evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

Název: MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Autor: Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Vydání: první, 2013

Počet stran: 137

Náklad: 5

Jazyková korektura: nebyla provedena.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.

Název: Modernizace výukových materiálů a didaktických metod

Číslo: CZ.1.07/2.2.00/15.0463

Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3037-7

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Neurčitý integrál

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 NEURČITÝ INTEGRÁL

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Primitivní funkce

Neurčitý integrál

Vlastnosti neurčitého integrálu

Tabulkové integrály

MOTIVACE:

Integrál je jedním ze základních pojmů matematiky. Integrální počet je využíván nejen v matematických disciplínách, ale i ve fyzice, mechanice, statistice, chemii, ekonomii a dalších technických oborech. Například v dynamice se neurčitý integrál využívá při výpočtu rychlosti a dráhy při rovnoměrně zrychleném pohybu nebo při určování momentu setrvačnosti v geometrii hmot (např. tyč rotující kolem osy, výroba motorů.) atd.

CÍL:

Umět vysvětlit pojem primitivní funkce a neurčitého integrálu. Dokázat integrovat tabulkové funkce s využitím vlastností neurčitého integrálu.

1.1 ÚVOD

Integrální počet funkcí jedné proměnné vznikal v průběhu 17. a 18. století. Nezávisle na sobě Isaac Newton a Gotfried Wilhelm Leibnitz vytvořili diferenciální a integrální počet.

V předcházejícím studiu jste se seznámili s důležitým pojmem, a to derivací funkce. Funkci f jsme přiřadili novou funkci f' (pro konkrétní hodnotu x číslo $f'(x)$ mohlo mít různou interpretaci podle toho, co vyjadřovala funkce f).

Úloha, které se budeme věnovat nyní, je v podstatě opačná. K funkci f budeme hledat funkci F tak, aby platilo $F' = f$. Tzn., položíme si otázku, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f. Tudíž ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce budeme chtít najít tuto funkci, ze znalosti okamžité rychlosti bodu budeme chtít zjistit polohu tohoto bodu, ze znalosti okamžitého zrychlení bodu budeme chtít určit jeho okamžitou rychlost apod. Uvidíme, že tento problém je podstatně složitější než derivování, protože neexistuje obecný algoritmus výpočtu.

1.2 PRIMITIVNÍ FUNKCE A NEURČITÝ INTEGRÁL

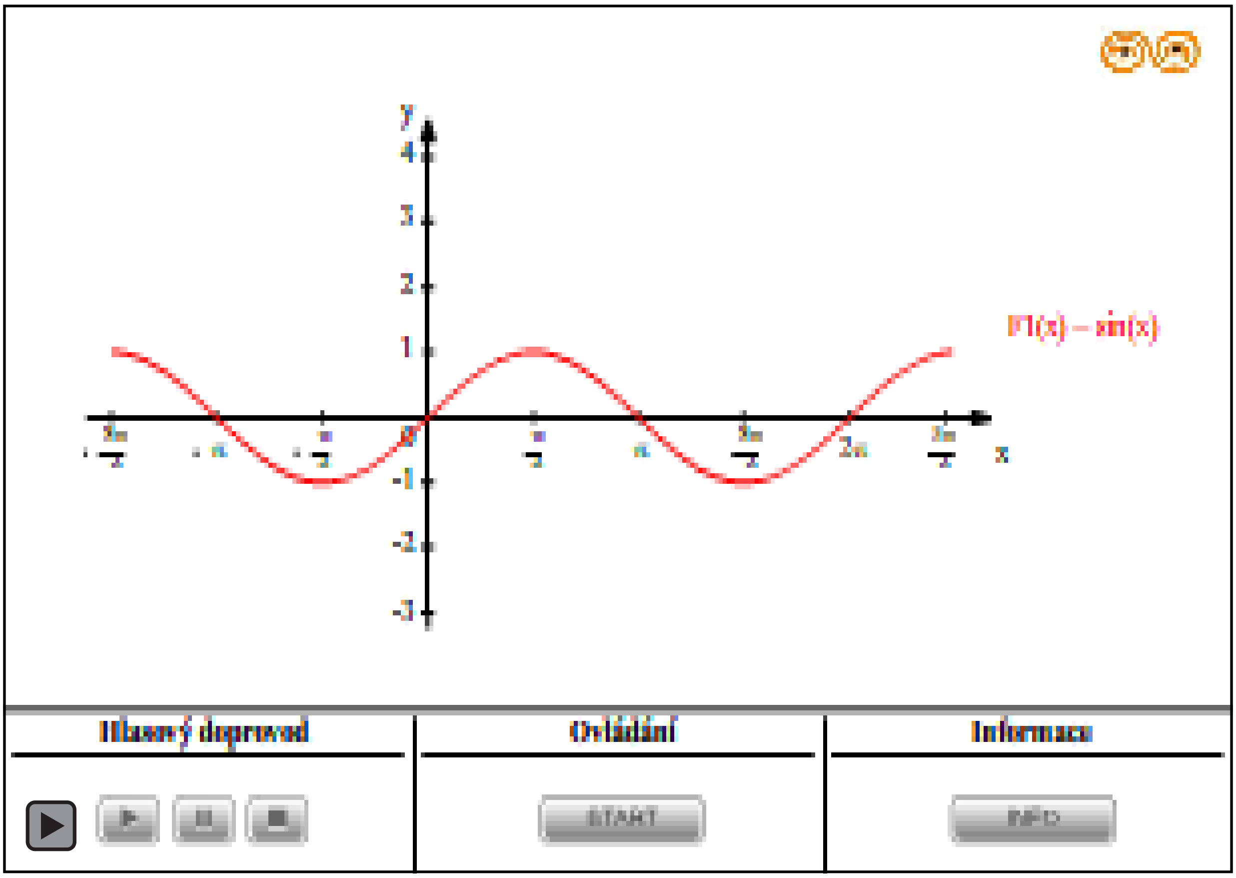
Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I. Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní* k funkci $f(x)$ na I, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Audio 1.1 Primitivní funkce

Věta: Nechť funkce $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I má tvar $F(x)+c$, kde $c \in R$.

Poznámka:

Pokud k dané funkci existuje primitivní, je jich nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou c. Proč to tak je, uvidíme na následující animaci. Zkusme nyní najít nějakou primitivní funkci např. k funkci $f(x) = \cos x$, $x \in R$. Ze znalostí derivací odhadneme, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$ nebo také $F(x) = \sin x + 3$, atd. Tzn., že všechny funkce $F(x) = \sin x + c$, kde $c \in R$, jsou primitivní k funkci $f(x) = \cos x$. Víme, že pokud sestrojíme v bodě x tečnu k dané funkci, je derivace funkce v daném bodě x směrnicí tečny. Grafy primitivních funkcí jsou posunuty rovnoběžně ve směru osy y. Tečny ke grafům v daných bodech x jsou rovnoběžné (mají stejnou směrnici) a z toho plyne, že mají stejnou derivaci.



