzpěrnosti odpovídající štíhlosti prutu λ , uložení prutu a tvaru prutu
- R – základní výpočtová pevnost podle ČSN

$$\frac{N}{S} \cdot c \leq \sigma_D \quad (11.7)$$

Kde σ_D je dovolené napětí pro daný materiál, c je součinitel vzpěrnosti.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ**



**PRUŽNOST A PEVNOST 2 –
V PŘÍKLADECH**

Příklad VI

doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., ING-PAED IGIP
Ing. Milan Sivera
Ing. Richard Klučka
Ing. Josef Sedlák
Ing. Luboš Pečenka
Ing. Michal Šofer

Ostrava 2013

© Ing. Lukáš OTTE, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3020-9



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

12	PŘÍKLAD VI	3
12.1	Příklad 15.....	4
12.2	Příklad 16.....	4



12 PŘÍKLAD VI



OBSAH KAPITOLY:

Řešení vzpěru v pružně plastické oblasti přímého nosníku.



CÍL:

Základní příklad Tetmayerova vzpěru,
stanovení kritické síly dle ČSN normy.



12.1 PŘÍKLAD 15

Duralová trubka o délce $L = 1,8$ m s venkovním průměrem průřezu $D = 60$ mm, vetknutá na obou koncích je zatížena osovou silou $F = 100$ kN. Určete potřebnou tloušťku stěny trubky, pokud je koeficient bezpečnosti $k = 2$ a konstanty dle Tetmayera jsou: $a = 336$ MPa, $b = 2,8$ MPa.

Uvažujme vnitřní průměr trubky rovno $d = 50$ mm. Napětí v trubce s ohledem na koeficient bezpečnosti budeme kontrolovat s kritickým napětím určeným dle Tetmayera.

$$\sigma = \frac{k \cdot N}{S} = \frac{k \cdot 4 \cdot N}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi(60^2 - 50^2)} = 231,5 \text{ MPa} \quad (12.1)$$

Štíhlost prutu pro zvolený vnitřní průměr má hodnotu:

$$\lambda = \frac{\beta \cdot L}{j_{\min}} = \frac{\beta \cdot L}{\sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64 \cdot \pi(D^2 - d^2)}}} = \frac{4 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{D^2 - d^2}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{60^2 - 50^2}} \cong 46,1. \quad (12.2)$$

Tomu odpovídá dle Tetmayera kritické napětí:

$$\sigma_{\text{krit}} = a - b \cdot \lambda = 336 - 2,8 \cdot 46,1 = 206,94 \text{ MPa}. \quad (12.3)$$

Protože napětí v trubce σ je větší jak kritické σ_{krit} , je zřejmé že trubka na vzpěr nevyhovuje. Opakujeme tedy výpočet pro vnitřní průměr $d = 48$ mm.

$$\sigma = \frac{k \cdot N}{S} = \frac{k \cdot 4 \cdot N}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi(60^2 - 48^2)} = 196,5 \text{ MPa} \quad (12.4)$$

$$\lambda = \frac{\beta \cdot L}{j_{\min}} = \frac{\beta \cdot L}{\sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64 \cdot \pi(D^2 - d^2)}}} = \frac{4 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{D^2 - d^2}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{\sqrt{60^2 - 48^2}} \cong 46,85. \quad (12.5)$$

