INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

Název: MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Autor: Mgr. Petr Otipka

Vydání: první, 2013

Počet stran: 82

Náklad: 5

Jazyková korektura: nebyla provedena.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.

Název: Modernizace výukových materiálů a didaktických metod

Číslo: CZ.1.07/2.2.00/15.0463

Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3034-6

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 1 - Kombinatorika

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 CVIČENÍ 1- KOMBINATORIKA ... 3

1.1 Řešené úlohy ... 3

1.1.1 Úlohy k řešení ... 4

1.1.2 Výsledky úloh k řešení ... 6

1.1.3 Sada testovacích otázek ... 6

1.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám ... 8

CVIČENÍ 1- KOMBINATORIKA

1.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 1.4.1.

Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat 3 různá pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?

Řešení: Některé úlohy je vhodné (nejen) v kombinatorice řešit pomocí opačného jevu. Nejdříve spočteme, kolika způsoby je možné vybrat tři pole stejné barvy:

Na začátku vybereme libovolné pole – máme tedy 64 možností. Jestliže chceme při druhém pokusu vybrat pole stejné barvy, musíme zvolit některé ze zbývajících 31 polí této barvy (jedno pole jsme již vybrali v předchozím pokusu). Při třetím výběru pak máme k dispozici 30 polí této barvy. Počet všech možností, jak vybrat tři políčka stejné barvy je tedy: $64 \cdot 31 \cdot 30$. Odečteme-li nyní tyto možnosti od všech možností výběru, kterých je zřejmě $64 \cdot 63 \cdot 62$, obdržíme počet způsobů, jak vybrat pole tak, aby všechna tři neměla stejnou barvu:

$64 \cdot 63 \cdot 62 - 64 \cdot 31 \cdot 30 = 190464$ možností.

Dále je třeba si uvědomit, že při tomto řešení jsme zohledňovali pořadí pokusů, což ovšem ze zadání nevyplývá. Skutečný počet možností je pak šestkrát menší (všem permutacím z daných tří polí odpovídá jedna možnost): $\frac{190464}{6} = 31744$ způsobů.

Tuto úlohu je samozřejmě možné řešit i přímým výpočtem:

Při prvním pokusu máme opět 64 možností výběru. Při druhém pokusu vybereme buď pole jiné barvy (32 možností) nebo pole stejné barvy (31 možností). U třetího výběru můžeme zvolit libovolné zbývající pole, mají-li dvě předchozí rozdílnou barvu (62 možností), nebo pokud jsou dvě již vybraná pole stejné barvy, musíme zvolit pole jiné barvy (32 možností). Tedy počet všech možností je:

$64 \cdot 32 \cdot 62 + 64 \cdot 31 \cdot 32 = 190464$ ... .

Příklad 1.4.2.

Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

a) pětimístná, sudá

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21

c) pětimístná, menší než 30000

d) trojmístná lichá

e) čtyřmístná, větší než 2000

f) dvojmístná nebo trojmístná

Řešení: ad *a*)

Sudá - to v tomto případě znamená, že končí ciframi 2 nebo 4 (XXXX2, XXXX4) - tzn. dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývající čtyři cifry, takže výsledek:

$a = 2.P(4) = 48$

ad *b*)

Máme číslo XXX21. Tedy na třech pozicích permutují tři cifry:

$b = P(3) = 6$

ad *c*)

Menší než 30000, to jsou čísla začínající ciframi 1 nebo 2, tedy dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývající čtyři cifry:

$c = 2.P(4) = 48$

ad *d*)

Lichá, tedy končí ciframi 1, 3, 5 - tři možnosti. Na zbývajících dvou pozicích se mohou vyskytovat některé ze zbývajících čtyř cifer, přičemž záleží na pořadí - jedná se o variace druhé třídy ze čtyř prvků.

$d = 3.V_2(4) = 36$
ad *e*)
obdobně jako u předchozích:
$e = 4.V_3(4) = 96$
ad *f*)
$f = V_2(5) + V_3(5) = 80$

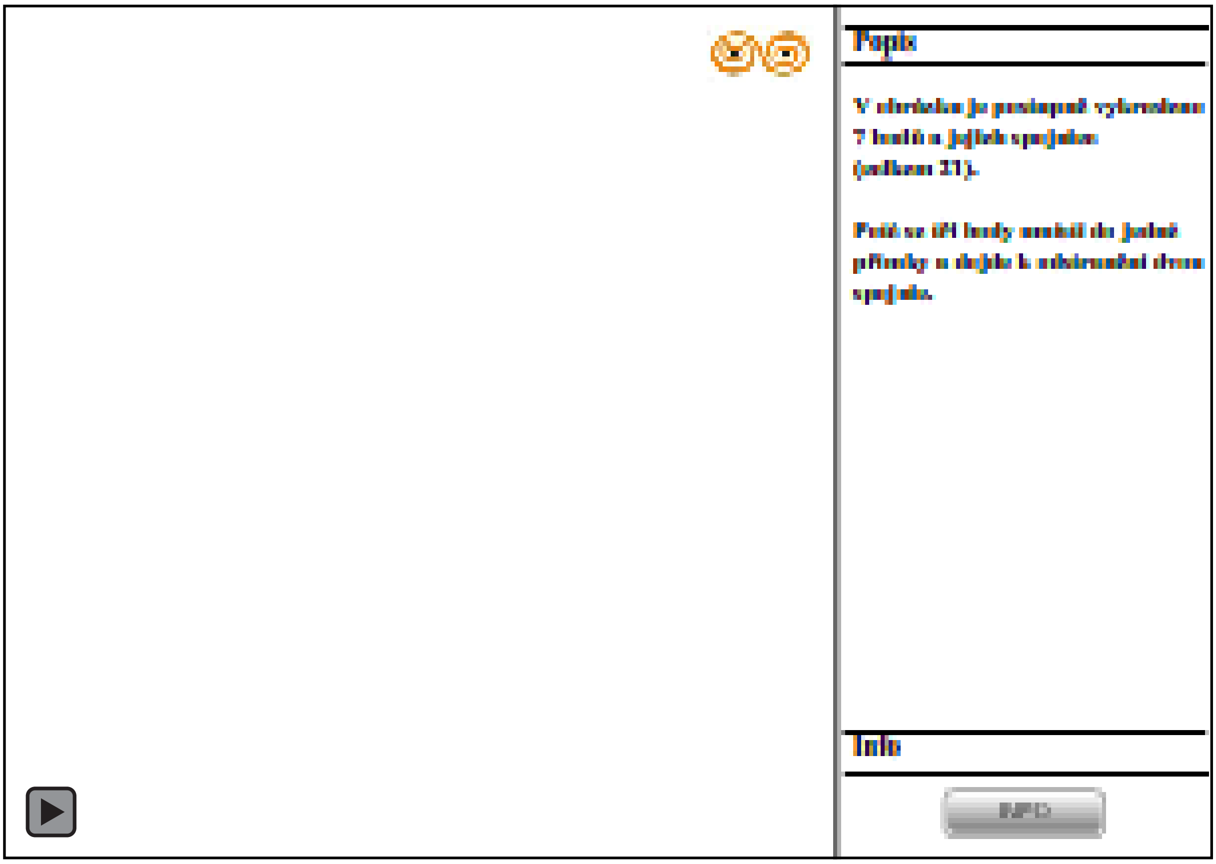
Příklad 1.4.3.

Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže
a) žádné tři z nich neleží v přímce,
b) tři z nich leží v jedné přímce?

Řešení: ad *a*) Jedná se o typický příklad na kombinace bez opakování. Ze sedmi prvků vytváříme dvojice, přičemž ve dvojici nezáleží na pořadí (je jedno zda spojím první bod s druhým nebo druhý s prvním) a prvky se nemohou opakovat (spojením jednoho z bodů se sebou samým není určena přímka). Počet všech možností tedy odpovídá počtu kombinací druhé třídy ze sedmi prvků:

$$C_2(7) = \binom{7}{2} = 21.$$

ad *b*) Leží-li tři body v jedné přímce, pak v rámci této trojice přicházíme o dvě možnosti (mohu jimi proložit jedinou přímku – na rozdíl od případu, kdy v jedné přímce neleží a mohu jimi proložit tři přímky). Počet všech dalších možností je stejný. Výsledek je pak roven 21 – 2 = 19 možností.



Animce 1.1

1.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Zjednodušte a vypočtěte:

$$\binom{4}{2}+\binom{6}{2}-\binom{7}{2}=$$

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-\frac{2(n+2)!}{n!}=$$

$$\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}=$$

$$\frac{(n+2)!}{n!}-\frac{2(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}=$$

$$\binom{x+2}{x}+\binom{x+3}{x+1}=64$$

$$\binom{x+3}{x+1}-2\binom{x+2}{x}+3\binom{x+4}{x+2}=75$$

1.2. Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2,15\rangle$.

1.3. Ze 7 prvků bylo vytvořeno 2401 variací s opakováním stejné třídy. Kolik prvků obsahuje jedna variace?

1.4. Jsou dány cifry: 0, 1, 2, 3, 4. Splňte úkoly řešeného příkladu 1.4.2 tak, že cifry se nesmí opakovat a číslo nemůže začínat nulou.

1.5. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiferných přirozených čísel?

1.6. Kolik prvků dá 120 kombinací druhé třídy s opakováním?

1.7. Kolik je dáno prvků, jestliže variací třetí třídy z nich utvořených je pětkrát více než variací druhé třídy?

1.8. Z kolika prvků lze vytvořit 90 variací druhé třídy?

1.9. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací čtyřicetdvakrát. Určete počet prvků.

1.10. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit
a) 10 pohlednic,
b) 5 pohlednic,
c) 5 různých pohlednic?

1.11. Na hokejovém turnaji, kterého se účastní 8 družstev, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?

1.12. Z 5 bílých a 4 červených kuliček tvoříme trojice tak, aby v každé trojici byly vždy 2 bílé a 1 červená kulička.. Kolik trojic splňujících tuto podmínku lze vytvořit?

1.13. V turistickém oddílu "Hbitý svišť" je 10 dívek a 8 chlapců. Určete, kolika způsoby mohou sestavit volejbalový tým (má šest členů), ve kterém budou hrát.
a) právě dvě dívky.
b) maximálně dva chlapci?

1.14. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

1.15. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.
a) Kolika způsoby je lze přesadit?
b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?
c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?

d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?

1.16. Student má v knihovně 4 různé učebnice pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?

1.17. Kolik různých permutací lze vytvořit použitím všech písmen slova
a) statistika,
b) matematika?

1.18. V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

1.19. Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 poli vybrat 3 pole tak, aby všechna neležela v jednom sloupci?

1.20. Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

1.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. 0, 56, 2, 0, 2, 6, 4
1.2. 560
1.3. 4
1.4. 60, 4, 48, 18, 72, 24, 78, 64
1.5. 90000
1.6. 15
1.7. 7
1.8. 10
1.9. 7
1.10. 8008; 462; 21
1.11. 28
1.12. 40
1.13. 3150; 8106
1.14. 90
1.15. 720; 240; 240; 96
1.16. 1728
1.17. 75600; 151200
1.18. 231
1.19. 41216
1.20. 10

1.1.3 Sada testovacích otázek

T1.1. Jsou dána dvě přirozená čísla $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$; n, k jsou přirozená čísla, $n > k$. Které z těchto dvou čísel je větší?

a) $\binom{n}{k}$

b) $\binom{n}{k+1}$

c) Nelze obecně rozhodnout

T1.2. Z dvaceti studentů chceme vybrat tři, kteří půjdou do studentského sportovního klubu vykonávat funkce předsedy, místopředsedy a pokladníka. Kolika způsoby to lze provést?

T1.3. Na úřadě se tvoří řada pěti lidí, tři z nich jsou ženy. Kolika způsoby se může vytvořit, chtějí-li ženy stát bezprostředně za sebou?

T1.4. Na chmelovou brigádu přijel stejný počet studentů a studentek. Kolik brigádníků je celkem, můžeme-li z nich sestavit 441 párů (pár = student + studentka).

a) 40
b) 41
c) 42
d) 44

T1.5. Z pěti prvků vytváříme pětice, přičemž záleží na pořadí a prvky se mohou libovolně opakovat. Vytváříme tedy:

a) permutace z pěti prvků.
b) permutace s opakováním z pěti prvků.
c) variace 5-té třídy z pěti prvků s opakováním.

T1.6. Kolik je dáno prvků, jestliže počet variací druhé třídy z těchto prvků je dvanáctkrát menší než počet variací čtvrté třídy z týchž prvků.

a) 6
b) 8
c) 10

T1.7. Kolik prvků dá 55 kombinací druhé třídy?

a) 7
b) 9
c) 11

T1.8. Vyřešte rovnici:

$$\binom{4}{3}\cdot\binom{x+1}{x-1}-\binom{5}{3}\cdot\binom{x+1}{x}+\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}=0$$

T1.9. Z určitého počtu uchazečů mají být vybráni tři. Kdyby bylo uchazečů o dva méně, zmenšil by se počet možností výběru pětkrát. Kolik je uchazečů?

T1.10. Kombinace k-té třídy z n prvků jsou

a) uspořádané skupiny po k prvcích.
b) skupiny po k prvcích vybraných z n prvků bez ohledu na uspořádání.
c) uspořádané skupiny po n prvcích.

T1.11. Čemu je rovno číslo $\binom{n}{0}$?

a) 0
b) 1
c) n

T1.12. Z dvaceti studentů chceme vybrat tři, kteří půjdou před školu odklízet sníh. Kolika způsoby to lze provést?

T1.13. Seřaďte podle od největšího po nejmenší tři čísla $C_2(5)$, $V_2(5)$, $P(5)$.

a) $C_2(5)$, $V_2(5)$, $P(5)$
b) $P(5)$, $C_2(5)$, $V_2(5)$
c) $P(5)$, $V_2(5)$, $C_2(5)$

T1.14. Variace k-té třídy z n prvků jsou

a) uspořádané skupiny po k prvcích.
b) skupiny po k prvcích vybraných z n prvků bez ohledu na uspořádání.
c) uspořádané skupiny po n prvcích.

T1.15. Kolik trojciferných čísel lze vytvořit z cifer 1, 2, 3?

a) 3
b) 6
c) 9

T1.16. Kolik čtyřciferných čísel lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 3?

a) 16
b) 18
c) 12

T1.17. Z kolika prvků je možné vytvořit 420 variací druhé třídy bez opakování?

a) 20
b) 21
c) 22

T1.18. Jestliže se počet prvků zvětší o dva, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Kolik prvků bylo dáno?

T1.19. Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná družstva?