Definice: Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá *neurčitý integrál* funkce $f(x)$ a značí se symbolem $\int f(x)dx$. Tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ x \in I.$$

Audio 1.2 Neurčitý integrál

Poznámka:

1. Integrační znak $\int$ vznikl protažením písmene S, kterým začíná slovo *suma*
2. Funkci $f(x)$ nazýváme *integrandem*
3. Výraz *dx* je diferenciál proměnné *x* a v tuto chvíli je jeho význam jen v tom, že nám říká, jak je označená proměnná.
4. Číslo *c* nazýváme *integrační konstanta*

Příklad:

Určete primitivní funkci a neurčitý integrál k daným funkcím na intervalu *I*

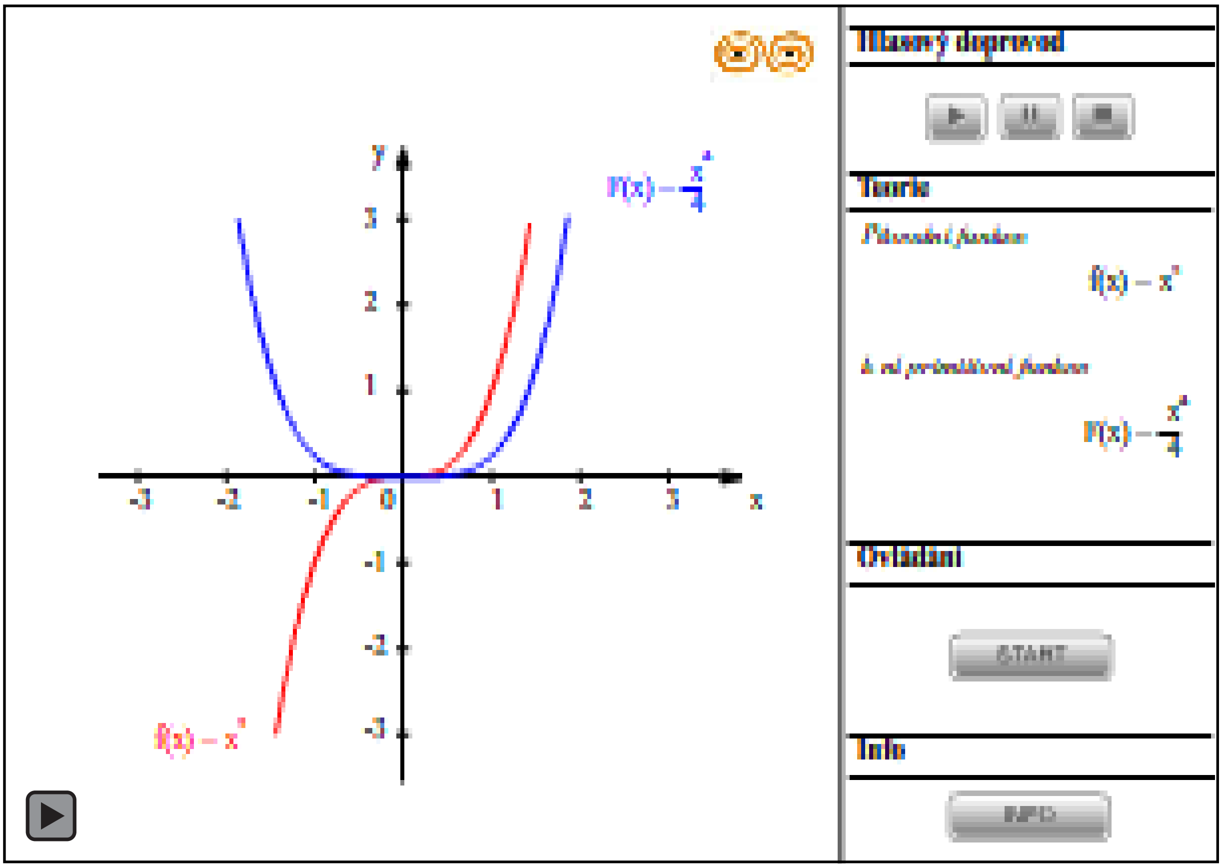
a) $f(x) = x,\ I = R$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+c\text{, protože } F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)'=x=f(x)\Rightarrow\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c,\ c\in R.$$

b) $f(x)=x^3,\ I=R$

$$F(x)=\frac{x^4}{4}+c\text{, protože } F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+c\right)'=x^3=f(x)\Rightarrow\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c,\ c\in R.$$

V animaci se podíváme na vztah mezi funkcí a její primitivní funkcí. Uvidíme, že, pokud funkce nabývá v bodě kladné hodnoty, je v daném bodě primitivní funkce rostoucí a naopak. Jakmile je funkce v bodě nulová, je v daném bodě primitivní funkce maximum, minimum nebo inflexní bod.



Vlastnosti:

Věta: Každá funkce $y=f(x)$, spojitá na intervalu I, má na tomto intervalu neurčitý integrál $\int f(x)dx$, který je opět spojitou funkcí na I.

Na závěr uvedeme jednoduchou (ale důležitou) větu, kterou budeme při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Věta: Existují-li na I integrály $\int f(x)dx$ a $\int g(x)dx$, pak na I existuje rovněž integrál jejich součtu, rozdílu a násobku konstantou:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \; k \in R.$$

Audio 1.3 Vlastnosti neurčitého integrálu

Tato věta plyne přímo ze základních vlastností derivace. Řekneme, že neurčitý integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) neurčitých integrálů a že konstantu, kterou se násobí, smíme z neurčitého integrálu vytknout před integrál.

Příklad:

a) $\int \left(\sin x - e^{3x+2} + x^4\right)dx = \int \sin x dx - \int e^{3x+2}dx + \int x^4 dx$

b) $\int 4xdx = 4\int xdx$

Poznámka:

Z definice neurčitého integrálu vyplývá platnost rovností:

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

2. $\int F'(x)dx = F(x) + c, \; c \in R,$

tzn., že operace derivování a integrace jsou navzájem komplementární. O správnosti výsledku integrace se můžeme vždy přesvědčit derivací výsledku.

Tabulkové integrály

První skupinu vzorců (1-10,12,13) dostaneme, obrátíme-li základní vzorce pro derivování. Tu doplníme o dva užitečné vzorce 11 a 14.

1. $\int 0dx = C;$

2. $\int dx = x + C;$

3. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0;$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$ obecněji $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$; obecněji $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \neq 1,\ a > 0$;

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; obecněji $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; obecněji $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

9. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$; obecněji $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,\ |x| < 1$; obecněji $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$;

12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,\quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; obecněji $\int \frac{1}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C$

13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C,\ x \neq k\pi$; obecněji $\int \frac{1}{\sin^2 ax}\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cotg} ax + C$

14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

15. $\int f'(x) f(x)\,dx = \int f(x) f'(x)\,dx = \frac{f^2(x)}{2} + C$

Poznámka:

1. Vzorec 2. je zkráceným zápisem pro $\int 1\,dx$, podobně se ve vzorci 4. a dalších obdobných integrálech používá místo $\int \frac{1}{x}\,dx$ zápis $\int \frac{dx}{x}$
2. Vzorec 3. umožňuje integraci obecné mocniny, tj. i nejrůznějších odmocnin
3. Protože derivace funkcí arkustangens a arkuskotangens se liší pouze znaménkem (totéž platí pro arkussinus a arkuskosinus) je možné ve vzorci 9. (resp.10.) psát $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\operatorname{arccotg} x + C$ (resp. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + C$)