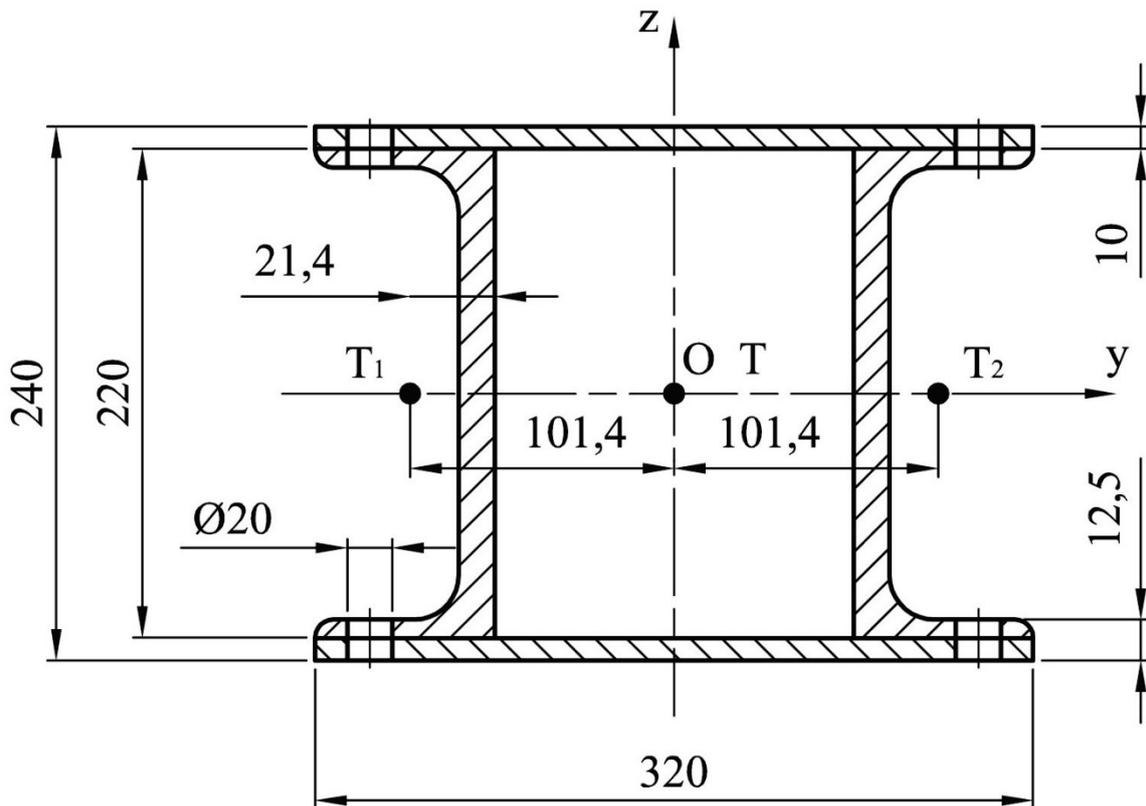
$$\sigma_{\text{krit}} = a - b \cdot \lambda = 336 - 2,8 \cdot 46,1 = 204,8 \text{ MPa}. \quad (12.6)$$

Trubka s vnitřním průměrem $d = 48$ mm, tedy s tloušťkou stěny 6 mm VYHOVUJE.

12.2 PŘÍKLAD 16

Sloup vyrobený z oceli 11370 o délce $L = 6$ m s průřezem složeným z dvou profilů U 22 a dvou pásnic 320x10 mm (viz obr. Obr. 12.1) je na obou koncích kloubově uchycen a zatížen osovou silou F . Jednotlivé části jsou spojeny nýty s průměrem $d = 20$ mm. Rozměry potřebné pro výpočet jsou zobrazeny na obr. Obr. 12.1. Dle ČSN normy určete největší přípustnou hodnotu zátěžné síly, pokud je základní výpočtová pevnost válcovaných profilů $R = 210$ MPa a hodnota součinitele vzpěrnosti je $\varphi = 0,89$.





Obr. 12.1 Rozměry průřezu

Určíme nejmenší centrální kvadratický moment průřezu. Geometrická charakteristika pro válcovaný profil U 22 je dle normy:

$$J_y = 26900 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_z = 1970 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$S = 3,74 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Plocha celého průřezu je rovna

$$S = 2 \cdot (3,74 \cdot 10^3 + 320 \cdot 10) = 13,88 \cdot 10^3 \text{ mm}^2. \quad (12.7)$$

Podle Steinerovy věty platí

$$J_y = 2 \cdot (26900 \cdot 10^3 + \frac{320 \cdot 10^3}{12} \cdot 320 \cdot 10) = 138493,33 \cdot 10^3 \text{ mm}^4. \quad (12.8)$$

$$J_z = 2 \cdot \left(1970 \cdot 10^3 + 101,4^2 \cdot 3,74 \cdot 10^3 + \frac{320^3 \cdot 10}{12} \right) = \quad (12.9)$$

$$= 135462,39 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Protože $J_y > J_z$ je minimální poloměr kvadratického momentu průřezu

$$j_{\min} = j_z = j_2 = \sqrt{\frac{J_z}{S}} \cong 98,79 \text{ mm}. \quad (12.10)$$

Štíhlost zadaného prutu

$$\lambda = \frac{\beta \cdot L}{j_{\min}} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^3}{98,79} \cong 60,7. \quad (12.11)$$

Největší přípustná hodnota osově síly je

$$N \leq \varphi \cdot R \cdot S = 0,89 \cdot 210 \cdot 13880 = 2594,17 \text{ kN}. \quad (12.12)$$

Pro zeslabený průřez provedeme kontrolu pevnosti na tlak



$$\sigma_{max} = \frac{N}{S_{osl}} \leq R \quad (12.13)$$

Přičemž

$$S_{osl} = S - 4 \cdot 20(10 + 12,5) = 12080 \text{ mm}^2 \quad (12.14)$$

Vyjádříme výpočtovou osovou sílu

$$N \leq R \cdot S_{osl} = 210 \cdot 12080 = 2536,8 \text{ kN} \quad (12.15)$$

Největší přípustná hodnota zátěžné síly je rovna

$$F_{krit} = N = 2536,8 \text{ kN} \quad (12.16)$$