T1.20. Vyřešte rovnici:

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{x+1}{x-1}-\binom{6}{4}\cdot\binom{x+2}{x+1}=\binom{6}{5}$$

1.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T1.1. *c*)
T1.2. 6840
T1.3. 36
T1.4. *c*)
T1.5. *c*)
T1.6. *a*)
T1.7. *c*)
T1.8. $x = 2$
T1.9. 6
T1.10. *b*)
T1.11. *b*)
T1.12. 1140
T1.13. *c*)
T1.14. *a*)
T1.15. *b*)
T1.16. *b*)
T1.17. *b*)
T1.18. 2
T1.19. 924
T1.20. $x = 6$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 2 – Pravděpodobnost jevů

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

2 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ 3
2.1 Řešené úlohy 3
2.1.1 Úlohy k řešení 5
2.1.2 Výsledky úloh k řešení 6
2.1.3 Sada testovacích otázek 7
2.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 8

2 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ

2.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 2.5.1

Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:

a) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

b) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

Řešení: ad *a*)

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k "alespoň dvě mají stejnou hodnotu" je "každá má jinou hodnotu":

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = 0,75$$

ad *b*)

Dohromady za 700 Kč, tzn. jedna za 100 Kč a dvě za 300 Kč nebo dvě za 100 Kč a jedna za 500 Kč:

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24} = 0,291\overline{6}$$

Příklad 2.5.2.

Dva střelci vystřelí po jedné ráně. Pravděpodobnosti zásahu cíle jsou po řadě 0,6 a 0,9. Určete pravděpodobnost toho, že alespoň jeden střelec zasáhne cíl.

Řešení:

jev A: alespoň jeden zasáhne cíl

jev B: cíl zasáhne první střelec

jev C: cíl zasáhne druhý střelec

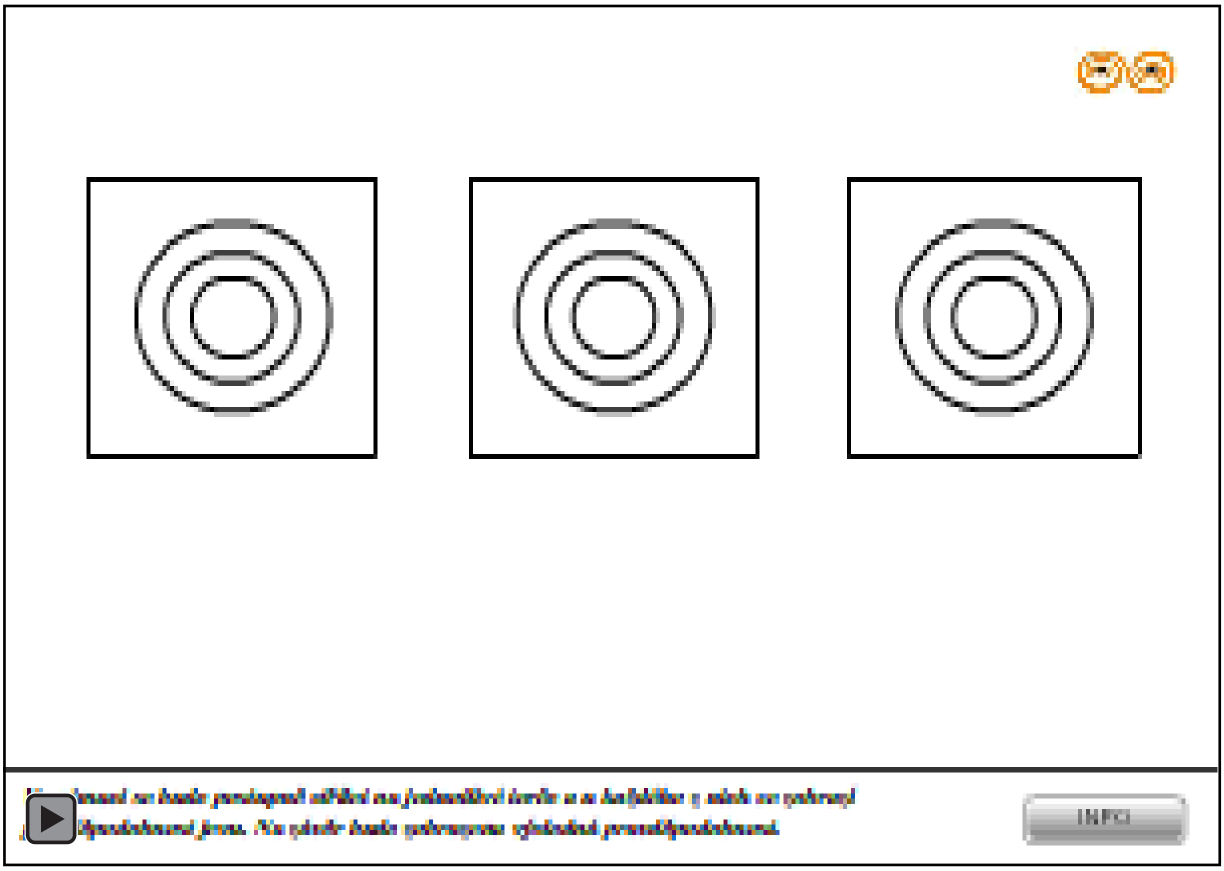
$P(A) = P(B.\overline{C} + \overline{B}.C + B.C) = P(B.\overline{C}) + P(\overline{B}.C) + P(B.C) =$

$= P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{B}).P(C) + P(B).P(C)$

$= 0,6.0,1 + 0,4.0,9 + 0,6.0,9 = 0,96$

nebo:

$P(A) = 1 - P(\overline{B}.\overline{C}) = 1 - P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 1 - 0,4.0,1 = 0,96$



Animce 2.1

Příklad 2.5.3.

Narozeninový problém I. Spočítejte pravděpodobnost, že žádní dva lidé z patnáctičlenné skupiny nemají narozeniny ve stejný den roku. Ignorujte 29.únor.

Řešení: Označme $P(n)$...pravděpodobnost, že dva lidé z n-členné skupiny nemají narozeniny ve stejný den.

$n = 2$

První člověk má narozeniny libovolný den v roce. Pravděpodobnost, že druhý člověk nemá narozeniny tentýž den je:

$$P(2) = \frac{364}{365}$$

$n = 3$

Navážeme-li na předchozí úvahu, pak:

$$P(3) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$$

Obdobně tedy:

$$P(4) = P(3).\frac{362}{365}$$

$$\vdots$$

$$P(n) = \frac{P(n-1).\left[365-(n-1)\right]}{365}$$

$$P(n) = \frac{364.363.\ldots.\left[365-(n-1)\right]}{365^{n-1}}$$

$$P(n) = \frac{365.364.363.\ldots.\left[365-(n-1)\right].(365-n)!}{365.365^{n-1}.(365-n)!} = \frac{365!}{365^{n}.(365-n)!}$$

Takže jsme odvodili obecný vzorec, nyní pro n = 15:

$$P(15) = \frac{365!}{365^{15}.350!} = \frac{365.364.\ldots.351}{365^{15}} \doteq 0{,}747$$

Příklad 2.5.4.

Narozeninový problém II. (Richard von Mises, 1939). Kolik lidí se musí nacházet v místnosti, aby, ignorujíce 29.únor, dva z nich měli narozeniny ve stejný den roku s pravděpodobností alespoň 50%.

Řešení: Označme $\overline{P}(n)$ ...pravděpodobnost, že dva lidé z n-členné skupiny mají narozeniny ve stejný den. Využijeme řešení předchozího příkladu. Stačí si uvědomit, že: $\overline{P}(n)$ = 1 - $P(n)$, tedy:

$$\overline{P}(n) = 1 - \frac{365!}{365^{n}.(365-n)!}$$

Lehce zjistíme, že $\overline{P}(n)$ > 0,5 poprvé pro n = 23 ($\overline{P}(23)$ = 0,507)

V místnosti se tedy musí nacházet alespoň 23 lidí.

2.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Dokažte, že jevy $\overline{A}, A.B, A.\overline{B}$ tvoří úplnou skupinu disjunktních jevů.

1.2. Dokažte, že $\overline{A}.B + A.\overline{B} + \overline{A}.\overline{B} = \left(\overline{A.B}\right)$.

1.3. Dokažte, že jevy $A, B, \overline{A+B}$ tvoří úplnou skupinu vzájemně neslučitelných jevů.

1.4. Jev A znamená, že z 10-ti automobilů byly prodány:
a) alespoň 3
b) alespoň 5
c) žádný
d) právě 4
e) aspoň 6 a nejvýše 8
f) žádný nebo alespoň 3
Kolik automobilů bylo prodáno, jestliže nastal jev $\overline{A}$?

1.5. Student udělá zkoušku (jev A), jestliže napíše úspěšně písemku (jev B) a zodpoví při ústní zkoušce alespoň jednu ze tří otázek (jevy C_1, C_2, C_3). Vyjádřete jev A pomocí jevů B, C_1, C_2, C_3.

1.6. Dva závodníci zdolají určitou vzdálenost ve stanoveném čase s pravděpodobností 0,8 a 0,9. Určete pravděpodobnost, že ve stanoveném čase dosáhne cíle alespoň jeden závodník.

1.7. Házíme současně třemi hracími kostkami a sčítáme bodové hodnoty. Který ze součtů 11 nebo 12 je pravděpodobnější?

1.8. Házíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že podruhé padne více oček než poprvé?

1.9. Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut. 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda?

1.10. V osudí jsou 4 černé a 6 modrých koulí. Náhodně vybereme 4. Jaká je pravděpodobnost, že
a) 3 budou modré a jedna černá?
b) alespoň 3 vytažené koule budou modré?
c) mezi vytaženými koulemi je více černých?

1.11. Do výtahu v sedmipodlažním domě nastoupili v 1. podlaží tři lidé. Každý z nich se stejnou pravděpodobností může vystoupit v libovolném podlaží počínaje druhým. Najděte pravděpodobnost následujících jevů:
A - všichni cestující vystoupí ve čtvrtém podlaží
B - všichni cestující vystoupí současně
C - cestující vystoupí v různých podlažích

1.12. Dva hráči házejí mincí. Vyhrává ten, komu dřív padne líc. Určete pravděpodobnost výhry každého hráče.

1.13. V osudí je 10 koulí - 3 bílé a 7 černých. Pětkrát táhneme po jedné kouli, po každém tahu ji vrátíme zpět. Určete pravděpodobnost, že budou taženy buď všechny koule bílé, nebo všechny černé.

1.14. Máme dřevěnou krychli, jejíž stěny jsou červeně obarveny. Rozřežme ji na 125 stejných krychliček, které vzájemně promícháme. Potom náhodně vybereme jednu krychličku. Jaká bude pravděpodobnost, že vybraná krychlička bude mít dvě stěny červeně natřené?

1.15. Tyč délky 10m je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?

1.16. Na dané kružnici o poloměru *r* náhodně zvolíme dva body *A*, *B*. Určete pravděpodobnost toho, že délka úsečky *AB* nebude větší než poloměr kružnice.

1.17. Z intervalu $\langle 0,8 \rangle$ náhodně vybereme čísla *x* a *y*. Jaká je pravděpodobnost, že $y \le x^3$?

1.18. Určete pravděpodobnost toho, že součet náhodně zvolených reálných čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ větší než jedna a současně jejich součin není větší než $\frac{2}{9}$.

1.19. Dva lidé se dohodli, že se setkají na stanoveném místě mezi 18:00 h. a 18:45 hod. Ten, kdo přijde první, počká na druhého 15 minut. Určete pravděpodobnost toho, že se setkají, je-li příchod obou kdykoliv ve stanoveném čase stejně možný.

1.20. Stanovte pravděpodobnost toho, že výraz $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x.y - 1}}$ je v libovolném bodě *(x, y)* definován, může-li *x* a *y* nabýt se stejnou pravděpodobností libovolné hodnoty z oboru $|x| \le 2, |y| \le 2$.

2.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. -
1.2. -
1.3. -
1.4. *a*) nejvýše 2
b) nejvýše 4
c) aspoň 1
d) nejvýše 3 nebo aspoň 5
e) nejvýše 5 nebo aspoň 9

f) jeden nebo dva
1.5. $A = B.(C_1+C_2+C_3)$
1.6. 0,98
1.7. 11
1.8. $\frac{15}{36}$
1.9. 0,142
1.10. 0,38; 0,452; 0,119
1.11. $p(A) = 1/6^3$
$p(B) = 6 / 6^3$
$p(C) = C_3(6) / 6^3$
1.12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
1.13. 0,1705
1.14. 0,288
1.15. 0,2
1.16. $\frac{1}{3}$
1.17. 0,812
1.18. 0,487
1.19. $\frac{5}{9}$
1.20. 0,2017

2.1.3 Sada testovacích otázek

T2.1. Jsou dány dva jevy *A*, *B*, přičemž $A \subset B$. Pak platí:
a) $A.B = A$
b) $A.B = B$
c) $A.B = A + B$

T2.2. Na pole čtvercového tvaru o hraně délky 100m se řítí parašutista, kterému se nerozevřel padák. Na poli stojí stoh čtvercového tvaru o hraně délky 10m. Jaká je pravděpodobnost, že parašutista přežije pád (tj. spadne do stohu)?
a) 0,1
b) 0,01
c) 0,001

T2.3. Součin jevů *A*, *B* je jev, který nastane právě tehdy když
a) nastane jev *A* a nenastane jev *B*.
b) nastane alespoň jeden z jevů *A*, *B*.
c) nastanou oba jevy současně.

T2.4. O náhodných jevech *A* a *B* jsou známy následující skutečnosti:
- pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů *A* a *B*, je 3/4
- pravděpodobnost, že oba jevy *A* a *B* nastanou současně, je 1/4
- pravděpodobnost, že nenastane jev *A* je 2/3

Jaká je pravděpodobnost jevu *B*?
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$

T2.5. Náhodné jevy *A*, *B* se nazývají neslučitelné, jestliže platí

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $A \cup B = I$

c) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

T2.6. Ve frontě na úřadě stojí 6 lidí, z toho 4 ženy. Jaká je pravděpodobnost, že ženy stojí bezprostředně za sebou?

T2.7. Rozdíl jevů *A*, *B* je jev, který nastane právě tehdy když

a) nastane jev *A* a nenastane jev *B*.

b) nastane alespoň jeden z jevů *A*, *B*.

c) nastanou oba jevy současně.

d) nastane jev *B* a nenastane jev *A*.

T2.8. Dva policisté vystřelí každý po jedné ráně na delikventa. Pravděpodobnost, že lumpa zasáhne první policista je 0,9, druhý policista 0,8. Určete pravděpodobnost, že delikvent bude zasažen.

T2.9. Ve kterém z následujících případů můžeme pro výpočet pravděpodobnosti použít klasickou definici pravděpodobnosti?

a) Střelba do terče.

b) Střelba do davu.

c) Hod kostkou.

d) Hod navrtanou kostkou.

T2.10. Nechť *A*, *B* jsou dva náhodné jevy. Pak platí:

a) $A + A.B = I$

b) $A + A.B = A$

c) $A + A.B = B$

T2.11. Součet jevů *A*, *B* je jev, který nastane právě tehdy když

a) nastane jev *A* a nenastane jev *B*.

b) nastane alespoň jeden z jevů *A*, *B*.

c) nastanou oba jevy současně.

d) nastane jev *B* a nenastane jev *A*.