Příklad:

Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $\int x^2 dx =$ (použijeme 3. vzorec, n=2) $= \dfrac{x^3}{3} + c$

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-1/3} dx =$ (použijeme 3. vzorec, n=-1/3) $= \dfrac{x^{2/3}}{2/3} + c = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

c) $\int e^{-2x} dx =$ (použijeme 5. vzorec, a=-2)$= \dfrac{e^{-2x}}{-2} + c = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + c$

d) $\int \dfrac{1}{x^2+5} dx =$ (použijeme 9. vzorec, a=$\sqrt{5}$)$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{5}} + c$

e) $\int \dfrac{3x^2+1}{x^3+x+5} dx =$ (použijeme 14. vzorec)$= \ln\left|x^3+x+5\right| + c$

f) $\int \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 3\sin 5x + 3^x + \dfrac{4}{3-x} \right) dx$ = (integrál rozdělíme na jednodušší a použijeme potřebné vzorce) $= 2\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx - 3\int \sin 5x dx + \int 3^x dx - 4\int \dfrac{1}{x-3} dx = 2\operatorname{tg} x -$
$- 3\dfrac{-\cos 5x}{5} + \dfrac{3^x}{\ln 3} - 4\ln|x-3| + c$

Příklad:

Určete $\int |1-x| dx$, $x \in R$.

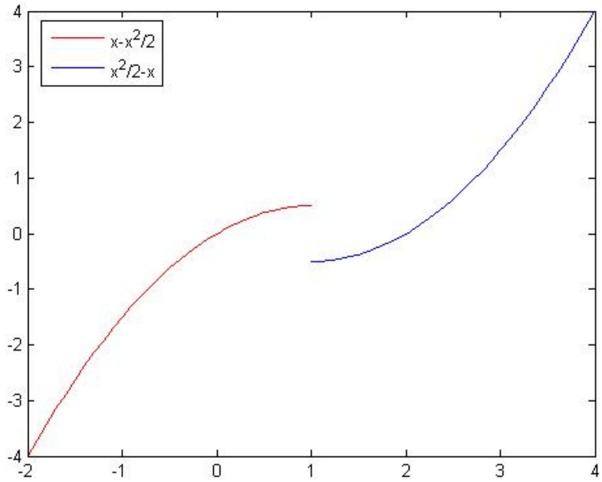
Řešení:

Jelikož nemáme žádnou vlastnost pojednávající o integraci funkce v absolutní hodnotě, musíme v prvním kroku absolutní hodnotu odstranit => dostaneme 2 funkce, které integrujeme

1) pro $x \in (-\infty, 1)$: $\int (1-x) dx = x - \dfrac{x^2}{2}$

2) pro $x \in (1, \infty)$: $\int (x-1) dx = \dfrac{x^2}{2} - x$

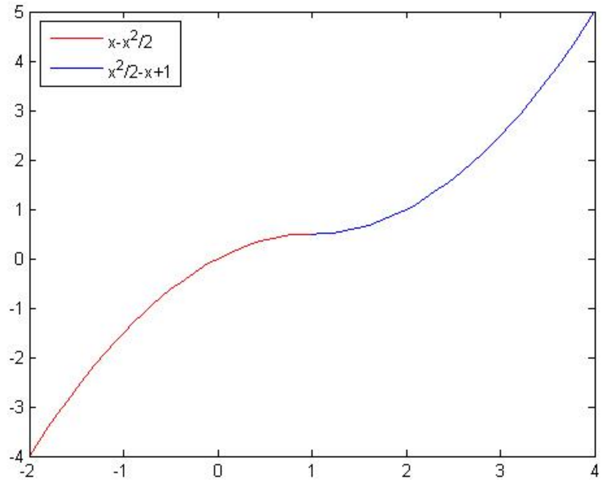
Jelikož víme, že původní funkce byla spojitá na R, musí být i primitivní funkce spojitá na R. Na následujícím obrázku uvidíme, že funkce spojitá není (v bodě $x = 1$ dochází ke skoku).



Proto musíme jednu z nalezených funkcí posunout o konstantu, aby v limitě byly funkční hodnoty stejné. Toto udělat můžeme, protože víme, že primitivní funkce posunutá o konstantu je stále primitivní funkcí. Konkrétně, posuneme druhou funkci o 1, aby navázala na funkci první.

$$\Rightarrow \quad F(x)=\begin{cases} x-\dfrac{x^2}{2} & x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \\ \dfrac{x^2}{2}-x+1 & x\in(1,\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int |f(x)dx| \neq \left|\int f(x)dx\right|.$$



2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Integrace substitucí a metodou per partes

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 INTEGRACE SUBSTITUCÍ A METODOU PER PARTES

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Substituční metoda $\varphi(x) = t$

Substituční metoda $x = \varphi(t)$

Metoda per partes

MOTIVACE:

Derivování je mechanický proces, integrování je již složitější. Ne všechny integrály lze řešit pomocí základních vzorců (např. integrace součinu, podílu a složených funkcí). Tyto integrály lze často řešit substituční metodou nebo metodou per partes tak, abychom dostali jednodušší integrál.

CÍL:

Umět aplikovat substituční metody a metodu per partes pro výpočet integrálů. Chápat princip zmíněných metod a dokázat poznat základní typy integrálů, které lze těmito metodami řešit.

1.1 INTEGRACE SUBSTITUCÍ

V této kapitole se seznámíme s významnou metodou, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších při řešení integrálů. Bohužel neexistuje univerzální návod, kdy a jak substituci použít, proto je důležité pochopit princip substitučních metod a umět vzorce pro derivování.

1.1.1 SUBSTITUČNÍ METODA 1. TYPU

Substituční metoda typu $\varphi(x) = t$ je odvozena z integrace rovnosti vzniklé ze vzorce pro derivaci složené funkce.

$\left(F[\varphi(x)]\right)' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ po integraci dostáváme:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int \left(F[\varphi(x)]\right)' dx = F[\varphi(x)] + c = F(t) + c = \int F'(t)dt = \int f(t)dt\,,$$

kde jsme označili $F'(t) = f(t)$ a $t = \varphi(x)$.

Audio 1.1 Princip substituce 1. typu

Než si nadefinujeme první substituční metodu, podíváme se na pár integrálů a zkusíme si danou metodu odvodit. Jelikož už víme, že první substituční metoda vychází z derivace složené funkce, budeme se snažit v integrálech najít součin složené funkce a funkce, která je derivací vnitřní funkce.

Příklad:

Chceme vypočítat tento integrál $\int 2x \cdot \sin\left(x^2 - 5\right)dx$.