2.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T2.1. *a*)

T2.2. *b*)

T2.3. *c*)

T2.4. *b*)

T2.5. *a*)

T2.6. 0,2

T2.7. *a*)

T2.8. 0,98

T2.9. *c*)

T2.10. *b*)

T2.11. *b*)

T2.12. *a*)

T2.13. *b*)

T2.14. *c*)

T2.15. *b*)
T2.16. *a*)
T2.17. 0,2
T2.18. *a*)
T2.19. 0,98
T2.20. *c*)
T2.21. *b*)
T2.22. *b*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 3 – Pravděpodobnost jevů

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

3 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ 3

3.1 Řešené úlohy 3

3.1.1 Úlohy k řešení 3

3.1.2 Výsledky úloh k řešení 5

3.1.3 Sada testovacích otázek 6

3.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 7

3 PRAVDĚPODOBNOST JEVŮ

3.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

Příklad 3.4.1.

Menza VŠB zakoupila 12 chladniček z 1. závodu, 20 z 2. závodu a 18 z 3. závodu. Pravděpodobnost, že chladnička je výborné jakosti, pochází-li z 1.závodu je 0,9, z 2.závodu 0,6 a z 3.závodu 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti?

Řešení: jev A...náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti

jev B_i... náhodně vybraná chladnička pochází z i-tého závodu

Chladniček je dohromady 50.

$$A=\left(A.B_1\right)+\left(A.B_2\right)+\left(A.B_3\right)$$

$$P\left(A\right)=P\left(A.B_1\right)+P\left(A.B_2\right)+P\left(A.B_3\right)$$

$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).\mathrm{P}(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$

$$P\left(A\right)=\frac{12}{50}.0,9+\frac{20}{50}.0,6+\frac{18}{50}.0,9=0,78$$

Příklad 3.4.2.

Ve společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 190 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

Řešení: jev A...vybraný člověk je vyšší než 190 cm

jev B_1...vybraný člověk je muž

jev B_2...vybraný člověk je žena

$$P\left(A\right)=P\left(A.B_1\right)+P\left(A.B_2\right)=0,45.0,05+0,55.0,01=0,028$$

$$P\left(B_2/A\right)=\frac{P\left(A.B_2\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,55.0,01}{0,028}=0,196$$

Příklad 3.4.3.

Vypočtěte, co je pravděpodobnější? Vyhrát v tenise se stejně silným soupeřem 3 zápasy ze 4 nebo 6 zápasů z osmi?

Řešení: Tenisové zápasy jsou vlastně opakované nezávislé pokusy. Hrajeme-li se stejně silným soupeřem je pravděpodobnost výhry v každém zápase p = 0,5, takže:

Pravděpodobnost, že vyhrajeme 3 zápasy ze 4:

$$P\left(A_3\right)=\binom{4}{3}.0,5^3.0,5^1=4.0,5^4=0,25$$

Pravděpodobnost, že vyhrajeme 6 zápasů z 8:

$$P\left(A_6\right)=\binom{8}{6}.0,5^6.0,5^2=28.0,5^8 \ \square\ 0,109$$

Pravděpodobnější je tedy zvítězit ve třech zápasech ze čtyř.

3.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že:
  a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.
  b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

1.2. Z výrobků určitého druhu dosahuje 95 % předepsanou kvalitu. V určitém závodě, který vyrábí 80 % celkové produkce však předepsanou kvalitu má 98 % výrobků. Mějme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben ve výše uvedeném závodě?

1.3. Součástky, ze kterých se montují stroje, dodávají tři závody. Je známo, že první má 0,3 % zmetků, druhý 0,2 % zmetků a třetí 0,4 %. Přitom první závod dodal 1000, druhý 2000 a třetí 2500 součástek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka bude zmetek?

1.4. Máme 4 krabice. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule, ve čtvrté 5 bílých a 1 černá koule. Náhodně vybereme jednu krabici a vytáhneme 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že kulička je bílá?

1.5. V dílně pracuje 10 dělníků, kteří vyrobí za směnu stejný počet výrobků. Pět z nich vyrobí 96 % standardních, tři z nich 90 % standardních a dva 85 % standardních. Všechny výrobky jdou do skladu. Náhodně jsme vybrali jeden výrobek a zjistili, že je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo z prvních pěti dělníků?

1.6. Sportovní střelec zasáhne cíl při každém výstřelu s pravděpodobností $p = 0,8$. Vypočtěte pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v cíli
a) právě 2 zásahy,
b) nejvýše jeden zásah,
c) alespoň 2 zásahy.

1.7. Na dvojkolejním železničním mostě se potkají v průběhu 24 hodin dva protijedoucí vlaky s pravděpodobností 0,2. Určete pravděpodobnost toho, že v průběhu týdne se dva vlaky na mostě potkají
a) maximálně třikrát,
b) nejméně třikrát,
c) právě třikrát.
d) Určete, kolikrát se vlaky potkají s největší pravděpodobností.

1.8. Písemná zkouška z matematiky obsahuje 5 příkladů. Pravděpodobnost spočítání jednoho příkladu je 0,8. Určete, jaká je pravděpodobnost, že student uspěje, stačí-li, aby spočítal aspoň 3 příklady.

1.9. Pravděpodobnost toho, že televizní obrazovka vydrží bez poruchy 3000 hodin provozu, je 0,4.
a) Jaká je pravděpodobnost toho, že alespoň jedna z pěti stejných obrazovek vydrží bez poruchy 3000 hodin?
b) Jaký nejpravděpodobnější počet z pěti obrazovek vydrží stanovený počet hodin bez poruchy?

1.10. Předpokládejme, že v populaci se vyskytují 4 % homosexuálně zaměřených jedinců. Jaká je pravděpodobnost, že ve 20-ti členné studijní skupině bude alespoň jeden takto zaměřený jedinec?

1.11. V rodině je *n* dětí. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Určete počet dětí tak, aby mezi nimi byl aspoň jeden chlapec s pravděpodobností alespoň 0,99.

1.12. Pravděpodobnost toho, že v některém okamžiku během jednoho roku bude na určitou konstrukci působit současně maximální zatížení pohyblivé a maximální zatížení větrem, činí 3.10^{-8}. Tato pravděpodobnost se během let nemění. Životnost konstrukce je 100 let. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu trvání konstrukce se obě zatížení ve svých maximálních hodnotách střetnou alespoň jednou?

1.13. Karetní hru o 52 kartách dělíme libovolně na dvě stejné části. Jaká je pravděpodobnost, že v každé části budou dvě esa?

1.14. Pět žárovek ze sta se namátkou kontroluje. Při výběru žárovky nevracíme. Vyskytne-li se mezi pěti kontrolovanými zmetek, je celá stovka vyřazena jako zmetkovitá. Jaká je pravděpodobnost, že daných sto žárovek bude vyřazeno, víme-li, že je mezi nimi 6 zmetků?
1.15. Na stavbu byly dovezeny cihly ze tří cihelen a složeny na společné skládce. Jejich množství jsou v poměru 1:2:2. Cihly vyrobené jednotlivými cihelnami vyhoví předepsaným normám jakosti s pravděpodobností rovnou postupně 0,80, 0,65, 0,72. Ze skládky cihel náhodně vybereme jeden kus, abychom laboratorně zjistili, zda splňuje předepsané požadavky. Jaká je pravděpodobnost toho, že cihla bude mít předepsanou kvalitu?
1.16. Studijní skupina, v níž je 6 studentek a 18 studentů, se pro laboratorní cvičení náhodně rozděluje na 6 skupin po čtyřech. Jaká je pravděpodobnost, že v každé skupině bude studentka?
1.17. Z osudí, v němž je 10 koulí bílých a 2 červené, táhneme n-krát po jedné kouli a po každém tahu ji vrátíme zpět. Určete nejmenší hodnotu n tak, aby pravděpodobnost jevu, že alespoň jednou vytáhneme červenou kouli, byla větší než 1/2.
1.18. Tři rovnocenní hráči A,B,C hrají společenskou hru. Určete, zda je pravděpodobnější, že hráč A vyhraje 3 ze 4 nebo 5 z 8 partií.
1.19. Mějme terč tvořený dvěma soustřednými kružnicemi o poloměrech $2r$ a $3r$. Předpokládáme stejnou pravděpodobnost zásahu do libovolného bodu terče. Určete pravděpodobnost toho, že ze tří zásahů terče bude jeden zásah do vnitřního kruhu.
1.20. Pravděpodobnost toho, že množství odebraného elektrického proudu v určitém závodě je normální (nepřesáhne plánovanou spotřebu za 24 hod.), je rovna 3/4. Stanovte pravděpodobnost, že v nejbližších šesti dnech bude alespoň po dobu tří dnů odběr proudu normální.

3.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. 0,33; 0,33
1.2. 0,825
1.3. 0,003
1.4. 0,53
1.5. 0,52
1.6. 0,0512; 0,0067; 0,9932
1.7. *a*) $p(x\leq 3) = \sum C_i(7)*0{,}2^i*0{,}8^{7-i}$, $i = 0,\dots, 3$
b) $p(x\geq 3) = 1 - \sum C_i(7)*0{,}2^i*0{,}8^{7-i}$, $i = 0, \dots, 2$
c) $p(x=3) = C_3(7)*0{,}2^3*0{,}8^4 \approx 0{,}11469$
d) $(n+1)*p-1 \leq x \leq (n+1)*p \rightarrow x = 1$
1.8. 0,942
1.9. *a*) $1 - C_0(5)*(1 - 0{,}4)^5 \approx 0{,}92224$
b) $x = 2$
1.10. 0,558
1.11. 7
1.12. 3.10^{-6}
1.13. 0,390156
1.14. 1 - 94/100 * 93/99 * 92/98 * 91/97 * 90/96 =
$= 1 - C_5(94) / C_5(100) = 0{,}270914$
1.15. 0,708
1.16. $C_1(6)C_3(18)/C_4(24)*C_1(5)*C_3(15)/C_4(20)*C_1(4)*C_3(12)/C_4(16)*$

$*C_1(3)*C_3(9)/C_4(12)*C_1(2)*C_3(6)/C_4(8)*C_1(1)*C_3(3)/C_4(4) = 0{,}0304318$

1.17. $1 - (5/6)^n > 1/2$; $n_{\min} = 4$

1.18. $p_{3/4}=C_3(4)*(1/3)*(2/3)=8/11=0{,}0987654$

$p_{5/8}=C_5(8)*(1/5)^5*(2/3)^3= 448/6581=0{,}0682822$

1.19. 0,411522

1.20. $1-(C_0(6)*(3/4)^0*(1/6)^6 + C_1(6)*(3/4)^1*(1/4)^5 + C_2(6)*(3/4)^2*(1/4)^4) = 0{,}9624$

3.1.3 Sada testovacích otázek

T3.1. Pravděpodobnost uskutečnění jevu *A* za předpokladu, že nastal jev *B*, se zapisuje
- *a)* $P(A/B)$ a nazývá se úplná pravděpodobnost.
- *b)* $P(A/B)$ a nazývá se podmíněná pravděpodobnost.
- *c)* $P(A \cap B)$ a nazývá se úplná pravděpodobnost.

T3.2. Každý pátý zákazník v supermarketu použije při placení platební kartu. V řadě u pokladny stojí před vámi tři zákazníci. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z nich bude platit kartou? Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.
- *a)* 0,5
- *b)* 0,6
- *c)* 0,7

T3.3. Který z následujících opakovaných pokusů je závislý?
- *a)* Střelba do terče.
- *b)* Střelba do davu.
- *c)* Hod kostkou.
- *d)* Hod navrtanou kostkou.

T3.4. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti hracími kostkami padnou pouze lichá čísla?
- *a)* přibližně 1,5%
- *b)* přibližně 2%
- *c)* přibližně 2,5%
- *d)* přibližně 3%

T3.5. Který z následujících opakovaných pokusů je nezávislý?
- *a)* Výběr karet z balíčku.
- *b)* Tahání různobarevných králíků z klobouku.
- *c)* Hod navrtanou kostkou.

T3.6. Opilec stojí na okraji výkopu, aniž by o tom věděl. S pravděpodobností 0,5 udělá krok vpřed a s pravděpodobností 0,5 krok vzad. Jaká je pravděpodobnost, že spadne do výkopu nejpozději po třech krocích?
- *a)* 57,5%
- *b)* 62,5%
- *c)* 66,6%

T3.7. Jsou-li náhodné jevy *A*, *B* nezávislé, pak platí
- *a)* $A \cap B = \emptyset$
- *b)* $A \cup B = I$
- *c)* $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- *d)* $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

T3.8. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,51, pravděpodobnost narození děvčete je 0,49. Rodina má dvě děti. Pak
- *a)* je pravděpodobnější, že obě děti budou stejného pohlaví.
- *b)* je pravděpodobnější, že děti budou různého pohlaví.
- *c)* možnosti *a), b)* jsou stejně pravděpodobné.

T3.9. Jsou-li náhodné jevy *A*, *B* neslučitelné, pak platí

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $A \cup B = I$

c) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

d) $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

T3.10. V přednáškové místnosti sedí 100 studentů. Mezi nimi je 60 mužů a 40 žen. Přednáška zajímá $\frac{2}{3}$ přítomných mužů a polovinu přítomných žen. Náhodně vybereme jednoho z přítomných, kterého přednáška zajímá. Jaká je pravděpodobnost, že je to muž?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{5}$

3.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T3.1. *b*)
T3.2. *a*)
T3.3. *b*)
T3.4. *a*)
T3.5. *c*)
T3.6. *b*)
T3.7. *c*)
T3.8. *a*)
T3.9. *d*)
T3.10. *b*)
T3.11. *b*)
T3.12. *a*)
T3.13. *b*)
T3.14. *a*)
T3.15. *c*)
T3.16. *b*)
T3.17. *c*)
T3.18. *a*)
T3.19. *d*)
T3.20. *b*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 4 – Náhodná veličina

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

4 NÁHODNÁ VELIČINA ... 3
4.1 Řešené úlohy ... 3
4.1.1 Úlohy k řešení ... 3
4.1.2 Výsledky úloh k řešení ... 4
4.1.3 Sada testovacích otázek ... 5
4.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám ... 7

4 NÁHODNÁ VELIČINA

4.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

4.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Třikrát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je p = 0,7.
Určete:
a) pravděpodobnostní funkci počtu zásahů při třech nezávislých výsledcích,
b) distribuční funkci a její graf.

1.2. Náhodná veličina X je dána distribuční funkcí:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x<3 \\ \dfrac{x}{3}-1 & \text{pro } 3\le x<6 \\ 1 & \text{pro } x\ge 6 \end{cases}$$

Určete $f(x)$, znázorněte graficky $f(x)$, $F(x)$ a $P(1{,}5 \le X \le 4)$.

1.3. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x<1 \\ x-\dfrac{1}{2} & \text{pro } 1\le x<2 \\ 0 & \text{pro } x\ge 2 \end{cases}$$

Určete distribuční funkci

1.4. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x<0 \\ cx(1-x) & \text{pro } 0\le x<1 \\ 0 & \text{pro } x\ge 1 \end{cases}$$

Určete koeficient c, distribuční funkci $F(x)$ a $P(X > 0{,}2)$.

1.5. Dva hráči hrají společenskou hru. Pravděpodobnost výhry hráče A je 2/3, hráče B 1/3. Hráči opakují hru tolikrát, až vyhraje hráč A. Určete zákon rozložení náhodné veličiny, která značí počet uskutečněných her.

1.6. Dokažte, že pro n = 1,2, …je výraz

$$p_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

pravděpodobnostní funkcí rozložení diskrétní náhodné veličiny. Určete pravděpodobnosti $P(X < 3)$, $P\left(X \le 10\right)$.

1.7. Určete,
a) pro jaká A, B bude $F\left(x\right)=A+\dfrac{B}{1+x^2}$ funkcí rozložení náhodné proměnné pro $x\in\left(0,\infty\right)$,
b) příslušnou hustotu rozložení.

1.8. Která z uvedených funkcí je pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X , která nabývá hodnot 0, 2, 4, 6:

a) $p\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$

b) $p\left(x\right)=\dfrac{c}{x+1}$

c) $p(x)=\frac{x^2-4}{2}$

1.9. Je funkce $F(x)=\sin x$ distribuční funkcí náhodné veličiny X v intervalu

a) $\langle 0,\pi \rangle$,

b) $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$?

1.10. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny má tvar:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<0\\ C.x.e^{-x} & \text{pro } x\ge 0\end{cases}$$

Určete konstantu C, $P(0\le X<2)$ a distribuční funkci.

1.11. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny, která značí součet ok při hodu
a) jednou kostkou,
b) dvěma kostkami,
c) třemi kostkami.

1.12. Určete,

a) pro jaké C bude funkce $F(x)=\sin Cx$ funkcí rozložení náhodné proměnné pro $x\in\langle 0,2\pi\rangle$,

b) příslušnou hustotu rozložení,

c) pravděpodobnost $P\left(\frac{\pi}{2}\le X<\frac{3\pi}{2}\right)$.

1.13. Náhodná veličina X je určena tabulkou:

X	-2	0	2	4	6
p	0,1	?	0,2	0,3	0,2

Určete hodnotu pravděpodobnosti pro $X = 0$, distribuční funkci a pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina nabude kladných hodnot.

1.14. Distribuční funkce Rayleighova rozdělení spojité náhodné veličiny má tvar:

$F(x)=C-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$. Určete konstantu C a hustotu pravděpodobnosti *f(x)*.

1.15. Je funkce $F(x)=\sin x$ distribuční funkcí náhodné veličiny X v intervalu

a) $\langle 0,\pi \rangle$,

b) $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$?

4.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. $p(x)=\binom{3}{x}.0,7^x.0,3^{3-x}$

1.2. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{pro } 3\le x<6\\ 0 & \text{jinde}\end{cases}$

$P(1,5) \leq X \leq 4 = \frac{1}{3}$

1.3. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, 2) \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$

1.4. $c = 6$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{pro } x \in \langle 0, 1) \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$

$P(X > 0,2) = 0,896$

1.5. $p_k = 2 / 3^k$

1.6. $P(X<3) = 2 / 3$; $P(X<=10) = 10 / 11$

1.7. $A = 1,\ B = -1,\ f(x) = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ \ x \in (0, \infty)$

1.8. pouze *b*) pro $c = 105/176$

1.9. pouze *b*)

1.10. $C = 1,\ P(0 \leq X < 2) = 1 - 3e^{-2},\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

1.11. *a*) $6.p_k = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$

b) $36.p_k = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

c) $216.p_k = (1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,21,15,10,6,3,1)$

1.12. *a*) $C = \dfrac{1}{4}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\mathrm{x}}{4} & \text{pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } x > 2\pi \end{cases}$

c) $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}} = 0,5412$

1.13. $P(X = 0) = 0,2,\ P(X > 7) = 0,7$

1.14. $C = 1,\ f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2}.e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$

1.15. *b*)

4.1.3 Sada testovacích otázek

T4.1. Je dána spojitá náhodná veličina a její distribuční funkce $F(x)$ a hustota pravděpodobnosti $f(x)$. Vyberte, jaký je mezi nimi vztah.

a) $F(x) = f\,'(x)$

b) $f(x) = F'(x)$

c) Mezi $F(x)$ a $f(x)$ neexistuje obecný matematický vztah.

T4.2. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<2\\ 2x-4 & \text{pro } x\in\langle 2;2{,}5\rangle\\ 1 & \text{pro } x>2{,}5\end{cases}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot větších než 0?

a) 0
b) 1
c) -4
d) 0,5

T4.3. Čemu je rovna hodnota distribuční funkce $F(\infty)$?

a) 0
b) 1
c) ∞

T4.4. Náhodná veličina *X* je určena distribuční funkcí:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<2\\ 2x-4 & \text{pro } x\in\langle 2;2{,}5\rangle\\ 1 & \text{pro } x>2{,}5\end{cases}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot větších než 5?

a) 0
b) 1
c) 0,5
d) 6

T4.5. Čemu je rovna hodnota výrazu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, kde $f(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny?

a) 0
b) 1
c) ∞
d) Nelze obecně rozhodnout.

T4.6. Náhodná veličina *X* je dána tabulkou rozdělení pravděpodobnosti:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	?	0,2	0,2

Čemu je rovna chybějící hodnota pravděpodobnosti pro *X* = 1?

a) 0,2
b) 0,4
c) 0,6

T4.7. Distribuční funkce náhodné veličiny je

a) rostoucí funkce.
b) klesající funkce.
c) nerostoucí funkce.
d) neklesající funkce.
e) funkce, která nemá žádnou z předchozích vlastností.

T4.8. Náhodná veličina *X* je dána tabulkou rozdělení pravděpodobnosti:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	?	0,2	0,2

Čemu je rovna hodnota distribuční funkce pro $X = 2$?

a) 0,2
b) 0,4
c) 0,6

T4.9. Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny je

a) rostoucí funkce.
b) klesající funkce.
c) nerostoucí funkce.
d) neklesající funkce.
e) funkce, která nemá žádnou z předchozích vlastností.

T4.10. Náhodná veličina X je

a) reálná funkce definovaná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která každému elementárnímu jevu přiřadí číslo z tohoto intervalu.
b) reálná funkce definovaná na množině reálných čísel, která každému reálnému číslu přiřadí elementární jev.
c) reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

4.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T4.1. *b*)
T4.2. *b*)
T4.3. *b*)
T4.4. *a*)
T4.5. *b*)
T4.6. *b*)
T4.7. *d*)
T4.8. *c*)
T4.9. *e*)
T4.10. *c*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 5 – Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

5 ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKA NÁHODNÉ VELIČINY 3
5.1 Řešené úlohy 3
5.1.1 Úlohy k řešení 3
5.1.2 Výsledky úloh k řešení 4
5.1.3 Sada testovacích otázek.. 4
5.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 6

5 ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKA NÁHODNÉ VELIČINY

5.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

5.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobnosti:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Určete střední hodnotu, rozptyl, koeficient asymetrie a špičatosti.

1.2. Pravděpodobnost zásahu cíle při každém ze čtyř výstřelů je 0,8. Nechť náhodná veličina X představuje počet zásahů cíle.
a) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.
b) Vypočtěte její střední hodnotu, disperzi a směrodatnou odchylku.

1.3. Ve městě byl po dobu 60 dnů evidován počet dopravních nehod v průběhu každého dne a podle počtu nehod v jednom dni vytvořena následující tabulka:

počet nehod / den	0	1	2	3	4	5	6
počet dnů s uvedeným počtem nehod	4	28	10	7	6	4	1

Pro počet nehod v jednom dni jako náhodnou proměnnou sestrojte pravděpodobnostní funkci, vypočtěte střední hodnotu a disperzi.

1.4. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4} & \text{pro } x\in(1,\infty)\\ 0 & \text{pro } x\notin(1,\infty)\end{cases}$$

Určete $F(x)$, $E(x)$, $D(x)$, směrodatnou odchylku.

1.5. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X, jejíž distribuční funkce má tvar:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<0\\ \dfrac{x}{2\pi} & \text{pro } x\in\langle 0,2\pi\rangle\\ 1 & \text{pro } x>2\pi\end{cases}$$

1.6. Házíme dvěma hracími kostkami. Určete rozdělení pravděpodobnosti součtu hozených bodů a modus.

1.7. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{pro } x\in(0{,}1)\\ 0 & \text{pro } x\notin(0{,}1)\end{cases}.$$ Určete kvartily.

1.8. Náhodná veličina X má distribuční funkci:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<2\\ 2x-4 & \text{pro } x\in\langle 2;2{,}5\rangle\\ 1 & \text{pro } x>2{,}5\end{cases}.$$ Určete první tři decily.

1.9. Funkce $f(x)=C\left(2x-x^2\right)$ má být hustotou rozložení pravděpodobnosti pro $x\in\langle 0,2\rangle$.
Určete
a) konstantu C,
b) funkci rozložení $F(x)$,

c) střední hodnotu příslušné náhodné veličiny,
d) disperzi a směrodatnou odchylku,
e) pravděpodobnost $P(X<1)$.

1.10. Funkce $f(x) = Ax\sin x$ je funkcí hustoty rozložení pravděpodobnosti pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
Určete
a) konstantu A
b) funkci $F(x)$,
c) střední hodnotu $E(X)$
d) disperzi $D(X)$

1.11. Mějme náhodnou veličinu X, jejíž hustota rozložení je dána funkcí.
$$f(x) = A.\cos kx,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k} \right\rangle,\ k > 0$$
Určete konstantu A, střední hodnotu a disperzi.

1.12. Funkce rozložení náhodné veličiny X má tvar
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -1 \\ A + B.\arcsin x & \text{pro } -1 \le x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \ge 1 \end{cases}$$ Určete
a) konstanty A, B
b) hustotu rozložení $f(x)$
c) střední hodnotu $E(X)$
d) disperzi $D(X)$

5.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. 2; 1; -0,6; -0,8

1.2. *a*) $\binom{4}{x}.0,8^x.0,2^{4-x}$
b) 3,2; 0,64; 0,8

1.3. $E(x) = 1{,}983$; $D(x) = 2{,}116$

1.4. $E(x) = 1{,}5$; $D(x) = 0{,}75$

1.5. $E(x) = \pi$, $D(x) = \dfrac{\pi^2}{3}$

1.6. $Mo(x) = 7$

1.7. $x_{0,25} = 0{,}5$
$$x_{0,25} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.8. $x_{0,1} = 2{,}05$; $x_{0,2} = 2{,}1$; $x_{0,3} = 2{,}15$

1.9. $C = 3/4$, $F(x) = 3/4\,(x^2 - x^3/3)$, $E(X) = 1$, $D(X) = 1/5$, $\sigma = \sqrt{(1/5)} = 0{,}4472$, $p = 1/2$

1.10. $A = 1/\pi$, $F(x) = 1/\pi(\sin(x) - x\cos(x))$, $E(X) = \pi - 4/\pi$, $D(X) = 2 - 16/\pi^2$

1.11. $A = k/2$, $E(X) = 0$, $D(X) = (\pi - 8)/4k^2 \approx 0{,}4672/k^2$

1.12. $A = 1/2$, $B = 1/\pi$, $f(x) = 1/\pi\sqrt{(1 - x^2)}$, $E(X) = 0$, $D(X) = 1/2$

5.1.3 Sada testovacích otázek

T5.1. Medián

a) dělí plochu pod křivkou hustoty pravděpodobnosti na dvě stejné části.
b) je hodnota, v níž nabývá frekvenční funkce maxima.

T5.2. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:
8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Čemu je roven modus?

T5.3. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:
8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Střední hodnota, medián a modus jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší do největší. Vyberte, kdy jsou seřazeny správně.
a) střední hodnota, medián, modus
b) modus, medián, střední hodnota
c) střední hodnota, modus, medián

T5.4. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:
8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Koeficient asymetrie je v tomto případě
a) menší než nula
b) roven nule
c) větší než nula

T5.5. V tabulce jsou dány hodnoty dvou náhodných veličin X a Y.

x_i	0	100	200	300	400
y_i	198	199	200	201	202

Porovnejte směrodatné odchylky s_x, s_y náhodných veličin X a Y.
a) $s_x > s_y$
b) $s_x = s_y$
c) $s_x < s_y$

T5.6. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x<2 \\ 2x-4 & \text{pro } x\in\langle 2;2{,}5\rangle \\ 1 & \text{pro } x>2{,}5 \end{cases}.$$

Čemu je roven medián?
a) 2
b) 2,1
c) 2,2
d) 2,25

T5.7. Mezi charakteristiky polohy nepatří
a) střední hodnota.
b) rozptyl.
c) medián.

T5.8. Číselná charakteristika směrodatná odchylka
a) charakterizuje rozptýlenost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty.
b) vyjadřuje, zda je rozložení náhodné veličiny symetrické.

T5.9. Modus
a) dělí plochu pod křivkou hustoty pravděpodobnosti na dvě stejné části.
b) je hodnota, v níž nabývá frekvenční funkce maxima.

T5.10. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:
8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Čemu je roven medián?

T5.11. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:

8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Hodnotu 8 zaměníme za hodnotu 10. Které ze tří sledovaných charakteristik, střední hodnota modus a medián, se změní?

a) Pouze střední hodnota.
b) Pouze střední hodnota a modus.
c) Střední hodnota, modus a medián.

T5.12. Jsou dány hodnoty diskrétní náhodné veličiny:
8, 10, 34, 34, 34, 36, 36, 40, 41, 42.
Hodnotu 8 zaměníme za hodnotu 40. Které ze tří sledovaných charakteristik, střední hodnota modus a medián, se změní?

a) Pouze střední hodnota.
b) Pouze střední hodnota a modus.
c) Pouze střední hodnota a medián.

T5.13. V tabulce jsou dány hodnoty dvou náhodných veličin X a Y.

x_i	0	100	200	300	400
y_i	198	199	200	201	202

Porovnejte rozptyly D_x, D_y náhodných veličin X a Y.

a) $D_x > D_y$
b) $D_x = D_y$
c) $D_x < D_y$

T5.14. Mezi momentové charakteristiky náhodné veličiny nepatří

a) střední hodnota.
b) rozptyl.
c) medián

5.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T5.1. *a*)
T5.2. 34
T5.3. *c*)
T5.4. *a*)
T5.5. *a*)
T5.6. *d*)
T5.7. *b*)
T5.8. *a*)
T5.9. *b*)
T5.10. 35
T5.11. *a*)
T5.12. *c*)
T5.13. *a*)
T5.14. *c*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 6 – Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

6 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY... 3

6.1 Řešené úlohy ... 3

6.1.1 Úlohy k řešení ... 3

6.1.2 Výsledky úloh k řešení ... 3

6.1.3 Sada testovacích otázek ... 4

6.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám ... 6

6 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY

6.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

6.1.1 Úlohy k řešení

6.1. Dlouhodobým pozorováním stavu vody v řece byla určena pravděpodobnost jarní povodně na $\frac{4}{15}$. Určete $E(x)$ a $D(x)$ počtu povodní v nejbližších 100 letech.