Vidíme, že máme integrovat součin funkce $\sin\left(x^2 - 5\right)$ a $2x$. Jelikož víme, že integrál ze součinu funkcí není součin integrálů, musíme si pomoci jinak. Všimneme si, že funkce $\sin\left(x^2 - 5\right)$ je složená funkce, kde vnitřní funkce je $x^2 - 5$. Funkce $x^2 - 5$ má v R derivaci: $\left(x^2 - 5\right)' = 2x$, což je přesně druhá funkce v součinu, tzn., zkusíme zavést substituci:

$$\varphi(x) = x^2 - 5 = t\,,\ \varphi'(x)dx = 2xdx = 1dt$$

$$\Rightarrow \int 2x \cdot \sin\left(x^2 - 5\right)dx = \int \sin\left(x^2 - 5\right) \cdot 2xdx = \int \sin t \cdot 1dt$$

Dostali jsme jednodušší (dokonce tabulkový) integrál, který už vyřešit umíme.

Příklad:

Chceme vypočítat tento integrál $\int \frac{dx}{8x - 7}$.

Ze znalosti tabulkových integrálů víme, že umíme vypočítat $\int \frac{dx}{x}$. Náš integrál se liší v koeficientech lineární funkce ve jmenovateli, proto nás napadne volba $\varphi(x) = 8x - 7 = t$, $\varphi'(x)dx = 8dx = 1dt$. Potřebujeme zkontrolovat, zda je v daném integrálu součin funkcí: $\int \frac{dx}{8x-7} = \int \frac{1}{8x-7}dx$. Vidíme, že nám chybí multiplikativní konstanta (potřebujeme $8dx$). To ovšem nevadí, protože konstantu můžeme doplnit díky vlastnosti $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

$\int \frac{1}{8x-7}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{8x-7}\cdot 8dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{t}dt$.

Pozor - touto cestou můžeme doplnit pouze multiplikativní konstantu

Z tohoto příkladu můžeme odvodit lineární substituci tvaru $t = ax + b$, $a, b \in R, a \neq 0$.

Jestliže má funkce $f(t)$ primitivní funkci $F(t)$, tj. $\int f(t)dt = F(t) + c$, platí, že

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c\,,\ a, b \in R, a \neq 0\,.$$

Např. (nepíšeme integrační konstanty)

$\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}$ (a=2, b=3)

$\int \frac{dx}{8x-7} = \frac{1}{8}\ln|8x-7|$ (a=8, b=-7)

$\int (6x-8)^5\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}(6x-8)^6$ (a=6, b=-8)

$\int \sin(x-5)dx = -\cos(x-5)$ (a=1, b=-5)

Uvědomili jsme si, jak musí vypadat integrand, aby bylo možno substituční metodu použít. Musí jít o výraz, který je složen ze součinu nějaké složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Věta (1.substituční metoda): Nechť funkce $f(t)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(t)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F[\varphi(x)] + c\,.$$

Audio 1.2 1. substituční metoda

Problémem je, že potřebný součin není vždy na první pohled viditelný a je potřeba integrand vhodně upravit. Ukážeme si příklad, kde musíme při úpravě integrandu provést komplikovanější úpravy.

Příklad:

Chceme vypočítat tento integrál $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$.

Vidíme, že se nám v integrandu objevuje součin funkce sinus a kosinus. Ze znalosti derivací víme, že $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$, takže nás napadne, že by substituce možná mohla jít použít. Zkusíme integrand upravit s využitím goniometrických vzorců.

$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx$

Upravený integrand je složen ze součinu funkce obsahující $\sin x$ a z derivace funkce $\sin x$, což je ten $\cos x$ $\Rightarrow$ zavedeme substituci: $\varphi(x) = \sin x = t$, $\varphi'(x)dx = \cos x dx = dt$ a nahradíme v integrálu: $\int \sin^3 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int t^3 (1-t^2) dt$. Získali jsme opět jednodušší integrál, který již vyřešit umíme.

$\int \sin^3 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int t^3 (1-t^2) dt = \int (t^3 - t^5) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + c$, nezapomeneme vrátit substituci a dostáváme výsledek původního integrálu:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + c.$$

Shrnutí a praktické použití:

1. Označíme si substituci $t = \varphi(x)$
2. Rovnost $t = \varphi(x)$ diferencujeme $\Rightarrow 1 \cdot dt = \varphi'(x)dx$, tj. $dt = \varphi'(x)dx$
3. V původním integrálu nahradíme za funkci $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. Do výsledné pravé strany musíme dosadit původní proměnnou ($t = \varphi(x)$)

Audio 1.3 Praktické využití 1. substituční metody

Příklad:

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

Řešení: Protože $(\sin x)' = \cos x$, zvolíme substituci $\sin x = t$ a diferencováním dostáváme $\cos x dx = dt$ a dosadíme:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin(\sin x) + c$$

Příklad:

Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $$\int x\sqrt{x^2+6}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+6=t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+6\right)^3} + c$$

b) $$\int \frac{(3+\ln x)^5}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 3+\ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{(3+\ln x)^6}{6} + c$$

c) $$\int \sin x \cos^4 x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c$$

d) $$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left| \begin{array}{c} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + c = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$$

1.1.2 SUBSTITUČNÍ METODA 2. TYPU

Substituce 1. typu byla v integrované funkci obsažena, u substituce druhého typu to tak nebude a danou substituci budeme muset odhadnout (to ale neznamená, že u substituce prvního typu je substituční funkce jasná na první pohled). Proto záleží na našich zkušenostech a ty získáme jen spočtením mnoha integrálů

Podle věty o 1. substituční metodě jsme převedli integrál $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ pomocí substituce $\varphi(x) = t$ na integrál s novou proměnnou $\int f(t)dt$. Někdy je potřeba zvolit postup opačný a proměnnou nahradit vhodnou funkcí. Tzn., máme vypočítat integrál $\int f(x)dx$. S využitím substituce $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t)dt$ se snažíme převést integrál na tvar integrálu $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Abychom byli schopni nalézt primitivní funkci, musí platit, že:

- $f(x)$ je spojitá na (a,b)
- $x = \varphi(t)$ je na (α,β) ryze monotónní a $\varphi'(t) \neq 0$ je spojitá na (α,β).

Pokud jsou tyto předpoklady splněny, existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$ a tedy $t = \varphi^{-1}(x)$.

Příklad:

Chceme vypočítat tento integrál $\int \sqrt{e^x - 4}dx$.

První substituční metodu použít nemůžeme, protože po derivaci vnitřní funkce $e^x - 4$ potřebujeme v integrandu součin s e^x a ten tam nemáme. Proto zkusíme zavést tuto substituci $\sqrt{e^x - 4} = t$, jelikož musíme nahradit i dx potřebujeme ze zvolené substituce vyjádřit x a po diferencováním získaného vztahu dostaneme vztah pro nahrazení dx:

$$
\begin{aligned}
e^x - 4 &= t^2 \\
e^x &= t^2 + 4 \\
x &= \ln\left(t^2 + 4\right) \\
dx &= \frac{2t}{t^2 + 4}dt
\end{aligned}
$$

Po dosazení substituce do integrálu dostáváme $\int \sqrt{e^x - 4}dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2 + 4}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2 + 4}dt$.
Získali jsme jednodušší integrál, který již spočítat dokážeme.

(Náznak řešení: $2\int \frac{t^2}{t^2 + 4}dt = 2\int \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4}dt = 2\int \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right)dt$)

Věta (2.substituční metoda): Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu J, nechť funkce $\varphi(t)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a platí $\varphi(I) = J$ (tj. zobrazuje interval I na J). Pak $f(x)$ má na intervalu J primitivní funkci $F\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ a platí

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

dosadíme-li za t funkci $\varphi^{-1}(x)$.