6.2. Při výstupní kontrole se z každých 100ks výrobků vybírá 30. Určete střední hodnotu a rozptyl počtu nekvalitních výrobků mezi těmito 30 kusy, je-li zmetkovitost výroby 2 %.

6.3. Za jasných letních nocí můžeme v průměru každých 10 minut vidět "padat hvězdu". Jaká je pravděpodobnost, že během 15 minut uvidíme dvě "padající hvězdy"?

6.4. Ke 400 šroubům M10 bylo omylem přimícháno 100 šroubů M8.
a) Jaké bude rozdělení pravděpodobnosti, že při náhodném výběru 5 šroubů bude $m = 1, 2, ..., 5$ šroubů správného rozměru?
b) Pro montáž přístroje potřebuje pracovník 4 šrouby rozměru M10. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými 5 šrouby budou alespoň 4 s požadovanými vlastnostmi?

6.5. Při výrobě aluminiových odlitků byla zkoumána bublinatost na vymezené ploše odlitků. Zkoumání bylo provedeno na souboru 250 odlitků, u nichž bylo zjištěno celkem 340 bublin. Vyjádřete rozdělení pravděpodobnosti počtu bublin na jednom odlitku.

6.6. Televizor má za 10 000 hodin chodu v průměru 10 poruch. Určete pravděpodobnost poruchy za 200 hodin chodu. Ověřte, zda patřičné binomické rozdělení lze nahradit rozložením Poissonovým.

6.7. Ve skladišti závodu je 5 000 výrobků stejného typu. Pravděpodobnost toho, že daný výrobek nevydrží kontrolní zapojení, je 0,1 %. Najděte pravděpodobnost, že z výrobků na skladě více než dva nevydrží kontrolní zapojení.

6.8. Pravděpodobnost toho, že výrobek nevydrží zátěž, je 0,001. Najděte pravděpodobnost toho, že z 5 000 výrobků více než jeden nevydrží zatížení. Srovnejte výsledky získané pomocí rozložení binomického a Poissonova.

6.9. Najděte pravděpodobnost toho, že mezi 200 výrobky se vyskytnou více než tři zmetky, když v průměru je zmetkovitost výroby těchto výrobků 1 %.

6.10. Korektura 500 stránek obsahuje 500 nalezených tiskových chyb. Najděte pravděpodobnost toho, že na stránce jsou nejméně tři chyby.

6.1.2 Výsledky úloh k řešení

6.1. 26,6; 19,5

6.2. 0,6; 0,416

6.3. 0,251

6.4. $f(x) = C_x(5).0{,}8^x.0{,}2^{5-x}$

6.5. $\lambda = 340/250 = 1{,}4$, Poissonovo rozložení

6.6. $p_n = 10 / 10\,000 = 10^{-3}$, $n = 200$, $x = n.p = 0{,}2 \approx n.p.q = 0.1998$, $p(x \neq 0) = 0.181269$

6.7. $x = 5\,000.10^{-3} = 5 = \lambda$, $p(x>2) = 0.875348$

6.8. $1-e^{-5}\sum_{x=0}^{1}\frac{5^x}{x!} = 0{,}959572$, $1-\sum\binom{5000}{x}.0{,}001^x.0{,}999^{5000-x} = 0{,}959639$

6.9. $1-e^{-2}\sum_{x=0}^{1}\frac{2^x}{x!} = 0{,}142876$, $1-\sum\binom{200}{x}.0{,}01^x.0{,}99^{200-x} = 0{,}141965$

6.10. $1-e^{-1}\sum_{x=0}^{2}\frac{1}{x!}=0,0803013$

6.1.3 Sada testovacích otázek

T6.1. Nechť náhodná veličina znamená počet hovorů v telefonní ústředně za jeden den. Jaké má tato náhodná veličina rozdělení pravděpodobnosti?
a) normální
b) binomické
c) Poissonovo
d) hypergeometrické

T6.2. Basketbalista dá koš s pravděpodobností 0,8. Kolik vstřelí průměrně košů při 20 hodech?

T6.3. Parametry hypergeometrického rozdělení jsou:
a) počet pokusů, pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu, počet prvků základního souboru.
b) počet pokusů, počet prvků základního souboru, počet prvků základního souboru s požadovanou vlastností.
c) počet pokusů, střední hodnota, rozptyl.

T6.4. Za jakých předpokladů můžeme binomické rozdělení nahradit Poissonovým?
a) Nikdy.
b) Počet pokusů n je velký a pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu p se blíží 0,5.
c) Počet pokusů n je velký a pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu p se blíží 0.

T6.5. Mezi 10 bankovkami v pokladně jsou dvě falešné. Pokladní nám vydala 4 bankovky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi není falešná bankovka.
a) 0,25
b) 0,33
c) 0,5

T6.6. Mezi 10 bankovkami v pokladně jsou dvě falešné. Pokladní nám vydala 4 bankovky. Jaký je průměrný počet vydaných falešných mincí?
a) 0,8
b) 1,2
c) 1,6

T6.7. Pokladní v obchodě obslouží v průměru 160 zákazníků za osmihodinovou pracovní dobu. Jaká je pravděpodobnost, že během jedné hodiny obslouží 20 zákazníků?
a) přibližně 9%
b) přibližně 39%
c) přibližně 69%
d) přibližně 99%

T6.8. Náhodná veličina, která vyjadřuje, zda při policejním zásahu byl či nebyl zadržen pachatel má
a) alternativní rozdělení pravděpodobnosti.
b) rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti.
c) binomické rozdělení pravděpodobnosti.

T6.9. Která z následujících náhodných veličin má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti?
a) střelba do terče
b) hod kostkou
c) opakované hody kostkou

T6.10. Náhodná veličina, která vyjadřuje počet děvčat narozených v určité porodnici má

a) rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti.
b) binomické rozdělení pravděpodobnosti.
c) hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti.

T6.11. Parametry rovnoměrného rozdělení diskrétní náhodné veličiny jsou
a) střední hodnota, rozptyl.
b) krajní meze intervalu, který vyplňují realizace náhodné veličiny.
c) počet možných výsledků.

T6.12. Parametr λ Poissonova rozdělení vyjadřuje
a) průměrný počet výskytů zkoumaného jevu v daném úseku jednotkové délky.
b) počet prvků základního souboru.
c) pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu.

T6.13. Nechť náhodná veličina představuje počet es ze čtyř karet vytažených z balíčku karet. Jaké má tato náhodná veličina rozdělení pravděpodobnosti?
a) normální
b) binomické
c) Poissonovo
d) hypergeometrické
e) rovnoměrné

T6.14. Která z následujících náhodných veličin má alternativní rozdělení pravděpodobnosti?
a) Počet zákazníků obchodu za jeden den.
b) Opakované hody kostkou.
c) Hod mincí.

T6.15. Parametry binomického rozdělení diskrétní náhodné veličiny jsou
a) střední hodnota, rozptyl.
b) počet nezávislých pokusů a počet prvků základního souboru.
c) počet nezávislých pokusů a pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu.

T6.16. Nechť náhodná veličina představuje pravděpodobnost, že při hodu kostku padne jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6.. Jaké má tato náhodná veličina rozdělení pravděpodobnosti?
a) normální
b) binomické
c) Poissonovo
d) hypergeometrické
e) rovnoměrné

T6.17. Víme, že náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti, λ je parametr tohoto rozdělení. Vyberte, která rovnost platí.
a) $E(X) = \lambda$
b) $E(X) = \lambda^2$
c) $D(X) = \lambda^2$
d) $D(X) = \frac{1}{\lambda}$

T6.18. Střelec trefí terč s pravděpodobností 0,6. Jaký je průměrný počet trefených terčů při patnácti střelách daného střelce?
a) 8
b) 9
c) 10
d) 12

T6.19. Která z následujících náhodných veličin má binomické rozdělení pravděpodobnosti?
a) Střelba do davu.
b) Hod kostkou.
c) Opakované hody kostkou.

T6.20. Nechť náhodná veličina představuje počet pacientů, kteří navštívili během dopoledne ordinaci konkrétního praktického lékaře.. Jaké má tato náhodná veličina rozdělení pravděpodobnosti?

a) normální
b) binomické
c) Poissonovo
d) hypergeometrické
e) rovnoměrné

6.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T6.1. *c*)
T6.2. 16
T6.3. *b*)
T6.4. *c*)
T6.5. *b*)
T6.6. *a*)
T6.7. *a*)
T6.8. *a*)
T6.9. *b*)
T6.10. *b*)
T6.11. *c*)
T6.12. *a*)
T6.13. *d*)
T6.14. *c*)
T6.15. *c*)
T6.16. *e*)
T6.17. *a*)
T6.18. *b*)
T6.19. *c*)
T6.20. c)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 7 – Rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

7 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIČINY 3

7.1 Řešené úlohy 3

7.1.1 Úlohy k řešení 3

7.1.2 Výsledky úloh k řešení 3

7.1.3 Sada testovacích otázek 4

7.1.4 Spávné odpovědi k testovacím otázkám 6

7 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIČINY

7.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

7.1.1 Úlohy k řešení

7.1. Náhodná veličina má hustotu pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1.e^{-0{,}1x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}.$$

Určete její střední hodnotu a rozptyl.

7.2. Náhodná veličina X má rozdělení $N(0, 1)$. Určete:
a) $P(X < 2{,}31)$
b) $P(X < -1{,}1)$
c) $P(-0{,}41 < X < 2{,}92)$

7.3. Náhodná veličina X má rozdělení $N(2, 9)$. Určete:
a) $P(X < 5)$
b) $P(X < -1)$
c) $P(0 < X < 2{,}33)$

7.4. Náhodná veličina má rozdělení pravděpodobnosti: *a*) $N(0, 1)$
b) $N(0,4)$
c) $N(1,4)$
Určete v případě *a*) $P(|X| < 0{,}7)$; b), c) $P(X < -0{,}5)$. Sestrojte graf $f(x)$, $F(x)$ a vypočtené pravděpodobnosti znázorněte.

7.5. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X, která má rozdělení N(10; 9), nabude hodnoty
a) menší než 16,
b) větší než 10,
c) v mezích od 7 do 22?

7.6. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech mincí padne lev aspoň čtyřicetkrát a maximálně padesátkrát?

7.7. Měření je zatíženo chybou -0,3 cm. Náhodné chyby měření mají normální rozdělení pravděpodobnosti se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0{,}5$ cm. Jaká je pravděpodobnost, že chyba měření nepřekročí v absolutní hodnotě trojnásobek směrodatné odchylky?

7.8. Váha v uhelných skladech váží s chybou 30 kg, přičemž snižuje váhu. Náhodné chyby mají normální rozdělení pravděpodobnosti se $\sigma = 100$ kg. Jaká je pravděpodobnost, že chyba zjištěné váhy nepřekročí v absolutní hodnotě 90 kg?

7.9. Kolik procent hodnot náhodné veličiny X s rozdělením $N(0, 1)$ leží mimo interval $(-2, 2)$?

7.10. Jakou je nutno stanovit toleranci, aby pravděpodobnost, že průměr pískového zrna překročí toleranční hranici, byla maximálně 0,45326, jestliže odchylky od středu tolerance (v 10^{-2} mm) mají normální rozdělení $N(0, 144)$.

7.1.2 Výsledky úloh k řešení

7.1. 10; 100
7.2. 0,98956; 0,13567; 0,65735
7.3. 0,84134; 0,15866; 0,29130
7.4. 0,51608; 0,40129; 0,22663
7.5. *a*) 0,97725, *b*) 0,5, *c*) 0,84131
7.6. 0,47725

7.7. 0,99164
7.8. 0,61068
7.9. 4,55
7.10. $7{,}2.10^{-2}$

7.1.3 Sada testovacích otázek

T7.1. Kolik parametrů má normální rozdělení pravděpodobnosti?
a) 1
b) 2
c) 3

T7.2. Všechny parametry normálního rozdělení pravděpodobnosti jsou
a) střední hodnota, rozptyl.
b) střední hodnota.
c) počet pokusů, střední hodnota, rozptyl.

T7.3. Kolik parametrů má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti?
a) 1
b) 2
c) 3

T7.4. Autobus odjíždí ze zastávky každých 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že na něj budeme čekat déle než 8 minut?
a) 0,4
b) 0,6
c) 0,8

T7.5. Autobus odjíždí ze zastávky každých 20 minut. Čemu je roven rozptyl průměrné doby čekání na tento autobus?
a) 16,67
b) 25
c) 33,33

T7.6. Vzdálenost mezi dvěmi dírami v silnici je po zimě na dané trase průměrně rovna 100 metrů. Vyberte funkci hustoty pravděpodobnosti, která popisuje tento jev.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100} & x\in\langle 0,100\rangle \\ 0 & x\notin\langle 0,100\rangle\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100}\cdot e^{\frac{-x}{100}} & x\geq 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2}$

T7.7. Vzdálenost mezi dvěmi dírami v silnici je po zimě na dané trase průměrně rovna 100 metrů. Jaká je pravděpodobnost, že po ujetí 200 metrů nenarazíte na díru v silnici?
a) přibližně 11,5%
b) přibližně 12,5%
c) přibližně 13,5%

T7.8. Vzdálenost mezi dvěmi dírami v silnici je po zimě na dané trase průměrně rovna 100 metrů. Při ujetí jaké vzdálenosti bude pravděpodobnost, že narazíte na díru v silnici 50%?
a) 50 metrů
b) 59 metrů
c) 69 metrů

T7.9. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(8,4)$. Pro kterou hodnotu je její distribuční funkce rovna 0,5?

a) 8
b) 4
c) 2

T7.10. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(8,4)$. Jak lze vyjádřit hodnotu distribuční funkce tohoto rozdělení pro $x = 10$ v závislosti na distribuční funkci normovaného normálního rozdělení?

a) $F(10) = \Phi(1)$
b) $F(10) = \Phi(2)$
c) $F(10) = \Phi(4)$

T7.11. Pro které hodnoty parametru p můžeme binomické rozdělení aproximovat normálním rozdělením?

a) $p \in \langle 0;0,5 \rangle$
b) $p \in \langle 0,3;0,7 \rangle$
c) $p \notin \langle 0,3;0,7 \rangle$

T7.12. Spojitá náhodná veličina, která představuje dobu bezporuchovosti technických zařízení, kterým nevyhovuje exponenciální rozdělení (např. pračka, myčka, …) má

a) normální rozdělení pravděpodobnosti.
b) Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti.
c) Studentovo rozdělení pravděpodobnosti.

T7.13. Parametry rovnoměrného rozdělení spojité náhodné veličiny jsou

a) střední hodnota, rozptyl.
b) krajní meze intervalu, který vyplňují realizace náhodné veličiny.
c) počet možných výsledků.