Audio 1.4 2.substituční metoda

Poznámka:

Formálně substituci provádíme tak, že v integrálu píšeme místo x funkci $\varphi(t)$ a místo dx $\varphi'(t)dt$. Z příkladů uvidíme, že druhá substituční metoda se využívá například při integrování funkcí obsahující odmocniny.

Audio 1.5 Princip substituce 2.typu

Příklad:

Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+x}=t \\ 1+x=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{(2+t^2-1)t}\cdot 2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\arctan t + c =$$

$$= 2\arctan\sqrt{1+x} + c$$

b) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left| \begin{matrix} x=at \\ dx=adt \\ \left(t=\dfrac{x}{a}\right) \end{matrix} \right| = \int \frac{adt}{a^2+a^2t^2} = \int \frac{adt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + c =$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$ ... odvození obecného vzorce

c) $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t dt \\ \left(t=\arcsin\dfrac{x}{2}\right) \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}{\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sqrt{\cos^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt = -\cot t - t + c =$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}{\dfrac{x}{2}} - \arcsin\frac{x}{2} + c$$

1.2 METODA PER PARTES

Víme, že integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) integrálů. Pro součin (podíl) nic takového obecně neplatí.

Audio 1.6 Odvození metody per partes

Z pravidla pro derivaci součinu dostaneme velmi užitečný vztah pro integraci součinu:

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \;\Rightarrow\; u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v$ po integraci: $\int u\cdot v'dx = \int (u\cdot v)'\,dx - \int u'\cdot vdx$

dostáváme $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot vdx$

Věta: Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu *I*. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx,$$

pokud aspoň jeden z integrálů existuje.

Audio 1.7 Metoda per partes

Tato metoda se nazývá metoda per partes (po částech).

Hodí se na integrály, jejichž integrand má tvar součinu dvou odlišných funkcí. Abychom dokázali napsat pravou stranu vztahu, musíme jeden činitel na levé straně umět derivovat, což není problém, a druhý činitel musíme umět integrovat, což už může být problém. Metoda per partes integrál vypočítá jen zčásti. Zbývá vypočítat nový integrál, který by měl být jednodušší.

Audio 1.8 Použití metody per partes

Poznámka (integrály typické pro výpočet metodou per partes):

Buď *P(x)* polynom. Metodou per partes integrujeme např. integrály následujících typů

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx, \int P(x)\sin(\alpha x)dx, \int P(x)\cos(\alpha x)dx$$

a

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x dx, \int P(x)\ln^m x dx.$$

Audio 1.9 Typické integrály pro využití metody per partes

U první skupiny postupujeme tak, že polynom derivujeme (snížíme jeho stupeň), v případě potřeby postup opakujeme. U druhé skupiny naopak polynom integrujeme a derivujeme druhý činitel.

Příklad:

Vypočtěte neurčitý integrál $\int (2x-1)\ln x dx$.

Řešení: Jde o integrál z druhé skupiny uvedené v poznámce, tzn. mnohočlen 2*x*-1 budeme integrovat a logaritmickou funkci derivovat:

$$\int (2x-1)\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 2x-1 & v = x^2 - x \end{matrix} \right| = \ln x \cdot (x^2 - x) - \int \frac{1}{x} \cdot (x^2 - x)dx =$$

$$= \ln x \cdot (x^2 - x) - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

V následujícím příkladu si ukážeme obrat, který se v souvislosti s metodou per partes používá. Obrat spočívá v tom, že po integraci per partes a úpravách se nám znovu objeví výchozí integrál. Tzn., dostáváme rovnici

$$\int f(x)dx = h(x) + \alpha \int f(x)dx,$$

z které můžeme integrál dopočítat (pokud se nevyruší, tj. $\alpha \neq 1$).

Příklad:

Vypočtěte neurčitý integrál $\int e^x \sin x dx$.
Řešení: Nejde o žádný z typů uvedených v poznámce.

$$\int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} =$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Dostali jsme rovnici:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

z níž vypočítáme, že

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

Často se setkáme s použitím kombinace metody per partes a substitučních metod.

Příklad:

Vypočtěte následující neurčité integrály:

a)

$$\int \arctan 3x dx = \begin{vmatrix} u = \arctan 3x & u' = \dfrac{3}{1+9x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = x \cdot \arctan 3x - \int \frac{3x}{1+9x^2} dx =$$
$$= x \cdot \arctan 3x - \int \frac{3x}{1+9x^2} dx = \begin{vmatrix} 1+9x^2 = t \\ 18x dx = dt \\ 3x dx = \dfrac{1}{6} dt \end{vmatrix} = x \cdot \arctan 3x - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = x \cdot \arctan 3x - \frac{1}{6} \ln|t| + c =$$
$$= x \cdot \arctan 3x - \frac{1}{6} \ln|1+9x^2| + c$$

b)

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int e^t \cdot 2tdt = \left| \begin{array}{ll} u = 2t & u' = 2 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array} \right| = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c =$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$

c)

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Integrace speciálních typů funkcí a určitý integrál

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 INTEGRACE SPECIÁLNÍCH TYPŮ FUNKCÍ A URČITÝ INTEGRÁL

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Integrace racionální lomené funkce

Integrace goniometrických funkcí

Určitý integrál

MOTIVACE:

Již umíme počítat neurčité integrály úpravou na základní integrály metodou per partes a substituční. U racionálních lomených funkcí nám tyto metody nepomohou, proto si ukážeme podrobný postup, který nám umožní integrovat libovolnou racionální lomenou funkci. Dále se podíváme na integrování funkcí složených z goniometrických funkcí. Takové integrály se často vyskytují v praktických úlohách (při řešení vícenásobných integrálů např. ve fyzikálních aplikací - hmotnost a statický moment rovinné desky či souřadnice těžiště, atd.). Na závěr přednášky se budeme věnovat určitému integrálu, který dané funkci přiřadí číslo. Určitý integrál má řadu využití ve velkém množství aplikací. Určitý integrál je využíván například při řešení pohybových či vlnových rovnic, u výpočtů objemů v pracovním cyklu čerpadla, v pružnosti a pevnosti se můžete setkat s integrálem při vyjádření prodloužení tyče či dalších geometrických a fyzikálních aplikacích, kterým se budeme věnovat na příští přednášce.

CÍL:

Umět integrovat libovolnou racionální funkci a použít nejvhodnější metodu při řešení integrálů funkcí složených z goniometrických funkcí. Pochopit rozdíl mezi neurčitým a určitým integrálem. Znát základní vlastnosti používané při řešení určitého integrálu.

1.1 INTEGRACE RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

Důležitou skupinu funkcí, které můžeme (aspoň teoreticky) integrovat v množině elementárních funkcí, tvoří *racionální lomené funkce*.

Každou racionální lomenou funkci tvaru $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde *P(x)* a *Q(x)* jsou polynomy libovolných stupňů, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+R_1(x)+\ldots+R_s(x),$$

kde *S(x)* je mnohočlen a $R_1(x),\ldots,R_s(x)$ jsou parciální zlomky.