T7.14. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(0,16)$. Pro kterou hodnotu je její distribuční funkce rovna 0,5?

a) 0
b) 4
c) 16

T7.15. Nechť náhodná veličina představuje vzdálenost mezi dvěmi poruchami ve struktuře krystalu. Jaké má tato náhodná veličina rozložení pravděpodobnosti?

a) normální
b) binomické
c) Poissonovo
d) exponenciální

T7.16. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(0,16)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $\langle -4,4 \rangle$?

a) Přibližně 60%.
b) Přibližně 68%.
c) Přibližně 76%.
d) Přibližně 88%.
e) Přibližně 100%.

T7.17. Vyberte, které dokončení věty je správně. Distribuční funkce náhodné veličiny X, která má normální rozdělení pravděpodobnosti je

a) konvexní na celém definičním oboru.
b) funkce, která není spojitá.
c) rostoucí funkce v celém definičním oboru.
d) klesající funkce v celém definičním oboru.

MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

e) je pro všechna záporná čísla konstantní funkce.

T7.18. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(0,16)$. Ve kterém bodě dosahuje funkce hustoty pravděpodobnosti této náhodné veličiny maxima?

a) 0
b) 4
c) 16

T7.19. Hustota pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu X, která má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti, je funkce, která je v intervalu $(-\infty,0)$ vždy

a) rostoucí
b) klesající
c) konstantní

T7.20. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti $N(0,16)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $\langle -16,16 \rangle$?

a) Přibližně 60%.
b) Přibližně 68%.
c) Přibližně 76%.
d) Přibližně 88%.
e) Přibližně 100%.

7.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T7.1. *b*)
T7.2. *a*)
T7.3. *a*)
T7.4. *b*)
T7.5. *c*)
T7.6. *b*)
T7.7. *c*)
T7.8. *c*)
T7.9. *a*)
T7.10. *a*)
T7.11. *b*)
T7.12. *b*)
T7.13. *b*)
T7.14. *a*)
T7.15. *d*)
T7.16. *b*)
T7.17. *c*)
T7.18. *a*)
T7.19. *c*)
T7.20. e)

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 8 – Statistický soubor s jedním argumentem

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

8 STATISTICKÝ SOUBOR S JEDNÍM ARGUMENTEM 3

8.1 Řešené úlohy 3

8.1.1 Úlohy k řešení 3

8.1.2 Výsledky úloh k řešení 3

8.1.3 Sada testovacích otázek.. 3

8.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 6

8 STATISTICKÝ SOUBOR S JEDNÍM ARGUMENTEM

8.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

8.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Určete medián a střední hodnotu měsíční spotřeby elektrické energie (kWh) v bytech z následujících údajů:
169, 108, 26, 43, 114, 68, 35, 183, 103, 266, 74, 205, 62, 230, 85, 487, 120, 148, 91, 18, 58, 96, 295, 42, 137

1.2. Student se připravuje na zkoušku. Zjistil, že musí nastudovat průměrně 20 stran denně. První polovinu knihy studoval s rychlostí 10 stran denně. Stihne studium celé látky v určeném termínu, bude-li druhou polovinu studovat rychlostí 30 stran denně? Určete průměrný počet stran, které denně nastudoval.

1.3. Zkoušky životnosti žárovek daly následující výsledky (v hodinách):
606, 1249, 267, 44, 510, 340, 109, 1957, 463, 801, 1082, 169, 233, 1734, 1458, 80, 1023, 2736, 917, 459.
Určete střední dobu životnosti žárovek a jejich disperzi.

1.4. Určete decily, kvartily a medián statistického souboru daného variační řadou:

x_k	1	2	3	4	5	6	7
f_k	2	15	16	17	14	13	2

1.5. Vypočtěte střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, koeficient šikmosti a špičatosti statistického souboru.

x	220	230	240	250	260	270	280
f_x	2	5	25	38	20	7	3

8.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. $x_{0,5}$ = 103kWh, x = 130,52kWh

1.2. ne, 15

1.3. $\bar{x}$ = 811,85; s_x^2 = 493407

1.4. Me = 4

pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9
decil	2	2	3	3	4	4	5	5	6
kvartil	3	4	5						

1.5. 250,2; 137,96; 11,75; 0,18; 0,36

8.1.3 Sada testovacích otázek

T8.1. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je rovna hodnota relativní četnosti $\phi_i(6)$?

a) 0,3
b) 0,6
c) 0,9

T8.2. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je rovna hodnota kumulativní četnosti $F_i(6)$?

a) 3
b) 6
c) 9

T8.3. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je roven modus?

a) 4
b) 4,2
c) 4,6
d) 5

T8.4. Empirická směrodatná odchylka je statistická charakteristika, která je vždy

a) záporná.
b) nezáporná.
c) kladná.

T8.5. Medián statistického souboru je hodnota argumentu *X*, která

a) rozděluje soubor uspořádaný na dvě části o stejném počtu prvků. Má-li soubor sudý počet prvků, považuje se za medián průměrná hodnota prostředních dvou.
b) má největší absolutní četnost.
c) se vypočte jako rozdíl empirické střední hodnoty a směrodatné odchylky.

T8.6. Pomocí Shepardových korekcí se

a) korigují chyby, které vznikají při výpočtu centrálních momentů u rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.
b) počítá šířka *h* tříd u rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.
c) se přepočítávají třídní znaky u rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.

T8.7. Počet všech prvků statistického souboru se nazývá

a) základní soubor.
b) rozsah souboru.
c) statistická jednotka.

T8.8. Interval $\langle x_m, x_M \rangle$, kde x_M a x_m jsou maximum a minimum z hodnot argumentu *X*, se nazývá

a) variační rozpětí argumentu *X*.
b) variační obor argumentu *X*.
c) statistická jednotka argumentu *X*.

T8.9. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je roven první kvartil?

a) 2
b) 3
c) 4

T8.10. Při rozdělení statistického souboru do tříd nahradíme všechny hodnoty v dané třídě tzv. třídním znakem, který je roven

a) aritmetickému průměru obou mezí třídy.
b) podílu horní meze a šířky třídy.
c) podílu horní meze a třídní četnosti.

T8.11. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je rovna hodnota relativní kumulativní četnosti $\Phi_i(6)$?
a) 0,3
b) 0,6
c) 0,9

T8.12. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je rovna empirická střední hodnota $\bar{x}$?
a) 4
b) 4,2
c) 4,6
d) 5

T8.13. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je roven medián?
a) 4
b) 4,2
c) 4,6
d) 5

T8.14. Může empirická směrodatná odchylka s nabývat nulové hodnoty?
a) Ne.
b) Ano. V případě, že se všechna data rovnají stejné hodnotě.
c) Ano. V případě, že se mezi daty nachází hodnota 0.

T8.15. Modus statistického souboru je hodnota argumentu X, která
a) rozděluje soubor uspořádaný na dvě části o stejném počtu prvků. Má-li soubor sudý počet prvků, považuje se za medián průměrná hodnota prostředních dvou.
b) má největší absolutní četnost.
c) se vypočte jako rozdíl empirické střední hodnoty a směrodatné odchylky.

T8.16. Pomocí Shepardových korekcí se korigují
a) pouze liché centrální momenty, v případě rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.
b) pouze sudé centrální momenty, v případě rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.
c) všechny centrální momenty, v případě rozsáhlého statistického souboru, který je rozdělen do tříd.

T8.17. Hodnota $R = x_M - x_m$, kde x_M a x_m jsou maximum a minimum z hodnot argumentu X, se nazývá
a) variační rozpětí argumentu X.
b) variační obor argumentu X.
c) statistická jednotka argumentu X.

T8.18. Pomocí centrálního empirického momentu 3. řádu je vyjádřena momentová charakteristika
a) empirický rozptyl.

b) empirický koeficient šikmosti.
c) empirický exces.

T8.19. Je dána variační řada

x_i	2	4	6	8
f_i	2	4	3	1

Čemu je roven třetí kvartil?
a) 6
b) 7
c) 8

T8.20. Statistika je
a) vědní disciplína, která se zabývá metodami získávání, zpracování a vyhodnocování hromadných dat.
b) obzvláště rafinovaná forma lži.
c) blbost.

8.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T8.1. *a*)
T8.2. *c*)
T8.3. *a*)
T8.4. *b*)
T8.5. *a*)
T8.6. *a*)
T8.7. *b*)
T8.8. *b*)
T8.9. *c*)
T8.10. *a*)
T8.11. *c*)
T8.12. *c*)
T8.13. *a*)
T8.14. *b*)
T8.15. *b*)
T8.16. *b*)
T8.17. *a*)
T8.18. *b*)
T8.19. *a*)
T8.20. *a*)

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 9 – Statistický soubor se dvěma argumenty

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

9 STATISTICKÝ SOUBOR SE DVĚMA ARGUMENTY 3

9.1 Řešené úlohy 3

9.1.1 Úlohy k řešení 3

9.1.2 Výsledky úloh k řešení 4

9.1.3 Sada testovacích otázek 4

9.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 7

9 STATISTICKÝ SOUBOR SE DVĚMA ARGUMENTY

9.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

9.1.1 Úlohy k řešení

1.1. U studentů 1.ročníku byly zaznamenány výsledky zkoušek z matematiky, fyziky a programování. Jsou uvedeny ve formě trojic číslic, z nichž první je známka z matematiky, druhá z fyziky a třetí z programování:

111	111	112	112	113	122	122	121	122	123
124	122	121	131	132	143	212	212	212	213
212	212	221	224	223	222	222	222	223	222
231	233	232	232	231	231	232	233	234	232
231	233	232	234	233	233	233	233	232	232
241	242	314	312	311	313	313	313	313	322
321	324	323	322	323	323	323	323	324	323
323	333	332	332	334	333	333	333	332	334
334	332	332	333	332	331	332	333	333	333
331	332	334	333	333	333	333	333	332	333
334	333	333	333	332	333	334	333	343	343
342	343	344	343	343	343	424	434	443	432
431	432	433	442	443	443	443	443	443	442
444	444	444	444	444					

a) Vytvořte statistický soubor s dvěma argumenty, z nichž X bude znamenat výsledek zkoušky z matematiky a Y výsledek zkoušky z fyziky a určete jeho charakteristiky.

b) Vytvořte statistický soubor s dvěma argumenty, z nichž X bude znamenat výsledek zkoušky z matematiky a Y výsledek zkoušky z programování a určete jeho charakteristiky.

1.2. U 130 zákrsků bylo zjištěno stáří stromu v letech (argument X) a sklizeň v jistém roce v kg (argument Y). Podle údajů v tabulce určete charakteristiky tohoto souboru.

$X\backslash Y$	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	0	0	0	0	0	0	0
4	0	5	10	2	0	0	0	0
5	0	0	0	2	8	3	0	0
6	0	0	0	0	0	12	10	0
7	0	0	0	0	0	8	15	4
8	0	0	0	0	4	16	8	0
9	0	3	12	2	0	0	0	0

1.3. Určete číselné charakteristiky:

obsah uhlíku v uhlí	90,5	89,0	88,6	91,3	90,0	87,5	86,8	86,0	84,6	84,6	88,8	87,0	86,7	83,9	87,6	84,7
součinitel melitelnosti	1,201	1,032	1,032	1,037	0,663	0,537	0,512	0,451	0,360	0,340	0,840	0,603	0,410	0,439	0,375	0,426

1.4. Měříme procentuální obsah křemíku v surovém železe (proměnná y) při rozličných teplotách ve stupních Celsia (proměnná y). Vypočtěte koeficient korelace.

x	1300	1320	1340	1360	1380	1400	1420	1440	1460	1480	1500
y	0,3	0,29	0,35	0,28	0,38	0,42	0,47	0,51	0,62	0,68	0,7

1.5. Při výrobě plynového oleje se pozorovala závislost mezi bodem tuhnutí Y (°C) a bodem zákalu X (°C). Změřily se tyto hodnoty:

x	2,4	1,6	2,0	2,0	3,0	2,8	2,1

y	-5,6	-4,4	-4,0	-5,8	-6,2	-4,0	-5,7

Zjistěte koeficient korelace

9.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. *a)* $\overline{x} = 2{,}64;\ \overline{y} = 2{,}69;\ s_x^2 = 0{,}75;\ s_y^2 = 0{,}822;\ k_{xy} = 0{,}354;\ r_{xy} = 0{,}451$

b) $\overline{x} = 2{,}637;\ \overline{y} = 2{,}607;\ s_x^2 = 0{,}75;\ s_y^2 = 0{,}787;\ k_{xy} = 0{,}295;\ r_{xy} = 0{,}384;$

1.2. $\overline{x} = 6{,}53;\ \overline{y} = 8{,}15;\ s_x^2 = 3{,}1;\ s_y^2 = 3{,}59;\ k_{xy} = 1{,}11;\ r_{xy} = 0{,}34$

1.3. x … obsah uhlíku v uhlí, y … součinitel melitelnosti.

$\overline{x} = 87{,}355;\ \overline{y} = 0{,}641;\ s_x^2 = 4{,}818;\ s_y^2 = 0{,}079;\ k_{xy} = 0{,}510;\ r_{xy} = 0{,}828$

1.4. 0,956

1.5. -0,276

9.1.3 Sada testovacích otázek

T9.1. Rozptýlenost veličin statistického souboru se dvěmi argumenty X, Y ve všech jejich vzájemných kombinacích vystihuje

a) variance veličiny X.
b) kovariance.
c) centrální moment (2+0)-tého stupně.

T9.2. Matici ve tvaru $\begin{vmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{vmatrix}$, kde r je koeficient korelace, nazýváme

a) korelační matice.
b) kovarianční matice.
c) jednotková vektorová matice.

T9.3. Statistický soubor se dvěmi argumenty je zadán plošnou četnostní tabulkou

$X \backslash Y$	0	20
0	2	1
20	3	2
40	0	2

Jaký je rozsah tohoto souboru?

a) 10
b) 40
c) 80

T9.4. Statistický soubor se dvěmi argumenty je zadán plošnou četnostní tabulkou

$X \backslash Y$	0	20
0	2	1
20	3	2
40	0	2

Čemu je rovna střední hodnota veličiny X?

a) 10
b) 14
c) 18

T9.5. Statistický soubor se dvěmi argumenty je zadán plošnou četnostní tabulkou

$X \backslash Y$	0	20
0	2	1

20	3	2
40	0	2

Čemu je rovna střední hodnota veličiny *Y*?

a) 10
b) 14
c) 18

T9.6. Statistický soubor se dvěmi argumenty je zadán plošnou četnostní tabulkou

*X**Y*	0	20
0	2	1
20	3	2
40	0	2

Čemu je roven rozptyl veličiny *Y*?

a) 10
b) 40
c) 100

T9.7. Statistický soubor se dvěmi argumenty je zadán plošnou četnostní tabulkou

*X**Y*	0	20
0	2	1
20	3	2
40	0	2

Jak by se tento soubor zadal lineární tabulkou?

a)

x	0	0	60	40	0	80
y	0	20	0	40	0	40

b)

x	0	0	0	20	20	20	20	20	40	40
y	0	0	20	0	0	0	20	20	20	20

c)

x	0	0	0	60	60	60	40	40	80	80
y	0	0	20	0	0	0	40	40	40	40

T9.8. Smíšený centrální moment druhého stupně $n_{1,1}$ statistického souboru se dvěmi argumenty vystihuje

a) rozptýlenost obou veličin ve všech jejich vzájemných kombinacích.
b) střední hodnotu veličiny *X*.
c) varianci veličiny *X*.