Funkci v takovém tvaru umíme integrovat. My se zaměříme na integraci ryze lomené funkce ve tvaru rozkladu na parciální zlomky. Postup,jak se k takovému rozkladu dostat, naleznete v 0.cvičení.

Audio 1.1 Integrace ryze lomené funkce

1.1.1 Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

Pro $k = 1$:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\cdot\ln|x-\alpha|+c$$

Pro $k\geq 2$ využijeme substituci a dostáváme:

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=\left|\begin{matrix}x-\alpha=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=A\int\frac{dt}{t^k}=A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+c=\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}+c$$

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int\dfrac{dx}{x^4-x^2}$.

Řešení:

Jedná se o integraci ryze lomené racionální funkce. Proto musíme funkci rozložit na parciální zlomky. Kořeny ve jmenovateli jsou řešením rovnice

$$x^4-x^2=x^2\left(x^2-1\right)=x^2(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x_{1,2}=0,x_3=1,x_4=-1$$

a odhadovaný tvar rozkladu je:

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1},$$

vynásobíme celou rovnici $x^2(x-1)(x+1)$

a dosazovací metodou zjistíme koeficienty $A=0, B=-1, C=\frac{1}{2}, D=-\frac{1}{2}$.

V integrálu nahradíme původní funkci nalezeným rozkladem.

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$$

1.1.2 Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

Abychom si usnadnili integrování, budeme při rozkladu na parciální zlomky psát do čitatele parciálního zlomku místo x derivaci trojčlenu x^2+px+q, tzn.

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}=\frac{B(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{C}{x^2+px+q},\ \text{kde } M=2B \text{ a } N=B\cdot p+C.$$

Při integrování prvního zlomku $\left(\frac{B(2x+p)}{x^2+px+q}\right)$ dostáváme:

$$\int\frac{B(2x+p)}{x^2+px+q}dx=B\cdot\ln\left(x^2+px+q\right)+c$$

Při integrování druhého zlomku $\left(\frac{C}{x^2+px+q}\right)$ doplníme trojčlen x^2+px+q na čtverec:

$$\int\frac{C}{x^2+px+q}dx=C\int\frac{1}{(x+p/2)^2+a^2}dx=\left|\begin{matrix}x+p/2=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=C\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{C}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{a}+c,$$

kde $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

<u>Příklad:</u>

Vypočtěte integrál $\int\frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx$.

<u>Řešení:</u>

Funkci rozložíme na parciální zlomky. Kořeny ve jmenovateli jsou řešením rovnice $x^2+4x+5=0 \Rightarrow D=-4<0 \Rightarrow$ komplexní kořeny a odhadovaný tvar rozkladu je:

$$\frac{3x+2}{x^2+4x+5}=\frac{B(2x+4)}{x^2+4x+5}+\frac{C}{x^2+4x+5},$$

vynásobíme celou rovnici x^2+4x+5

a srovnávací metodou určíme koeficienty $B=\frac{3}{2}, C=-4$.

V integrálu nahradíme původní funkci nalezeným rozkladem.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx = \int\left(\frac{3(2x+4)}{2(x^2+4x+5)} - \frac{4}{x^2+4x+5}\right)dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\int\frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\operatorname{arctg}(x+2) + c$$

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

Řešení:

Rozklad funkce na parciální zlomky jsme dělali v 0.cvičení.

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| +$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + c$$

1.2 INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Budeme se zabývat integrály funkcí, které jsou složeny z goniometrických funkcí a lze je pomocí vhodných substitucí převést na integrály z racionální lomené funkce.

Audio 1.2 Integrace funkcí složených z goniometrických funkcí

Nejprve se podíváme na integrály typu $\int \cos^m x \sin^n x dx$, kde $m, n \in Z$.

1) Pokud je aspoň jedno z čísel *m, n* liché použijeme k řešení substituce:

$$\begin{aligned} \sin x = t, &\qquad \text{je} - \text{li } m \ \text{ liché} \\ \cos x = t, &\qquad \text{je} - \text{li } n \ \text{ liché.} \end{aligned}$$

Pokud jsou obě liché, můžeme si vybrat.

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Řešení:

Lichá mocnina je u funkce sinus, proto použijeme substituci $\cos x = t$ a funkci $\sin^3 x$ upravíme na součin $\sin x$ a $\sin^k x$, kde k bude sudé číslo a s využitím $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ převedeme $\sin^k x$ na výraz $(1-\cos^2 x)^{\frac{k}{2}}$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \sin x \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} =$$
$$= -\int \left(1-t^2\right)t^2 dt = \int \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} = \cos^3 x\left(\frac{\cos^2 x}{5} - \frac{1}{3}\right) + c$$

2) Zbývá vyřešit případ, kdy jsou oba exponenty sudé.

Pokud jsou obě čísla m, n nezáporná, je nejvýhodnější použití vzorců pro dvojnásobný úhel:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \text{kde } \alpha \in R.$$

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Řešení:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x\right)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

Je-li alespoň jedno z čísel m, n záporné, použijeme substituci: $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}x = t \\ x = \mathrm{arctg}t \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \end{vmatrix}$.

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \mathrm{tg}^2 x dx = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}x = t \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \end{vmatrix} = \int t^2 \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$
$$= t - \mathrm{arctg}t = \mathrm{tg}x - x + c$$

1.2.1 Univerzální substituce

$$\begin{array}{|ll|}\hline \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, & x\in(-\pi,\pi), \\ x=2\operatorname{arctg}t, & dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \\ \hline \end{array}$$

Univerzální substituce se používá při řešení integrálů typu $\int f(\sin x,\cos x)dx$, kde $f(u,v)$ je racionální funkce proměnných $u=\sin x, v=\cos x$. Jedná se o obecný postup (substituci) při řešení integrálů funkcí složených z goniometrických funkcí.

<u>**Příklad:**</u>

Vypočtěte integrál $\int\frac{5}{4+\sin x}dx.$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int\frac{5}{4+\sin x}dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt\end{array}\right|=\int\frac{5}{4+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{5(1+t^2)}{4(1+t^2)+2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int\frac{5}{2+2t^2+t}dt=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2+\dfrac{t}{2}+1}=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right)=$$

$$=\frac{10\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}\right)+c$$

1.3 URČITÝ INTEGRÁL

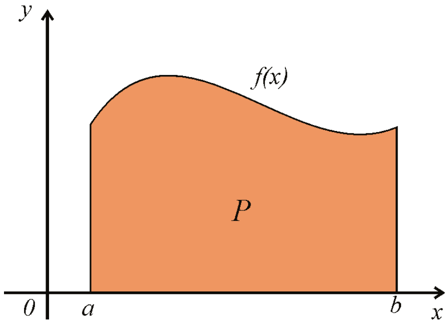
<u>Neurčitý integrál</u> - funkci přiřazoval množinu funkcí

<u>Určitý integrál</u> - funkci přiřazuje číslo, podle toho, co funkce vyjadřuje, bude mít výsledné číslo význam (např. délka křivky, hmotnost rovinného obrazce, moment setrvačnosti rovinného obrazce, atd.)

Audio 1.3 Určitý integrál

1.3.1 Geometrický význam určitého integrálu

Mějme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dá se dokázat, že určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah rovinného obrazce P ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami x = a, x = b.