T9.9. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	0	2	4	6

Čemu je roven rozptyl proměnné *X*?

a) 2
b) 4
c) 6

T9.10. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	0	2	4	6

Kovarianci můžeme vyjádřit například vztahem $\operatorname{cov} xy = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j f_{ij} x_i y_j - \bar{x}.\bar{y}$. Jaké hodnotě je tedy kovariance rovna pro zadaný soubor?

a) 2
b) 4
c) 6

T9.11. Počet výskytů konkrétní dvojice (x_i, y_j), která je realizací náhodných veličin X a Y, se nazývá
a) absolutní četnost této dvojice.
b) relativní četnost této dvojice.
c) kumulativní četnost této dvojice.

T9.12. Vyberte správnou možnost. Koeficient korelace je charakteristika statistického souboru se dvěmi argumenty,
a) která je nepřímo úměrná kovarianci.
b) jejíž hodnota je vždy menší než hodnota kovariance daného statistického souboru se dvěmi argumenty.
c) jejíž hodnota je vždy větší než hodnota kovariance daného statistického souboru se dvěmi argumenty.
d) která je přímo úměrná kovarianci.

T9.13. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Jak by se dal tento statistický soubor vyjádřit plošnou tabulkou?

a)

$X\backslash Y$	2	4
2	4	4
6	0	3

b)

$X\backslash Y$	2	4
2	2	4
6	0	3

c)

$X\backslash Y$	2	4
2	2	1
6	0	1

T9.14. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Jaký je rozsah tohoto statistického souboru?
a) 12
b) 24
c) 4

T9.15. Podíl $\dfrac{f_{i,j}}{N}$, kde $f_{i,j}$ je absolutní četnost dvojice (x_i, y_j) a N je rozsah statistického souboru se dvěmi argumenty, se nazývá
a) relativní kumulativní četnost této dvojice.
b) relativní četnost této dvojice.
c) kumulativní četnost této dvojice.

T9.16. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Čemu je rovna střední hodnota argumentu X?

a) 3
b) Přibližně 3,33.
c) 4

T9.17. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Která možnost platí?
a) $s_x > s_y$
b) $s_x < s_y$
c) $s_x = s_y$

T9.18. Matici ve tvaru $\begin{vmatrix} \operatorname{cov} xy & r \\ r & \operatorname{cov} xy \end{vmatrix}$, kde r je koeficient korelace,
a) nazýváme korelační matice.
b) nazýváme kovarianční matice.
c) nazýváme jednotková vektorová matice.
d) ve statistice nijak nenazýváme.

T9.19. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Která možnost platí?
a) $\operatorname{cov} xy < r$
b) $\operatorname{cov} xy = r$
c) $\operatorname{cov} xy > r$

T9.20. Statistický soubor se dvěma argumenty je zadán lineární tabulkou

x	2	2	6	2
y	2	2	4	4

Čemu je rovna střední hodnota argumentu Y?
a) 3
b) Přibližně 3,33.
c) 4

9.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T9.1. *b*)
T9.2. *a*)
T9.3. *a*)
T9.4. *c*)
T9.5. *a*)
T9.6. *c*)
T9.7. *b*)
T9.8. *a*)
T9.9. *b*)
T9.10. *b*)
T9.11. *a*)
T9.12. *d*)
T9.13. *c*)
T9.14. *c*)
T9.15. *b*)
T9.16. *a*)
T9.17. *a*)

T9.18. *d*)
T9.19. *c*)
T9.20. *a*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 10 – Regrese a korelace

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

10 REGRESE A KORELACE 3

10.1 Řešené úlohy 3

10.1.1 Úlohy k řešení 3

10.1.2 Výsledky úloh k řešení 4

10.1.3 Sada testovacích otázek 5

10.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 5

10 REGRESE A KORELACE

10.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

10.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Charakterizujte závislost proměnné y na x regresní funkcí ve tvaru:

a) $Y = a + \frac{b}{x}$

b) $Y = ax^2 + bx + c$

Určete indexy korelace

x	1	1	3	4	6
y	0	1	4	5	5

1.2. Při seskoku parašutisty byla měřena závislost mezi rychlostí v [m/s] a tlakem p [0,1mPa] na povrchu padáku. Výsledky vyrovnejte parabolou $p = a + bv^2$. Vypočtěte index korelace.

v	2,4	3,5	5	6,89	10
p	0,0141	0,0281	0,0562	0,1125	0,225

1.3. Charakterizujte těsnost zvolené závislosti ve tvaru $Y = a + b.\log x$ mezi proměnnými x a y. Vypočtěte index korelace.

x	1	1	3	3	5	6	7	7
y	70	104	162	210	200	250	240	260

1.4. Zjišťovalo se, zda u souboru chlapců je závislost v počtu provedených shybů a kliků. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce:

chlapec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
počet shybů	1	3	2	0	5	6	1	4	3	5	6	2	1	1	8
počet kliků	10	15	15	0	40	25	7	31	30	35	41	10	14	9	64

a) Určete, zda je mezi počtem shybů a počtem kliků silná lineární závislost, určete její míru.

b) Najděte nejvhodnější regresní funkci závislosti mezi počtem shybů a kliků.

1.5. V tabulce jsou průměrné doby trvání slunečního svitu za období 1961-1990 v Praze-Ruzyni (argument x) a dlouhodobé průměrné teploty vzduchu za období 1961–1990 v Praze-Ruzyni (argument y).

	leden	únor	březen	duben	květen	červen	červenec	srpen	září	říjen	listopad	prosinec
x [h]	50,0	72,4	124,7	167,6	214,0	218,6	226,7	212,3	161,0	120,8	53,6	46,7
y [°C]	-2,4	-0,9	3,0	7,7	12,7	15,9	17,5	17,0	13,3	8,3	2,9	-0,6

Najděte vhodnou regresní funkci závislosti y na x a vypočtěte index determinace.

1.6. Tabulka obsahuje data o vývoji indexu spotřebitelských cen – životních nákladů v ČR.

průměr roku 2005 = 100

rok	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
index	59,1	64,5	70,2	76,2	84,4	86,2	89,4	93,6	95,4	95,5	98,1	100,0	102,5	105,4	112,1	113,3	114,9

Proložte daty vhodnou regresní funkci a využijte ji k odhadu hodnoty indexu v roce 2015.

1.7. Podobně jako v předchozím případě – z údajů v tabulce průměrných mezd v ČR odhadněte průměrný plat v roce 2015.

rok	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
mzda	13 219	14 378	15 524	16 430	17 466	18 344	19 546	20 957	22 592	23 344	23 797

1.8. Popište závislost produktivity práce (v desítkách kusů za hodinu) na % plnění norem *x* a průměrném věku pracovníků *z* v pěti firmách, zabývajících se výrobou stejného druhu výrobků pomocí regresní roviny. Vypočítejte hodnotu indexu korelace a odhadněte hodnotu produktivity práce při plnění norem na 106 % a při průměrném věku pracovníků 32 let.

y - produktivita	1	2	2	3	3
x - plnění normy	0,9	1,02	1,05	1,3	1,4
z - průměrný věk	30	27	26	27	25

1.9. V tabulce jsou uvedeny hodnoty tří nezávisle proměnných x_1, x_2 a x_3 a hodnota závisle proměnné *y*. Stanovte lineární regresi mezi těmito veličinami a hodnotu indexu determinace.

y	11	7	10	11	10	9	15	16
x_1	1	-1	0	4	2	4	1	2
x_2	1	2	3	-2	1	3	-1	0
x_3	1	0	2	-3	0	-1	1	2

1.10. Posuďte vliv jednotlivých vybraných ukazatelů parních elektráren v roce 1984 na měrné náklady elektráren. Úlohu řešte vícenásobnou lineární regresní analýzou.

elektrárna	y	x_1	x_2	x_3	x_4
Mělník 2	249	0,95	6,86	14,01	12,92
Počerady 1	203	2,27	7,56	12,06	11,74
Chvaletice	256	2,34	6,79	15,03	11,74
Dětmarovice	306	4,34	7,25	17,38	11,7
Tušimice 1	227	2,22	6,58	10,28	12,49
Tušimice 2	213	2,62	7,35	10,12	12,13
Prunéřov 1	349	5,18	6,66	11,26	13,49
Prunéřov 2	210	4,24	7,47	11,53	11,15

y ... měrné náklady [Kč/MWh], x_1 ... poruchy [%], x_2 ... využití pohotového výkonu [tisíce hodin], x_3 ... cena paliva [Kč/GJ], x_4 ... měrná spotřeba [GJ/MWh]

10.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. a) $Y = 6{,}06 - \dfrac{5{,}565}{x}; I = 0{,}985$; b) $Y = -2{,}15 + 2{,}942x - 0{,}2913x^2; I = 0{,}99$

1.2. $p = 0{,}00144 + 0{,}0022506v^2; I = 0{,}9996$

1.3. $Y = 88{,}32 + 191{,}54 \log x; I = 0{,}96$

1.4. Lineární funkce: $Y = 6{,}6939x + 1{,}6463$; $I = 0{,}927577$
Kvadratická funkce: $Y = 0{,}243x^2 + 4{,}8667x + 3{,}7354$; $I = 0{,}93043$

1.5. $Y = 0{,}098x - 5{,}766, I^2 = 0{,}888$

1.6. $\text{index}_{2015} = 133{,}8$

1.7. $\text{mzda}_{2015} = 29699$

1.8. $Y = 3{,}2456x - 0{,}0905z + 0{,}9640$; 1,5071

1.9. $Y = 0{,}9799x_1 - 1{,}2680x_2 + 1{,}8424x_3 + 10{,}1816; I^2 = 0{,}9636$

1.10. $Y = -317,561 + 22,295x_1 - 19,545x_2 + 1,187x_3 + 41,457x_4$, $I^2 = 0,9908$

10.1.3 Sada testovacích otázek

T10.1. Index korelace používáme k
- *a)* posouzení míry lineární závislosti mezi veličinami.
- *b)* vyjádření závislosti mezi dvěma statistickými znaky.
- *c)* posouzení vhodnosti regresní funkce.

T10.2. Regresí rozumíme
- *a)* míru (intenzitu) závislosti statistických znaků.
- *b)* vystižení charakteru závislosti mezi veličinami a určení její konkrétní formy.
- *c)* vypočtení konstant *a*, *b* z rovnice $Y = ax + b$.

T10.3. Metodu nejmenších čtverců odchylek používáme ve statistice k
- *a)* nalezení nejlepšího funkčního předpisu statistické závislosti.
- *b)* vypočtení koeficientu korelace.
- *c)* vypočtení indexu korelace.

T10.4. Koeficient korelace používáme k
- *a)* posouzení míry lineární závislosti mezi veličinami.
- *b)* vyjádření závislosti mezi dvěma statistickými znaky.
- *c)* posouzení vhodnosti regresní funkce.

T10.5. Index korelace může nabývat v případě lineární regrese hodnot z intervalu
- *a)* $\langle -1,1 \rangle$
- *b)* $\langle 0,1 \rangle$
- *c)* $\langle 0,\infty)$

T10.6. Při různých rychlostech byly naměřeny následující hodnoty spotřeby automobilu:

rychlost *x*	50	60	70	80	90	100	110	120	130
spotřeba *y*	8,5	7,8	7,3	7,1	6,9	7	7,4	7,9	8,6

Která regresní křivka bude nejlépe vystihovat závislost mezi rychlostí *x* a spotřebou *y* (hodnoty *a*, *b*, případně *c* by se vypočetly například metodou nejmenších čtverců)?
- *a)* $Y = a + bx$
- *b)* $Y = a + bx + cx^2$
- *c)* $Y = a + b.\log x$

T10.7. Blíží-li se hodnota indexu korelace k nule, pak
- *a)* se mezi danými veličinami jedná vždy o slabou lineární závislost.
- *b)* se mezi danými veličinami jedná vždy o silnou lineární závislost.
- *c)* vypočtená regresní funkce nevystihuje statistickou závislost mezi veličinami.

10.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T10.1. *c*)
T10.2. *b*)
T10.3. *a*)
T10.4. *a*)
T10.5. *b*)
T10.6. *b*)
T10.7. *c*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 11 – Induktivní statistika

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

11 INDUKTIVNÍ STATISTIKA 3
11.1 Řešené úlohy 3
11.1.1 Úlohy k řešení 3
11.1.2 Výsledky úloh k řešení 3
11.1.3 Sada testovacích otázek 4
11.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 5

11 INDUKTIVNÍ STATISTIKA

11.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

11.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Byla měřena délka trvání určitého procesu. Z 12 měření byla zjištěna střední doba trvání procesu 44 s a směrodatná odchylka 4 s. Sestrojte 90 % a 95 % interval spolehlivosti pro očekávanou délku procesu za předpokladu normálního rozdělení.

1.2. Bylo zkoušeno 30 náhodně vybraných ocelových tyčí k určení meze kluzu určitého druhu oceli. Po zpracování výsledků byla určena její empirická střední hodnota 286,4 MPa a rozptyl 121 [MPa^2]. Určete intervalový odhad parametrů základního souboru s 95% spolehlivostí. Kolik vzorků by bylo třeba volit, aby chyba určené střední hodnoty nepřesáhla 2 MPa?

1.3. Určete intervalový odhad s 90% spolehlivostí střední hodnoty a směrodatné odchylky pro následující hodnoty:
606, 1249, 267, 44, 510, 340, 109, 1957, 463, 801, 1086, 169, 233, 1734, 1458, 80, 1023, 2736, 917, 459.

1.4. Určete oboustranný konfidenční interval rozptylu normálně rozloženého základního souboru pro hladiny spolehlivosti 0,90; 0,95 a 0,99, když u výběru s rozsahem n = 12 byl zjištěn rozptyl 0,64.

1.5. Dopravní policie naměřila v jednom z úseků obce během jedné hodiny rychlosti 48 projíždějících vozidel. Údaje jsou v tabulce. Vypočtěte 95% interval spolehlivosti průměrné rychlosti vozidel projíždějících sledovaným úsekem.

38	78	47	64	42	45	70	47
78	39	56	60	58	70	41	71
71	41	60	48	49	58	37	41
75	48	42	80	85	80	56	57
52	62	64	36	55	78	37	85
82	36	60	75	46	51	80	38

1.6. Použijeme-li zadání předchozí úlohy. Kolik automobilů by museli policisté změřit, aby při dané hladině významnosti byla průměrná rychlost změřena s přesností 1 km/h?