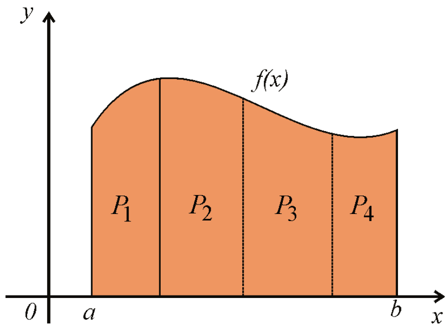


Obr. 1. Křivočarý lichoběžník

Ze střední školy známe vztahy pro výpočet obsahu trojúhelníka, obdélníka, kruhu a možná několika dalších jednoduchých obrazců. Pro obecnou funkci $y = f(x)$ však zatím obsah obrazce na obr. 1 vypočítat nedovedeme.

Navrhněme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

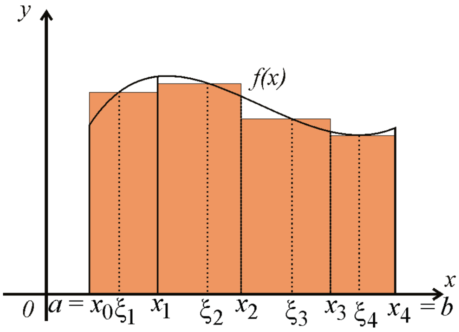
1. Rozdělíme útvar P rovnoběžkami s osou y na části (na obr. 2 jsme zvolili 3 dělící body).



Obr. 2. Rozdělení *P* na 4 části

Je zřejmé, že obsah útvaru P dostaneme jako součet obsahů jednotlivých částí. Označíme obsah P jako $S(P)$. Pak platí: $S(P) = S(P_1) + S(P_2) + S(P_3) + S(P_4)$

2. Spočítáme obsahy jednotlivých částí. Jelikož jsou opět ohraničeny shora funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. A to tak, že aproximujeme plochy obdélníkem. Zvolíme v jednotlivých částech body ξ_i (v mezích dané části) a v těchto bodech spočteme funkční hodnotu. V této výšce zarovnáme na obdélník (funkci jsme nahradili funkční hodnotou).



Obr. 3. Nahrazení obdélníky

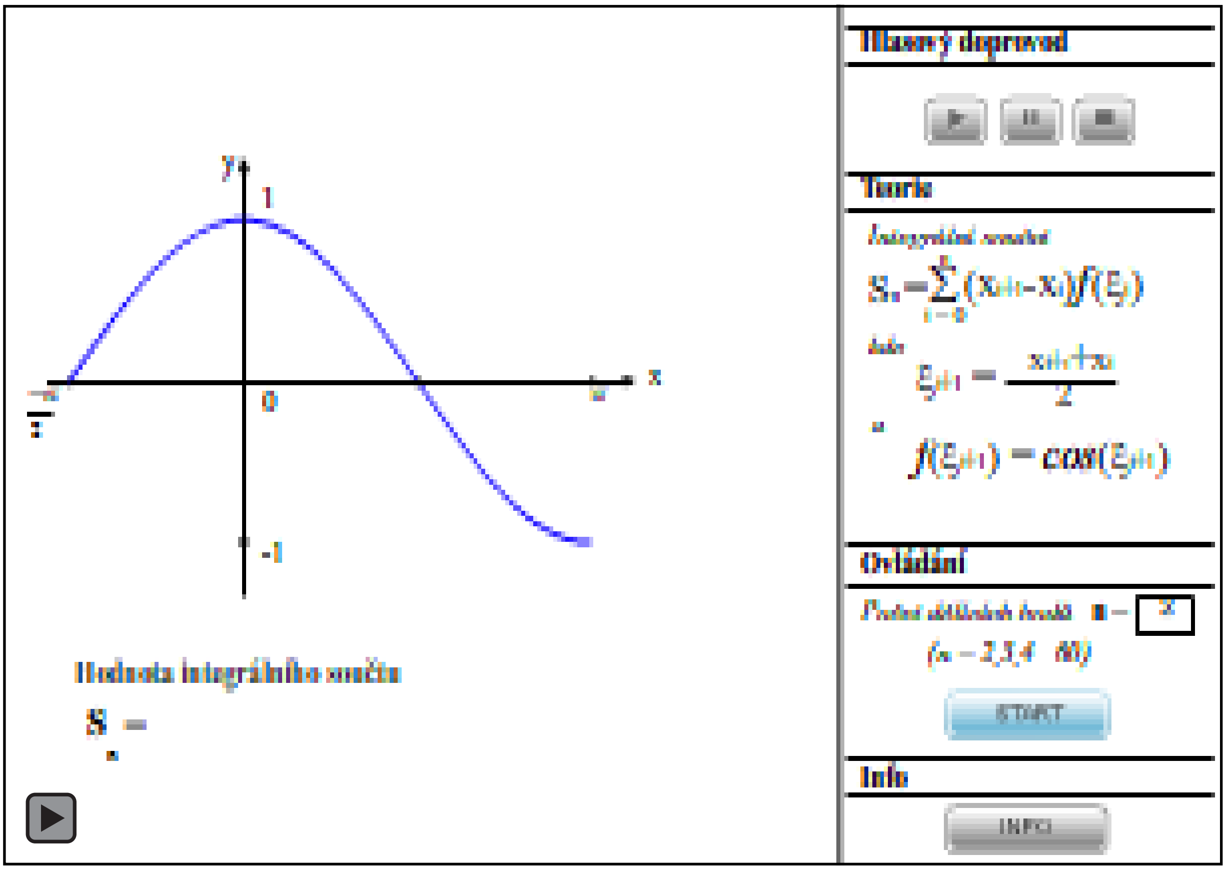
Ze znalosti vzorce pro výpočet obsahu obdélníku dostáváme (přibližný) obsah původního obrazce:

$$S(P) \doteq (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + (x_3 - x_2)f(\xi_3) + (b - x_3)f(\xi_4)$$

3. Je zřejmé, že se dopouštíme chyby a pokud zvolíme více dělících bodů (více částí), tím bude chyba menší. Obsah P tedy dostaneme jako limitu pro nekonečný počet částí.

Poznámka:

1) V následující animaci si můžete vyzkoušet, jak se při změně počtu dělících bodů mění integrální součet (jako body ξ_i jsou brány středy jednotlivých částí).



2) K podobnému problému dospějeme i při řešení jednoduché úlohy z klasické mechaniky. Chceme vypočítat práci, která se vykoná při přímočarém pohybu, má-li síla směr dráhy.

Definice: Pokud $\exists$ limita $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} S(P_i) = S_n\right)$, pak je tato limita označována jako Riemannův integrál funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a píšeme

$$S_n = \int_a^b f(x)dx,$$

kde číslo a se nazývá dolní mez, číslo b horní mez a funkce $f(x)$ integrand.

Poznámka:

Z definice vidíme, proč symbol $\int$ vznikl protažením písmene S

Pokud je funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak má Riemannův integrál. Po zobecnění dostáváme následující definici.