1.7. Během pracovního postupu byla v laboratoři předepsána stálá teplota 26,5°C. Při kontrole bylo během týdne provedeno 50 namátkových měření. Výpočtem byla přitom určena střední hodnota $\bar{x}$ = 26,31°C a odchylka s = 0,72°C. Rozhodněte, zda byl příkaz dodržován, s 95% spolehlivostí.

11.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. p = 0,1: <41,83;46,17>
p = 0,05: <41,35;46,65>

1.2. <282,22;290,58>
<79,39;226,21>
n = 120

1.3. <544,24;1101,55>
<572,22;987,73>

1.4. <0,358;1,539>
<0,321;1,845>
<0,263;2,704>

1.5. <53,182;62,193>

1.6. 926 automobilů

1.7. $\mu \in \langle 26{,}108;26{,}512 \rangle$. Hodnota 26,5 leží uvnitř intervalového odhadu. Příkaz byl dodržován.

11.1.3 Sada testovacích otázek

T11.1. Statistika, která aproximuje sledovaný parametr s předepsanou přesností, se nazývá
a) bodový odhad sledovaného parametru.
b) nevychýlený odhad sledovaného parametru.
c) konzistentní odhad sledovaného parametru.

T11.2. Hladina významnosti *p* je pravděpodobnost toho, že skutečná hodnota sledovaného parametru
a) leží uvnitř intervalu spolehlivosti.
b) neleží uvnitř intervalu spolehlivosti.
c) překročí p-kvantil očekávaného rozdělení.

T11.3. Výběr, při kterém ze seřazeného základního souboru vybereme z prvních *k* prvků náhodně jeden prvek a od něho počítajíc vybereme *k*-tý, 2*k*-tý, … prvek, nazýváme
a) stratifikovaný náhodný výběr.
b) systematický výběr.
c) vícestupňový shlukový výběr.

T11.4. Kritické hodnoty rozdělení na hladině významnosti *p* jsou
a) intervaly, v nichž leží skutečná hodnota parametru s pravděpodobností 1-p.
b) kvantily, kde index p vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina překročí tuto hodnotu.
c) bodové odhady parametrů rozdělení se stupněm spolehlivosti 1-p.

T11.5. Interval, v němž leží skutečná hodnota sledovaného parametru s pravděpodobností 1-*p* (*p* je hladina významnosti), se nazývá
a) kritický interval pro sledovaný parametr.
b) interval statistické významnosti pro sledovaný parametr.
c) interval spolehlivosti pro sledovaný parametr.

T11.6. Metoda momentů a metoda maximální věrohodnosti se používají k
a) vytváření náhodných výběrů.
b) výpočtům kritických hodnot rozdělení.
c) získávání bodových odhadů parametrů.

T11.7. Metodu výběru, při které základní soubor rozdělíme do dílčích oblastí, ve kterých provedeme náhodný výběr, nazýváme
a) stratifikovaný náhodný výběr.
b) systematický výběr.
c) vícestupňový shlukový výběr.

T11.8. Statistika, která statisticky konverguje k sledovanému parametru, se nazývá
a) bodový odhad sledovaného parametru.
b) nevychýlený odhad sledovaného parametru.
c) konzistentní odhad sledovaného parametru.

T11.9. Poměr mezi rozsahem výběru a velikostí základního souboru nazýváme
a) opora výběru.
b) výběrový poměr.
c) velikost populace.

T11.10. Stupeň spolehlivosti vyjadřuje pravděpodobnost toho, že skutečná hodnota odhadovaného parametru
a) leží uvnitř intervalu spolehlivosti.
b) neleží uvnitř intervalu spolehlivosti.
c) překročí p-kvantil očekávaného rozdělení.

11.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T11.1. *a*)
T11.2. *b*)
T11.3. *b*)
T11.4. *b*)
T11.5. *c*)
T11.6. *c*)
T11.7. *a*)
T11.8. *b*)
T11.9. *b*)
T11.10. *a*)

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA III – V PŘÍKLADECH

Cvičení 12 – Testování hypotéz

Mgr. Petr Otipka

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3034-6

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

12 TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ 3

12.1 Řešené úlohy 3

12.1.1 Úlohy k řešení 3

12.1.2 Výsledky úloh k řešení 4

12.1.3 Sada testovacích otázek 4

12.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám 6

12 TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

12.1 ŘEŠENÉ ÚLOHY

12.1.1 Úlohy k řešení

1.1. Dva automaty vyrábějí součástky téhož druhu. Ze součástek vyrobených na prvním automatu jsme změřili $n_1 = 9$ součástek, ze součástek vyrobených na druhém automatu $n_2 = 12$ součástek. Výběrové disperze měřené délky jsou $s_1^2 = 6$ μm, $s_2^2 = 23$ μm. Můžeme přijmout hypotézu o rovnosti disperzí na hladině významnosti 0,05?

1.2. Dvě skupiny studentů prováděly shyby na hrazdě s těmito výsledky:

I. skupina:

počet shybů	0	3	5	6	7	8	9	10
četnost	2	2	3	8	7	4	3	1

II. skupina:

počet shybů	4	5	6	7	8	9	10
četnost	1	4	5	8	8	2	2

Proveďte F-test pro $p = 0,05$.

1.3. Každé ze dvou polí bylo rozděleno na 10 lánů a zaseto obilí. Přitom na lánech prvního pole bylo použito speciální americké hnojivo. Výnosy z lánů prvního a druhého pole měly průměry $\overline{x_1} = 6$; $\overline{x_2} = 5,7$ a rozptyly $s_1^2 = 0,064$; $s_2^2 = 0,024$. Zjistěte na 5% hladině významnosti, jestli hnojení mělo průkazný vliv na výnosy.

1.4. V tabulkách jsou výsledky měření z jedné střední školy:

Student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Délka vlasů	0,2	0,2	0,4	0,5	0,5	1	1	1,5	1,5	2	2	2	5	6	8	9	9	10	11	11
Studijní průměr	1,5	3	1,8	1	2,8	2,8	2,5	2,3	2,5	2	2,3	1,8	1,3	2	2,5	2	1	1,3	2,5	3

Student	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Délka vlasů	12	12	13	13	18	19	20	20	21	22	23	24	24	25	25	26	32	33	35	40
Studijní průměr	2,5	2	1,8	2	3,3	1,5	1	2,8	1,8	1,3	3,5	1,8	2,3	2	1	1,5	2,5	2,3	1,3	2,8

a) Otestujte, zda existuje statisticky významný rozdíl ve studijních výsledcích mezi skupinou studentů, jejichž délka vlasů nepřesahuje 19cm a skupinou studentů s vlasy delšími než 19cm.

b) Otestujte, zda statistické znaky délka vlasů a studijní průměr jsou lineárně nezávislé. Na základě výsledků testování posuďte, zda rčení „Dlouhé vlasy, krátký rozum“ je založeno na pravdě.

1.5. Pracovníci průzkumu trhu potravinářské firmy mají zjistit, který z nových obalů instantní vločkové kaše je lákavější - jeden má tvar hranolu, druhý tvar válce. Proto byl v 10 supermarketech proveden průzkum. Oba typy výrobků byly umístěny na rovnocenném místě ve výšce očí. Počty prodaných krabic jsou uvedeny v následující tabulce. Na 5 % hladině významnost určete, zda tvar ovlivnil výši prodeje.

supermarket	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

hranol	194	152	160	172	118	110	137	126	176	145
válec	184	161	153	184	105	123	155	111	156	129

1.6. Svaly horní končetiny byly cyklicky namáhány až do úplného vypovězení funkce. Hmotnost závaží byla konstantní a délka přestávky mezi sériemi byla 30 sekund. Otestujte, zda jsou obě končetiny stejně silné.

série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
končetina P	20	7	3	2	2	2	1	1	1	0	0
končetina L	19	6	3	3	2	2	2	1	1	1	0

1.7. Prověřte na 5% hladině významnosti, zda soubor má rovnoměrné rozdělení, když pro náhodný výběr byly zjištěny tyto četnosti jednotlivých tříd:
10, 21, 0, 8, 12, 6, 8, 13, 11, 11.

1.8. V sešitu Excelu vygenerujte pomocí předdefinované funkce NÁHČÍSLO() sto náhodných čísel z intervalu od nuly do jedné. Rozdělte tyto hodnoty do 10-ti tříd a pomocí Pearsonova testu dobré shody rozhodněte, zda tato funkce generuje náhodná čísla podle normálního nebo rovnoměrného rozdělení.

1.9. Zjistěte, zda nejmenší hodnota v daném souboru je extrémně odchýlena od ostatních. Hladinu významnosti volte $p = 0{,}05$. Testovaný soubor:

111,2	112,4	114,6	95,4	105,6	107,7	108,3	111,8	115,3	109,1

1.10. Při výrobě plynového oleje se pozorovala závislost mezi bodem tuhnutí Y (°C) a bodem zákalu X (°C). Změřily se tyto hodnoty:

x	2,4	1,6	2,0	2,0	3,0	2,8	2,1
y	-5,6	-4,4	-4,0	-5,8	-6,2	-4,0	-5,7

Vhodným testem na hladině významnosti 0,1 rozhodněte, zda mezi bodem zákalu a bodem tuhnutí existuje statisticky významná lineární závislost. Předpokládáme normalitu rozdělení veličin X, Y.

12.1.2 Výsledky úloh k řešení

1.1. ano
1.2. zamítáme nulovou hypotézu, v obou skupinách je různá vyrovnanost výkonů.
1.3. ano
1.4. není
1.5. neovlivnil
1.6. obě končetiny jsou stejně silné
1.7. nemá
1.8. čísla jsou generována rovnoměrným rozdělením
1.9. je extrémně odchýlená
1.10. lineárně nezávislé

12.1.3 Sada testovacích otázek

T12.1. Chybu při testování, kdy přijmeme nulovou hypotézu, ale ona neplatí, nazýváme

a) chyba I. druhu.
b) chyba II. druhu.
c) fatální chyba.

T12.2. V případech, kdy při testování leží hodnota testovacího kritéria v kritickém oboru,
a) hypotézu přijímáme.
b) hypotézu zamítáme.
c) nelze rozhodnout o výsledku testování.

T12.3. Který z následujících testů je neparametrický?
a) Studentův test
b) Pearsonův test
c) Dixonův test

T12.4. Testujeme-li, zda seřízením plnící linky v lahvovně pivovaru došlo ke snížení kolísavosti plnění lahví piva, použijeme
a) Studentův test.
b) t-test.
c) F-test.

T12.5. Testujeme vzorky obyvatelstva ze dvou měst, například z Prahy a Ostravy. Chceme-li ověřit, zda se věkové rozložení obyvatel v těchto městech neliší, použijeme
a) Studentův test.
b) Pearsonův test.
c) Kolmogorovův-Smirnovův test pro dva výběry.

T12.6. Významnost rozdílu dvou výběrových průměrů testujeme pomocí
a) F-testu.
b) t-testu.
c) Pearsonova testu.

T12.7. Shodu naměřených dat s očekávaným rozdělením můžeme posoudit například
a) Pearsonovým testem.
b) Studentovým testem.
c) F-testem.

T12.8. Při použití testu lineární nezávislosti v základním souboru jsme došli k výsledku, že hodnota testovacího kritéria překročila kritickou hodnotu. Jaký přijmeme závěr?
a) Mezi složkami náhodné veličiny není korelace.
b) Složky náhodné veličiny jsou lineárně nezávislé.
c) Složky náhodné veličiny nejsou lineárně nezávislé.

T12.9. Chceme-li eliminovat možnost chyby I. druhu na nejmenší možnou míru, jakou hodnotu hladiny významnosti je třeba volit?
a) Velmi malou.
b) Co největší.
c) Volba hladiny významnosti nemá na možnost této chyby vliv.

T12.10. Byl sledován počet závažných poruch vozidel dvou výrobců automobilů během prvních pěti let provozu. U prvního výrobce bylo sledováno 581 automobilů, u druhého 1412. Který z následujících testů nejlépe posoudí, zda je mezi výrobci statisticky významný rozdíl v poruchovosti vozidel?
a) t-test
b) Studentův test
c) F-test
d) Grubbsův test

T12.11. Podmíněná pravděpodobnost, že neuděláme chybu I. druhu při testování hypotéz, se nazývá
a) spolehlivost.
b) významnost.

c) síla testu.

T12.12. Významnost rozdílu dvou rozptylů testujeme pomocí
a) F-testu.
b) t-testu.
c) Dixonova testu.

T12.13. Který z následujících testů nepatří mezi testy dobré shody?
a) Pearsonův test
b) Kolmogorovův-Smirnovův test pro dva výběry
c) Grubbsův test

T12.14. Testujeme-li, zda je největší hodnota z naměřených dat významně odchýlená od ostatních hodnot, můžeme použít například
a) Studentův test.
b) Dixonův test.
c) Pearsonův test.

T12.15. Kolik nezávislých parametrů má normální rozdělení?
a) 1
b) 2
c) 3

T12.16. Jak postupujeme v případě, kdy při použití Pearsonova testu po rozdělení do tříd nevyšly všechny očekávané třídní četnosti větší než 1?
a) Nijak. V tomto případě nelze Pearsonovým testem rozhodnout.
b) Snížíme hladinu významnosti.
c) Sloučíme příslušné sousední třídy.

T12.17. U dvaceti studentů byl měřen počet shybů na hrazdě před a po absolvování gymnastického kurzu. Vyberte test, který nejlépe posoudí, zda kurz měl u studentů vliv na počet provedených shybů.
a) F-test
b) Studentův test
c) Pearsonovův test

T12.18. Hypotéza, jejíž platnost při testování ověřujeme, se nazývá
a) nulová hypotéza.
b) základní hypotéza.
c) alternativní hypotéza.

T12.19. Zajímá nás, zda produkce zmetků v jednotlivých hodinách pracovní doby je rovnoměrná. Který test můžeme vybrat k posouzení?
a) t-test
b) Pearsonův test
c) Dixonův test

T12.20. Při použití Grubbsova testu jsme došli k výsledku, že hodnota testovacího kritéria nepřekročila kritickou hodnotu. Jaký závěr přijmeme?
a) Základní soubor má očekávané rozdělení.
b) Extrémní hodnota se významně liší od ostatních hodnot souboru.
c) Střední hodnoty se významně neliší.
d) Extrémní hodnota se významně neliší od ostatních hodnot souboru.

12.1.4 Správné odpovědi k testovacím otázkám

T12.1. *b)*
T12.2. *b)*
T12.3. *c)*

T12.4. *c*)
T12.5. *c*)
T12.6. *b*)
T12.7. *a*)
T12.8. *c*)
T12.9. *a*)
T12.10. *a*)
T12.11. *a*)
T12.12. *a*)
T12.13. *c*)
T12.14. *b*)
T12.15. *b*)
T12.16. *c*)
T12.17. *b*)
T12.18. *a*)
T12.19. *b*)
T12.20. *d*)