Definice: Nechť je $f(x)$ omezená a po částech spojitá v $\langle a,b\rangle$, pak má $f(x)$ v $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál.

Audio 1.4 Riemannův integrál

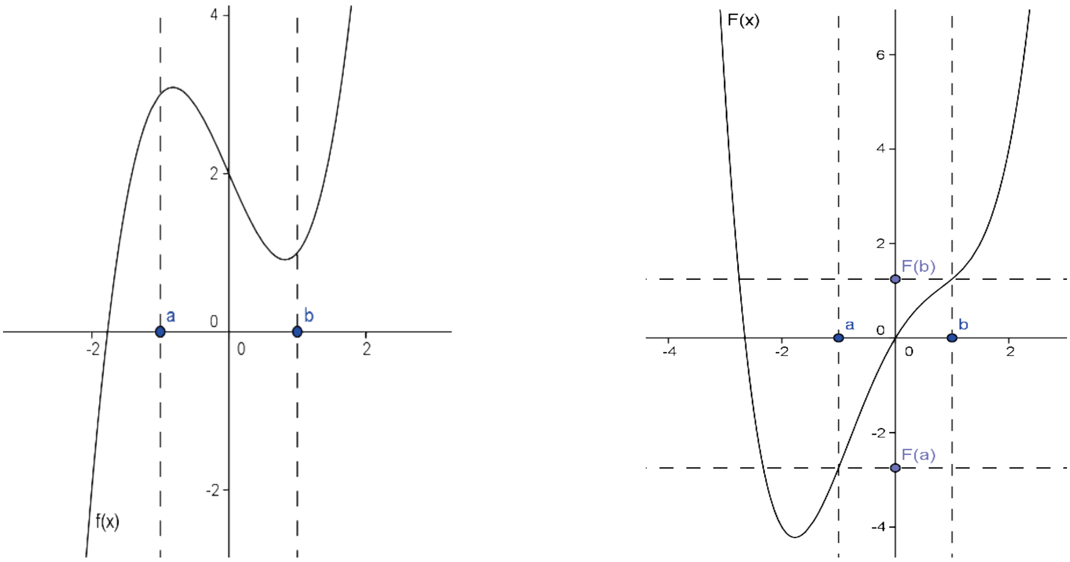
1.3.2 Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Pro výpočet určitého integrálu využijeme Newton-Leibnizovu formuli, která vyjadřuje vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem.

Definice: Nechť $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu *I*. Pak pro čísla *a, b* z tohoto intervalu definujeme Newtonův určitý integrál funkce $f(x)$ v mezích od *a* do *b* vzorcem:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Audio 1.5 Newton-Leibnizova formule



Obr. 4. Newton-Leibnizova formule

Věta: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, pak také součet (rozdíl) těchto funkcí a násobek funkce konstantou je integrovatelný na tomto intervalu a platí:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,,\ k\in R\,.$$

Příklad:

Vypočtěte $\int_1^3 (4x-3)^2\,dx$.

Řešení:

Funkce je spojitá na $\langle 1,3\rangle$, tudíž integrovatelná. Využijeme vlastnosti o integraci součtu.

$$\int_1^3 (4x-3)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(4x-3)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{12}\left(9^3-1\right) = \frac{182}{3}$$

Další vlastnost bude užitečná zejména v případech, kdy integrand nebude mít na celém intervalu $\langle a,b\rangle$ jednotný analytický předpis.

Věta: Nechť $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a $a<c<b$, právě tehdy, když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Další vlastnosti:

Věta: Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

je-li $f(x) \le g(x)$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, pak také $\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$.

Audio 1.6 Vlastnosti určitého integrálu

Příklad:

Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $\int_0^4 \left(x - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \text{arctg}x\right]_0^4 = 8 - \text{arctg}4$

b) $\int_0^\pi \cos(2x)dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^\pi = 0$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Substituce a per partes v určitém integrálu, geometrické aplikace určitého integrálu

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 SUBSTITUCE A PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU, GEOMETRICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Substituce v určitém integrálu

Metoda per partes v určitém integrálu

Geometrické aplikace

MOTIVACE:

Už víme, jaký je rozdíl mezi neurčitým a určitým integrálem a umíme vyřešit určitý integrál s využitím základních vlastností určitého integrálu a znalostí tabulkových integrálů. Stejně jako u výpočtu neurčitých integrálů si s tímto nevystačíme a proto si ukážeme aplikaci již známých metod (substituční a per partes) v určitém integrálu. Na závěr se budeme věnovat geometrickým aplikacím určitého integrálu, konkrétně si ukážeme, jak pomocí určitého integrálu určíme obsah rovinné oblasti či délku křivky. V technice se využívá např. cykloida (křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se kutálí po přímce) v převodovkách, či v mostních a tunelových konstrukcích.

CÍL:

Umět integrovat určité integrály s využitím substituční metody a metody per partes. Pochopit základní geometrické aplikace a výpočtem umět určit obsah rovinných oblastí a délku křivky.

1.1 SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

Věta: Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a funkce $x=\varphi(t)$ má v intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$, přičemž $\varphi(\alpha)=a$ a $\varphi(\beta)=b$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Poznámka:

Postup výpočtu a zápis je obdobný jako u neurčitého integrálu, jen přibude určení nových mezí. Výhodou je, že se nemusíme po substituci vracet k původní proměnné.

Audio 1.1 Substituce v určitém integrálu

Příklad:

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}dx$.

Řešení:

Zavedeme substituci: $1+\cos^3 x=t$, $-3\cos^2 x\sin x dx=dt$

Přepočítáme meze:

horní mez $x_2=\frac{\pi}{2}: 1+\cos^3\frac{\pi}{2}=1=t_2$

dolní mez $x_1=0: 1+\cos^3 0=1+1=2=t_1$

Vidíme, že nová horní mez je menší než nová dolní mez. Využijeme vlastnosti určitého integrálu o výměně mezí: $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx=-\int_{t_2}^{t_1} f(x)dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}dx=-\left(-\frac{1}{3}\right)\int_1^2\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{t^3}\right]_1^2=\frac{4}{9}\left(\sqrt[4]{8}-1\right)$$

Příklad:

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Zavedeme substituci: $\sqrt{1-x^2}=t \Rightarrow 1-x^2=t^2$, $-2xdx=2tdt \Rightarrow xdx=-tdt$

Přepočítáme meze:

$$\text{horní mez } x_2 = 0 : \sqrt{1-0} = 1 = t_2$$

$$\text{dolní mez } x_1 = -1 : \sqrt{1-1} = 0 = t_1$$

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{0}^{1} t \cdot t\,dt = -\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

1.2 METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Věta: Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají na $\langle a,b\rangle$, $a<b$, derivace, které jsou na daném intervalu integrovatelné, pak platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Poznámka:

Použití je analogické jako v případě neurčitého integrálu. Výhodou oproti postupu u neurčitého integrálu spočívá v průběžném dosazování mezí do částečně určené primitivní funkce. Výpočet se zkrátí a zpřehlední.

Audio 1.2 Per partes v určitém integrálu

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int_1^2 (x^2+1)\ln x\,dx$.

Řešení:

Integrand je složen ze součinu dvou odlišných funkcí a proto zvolíme metodu per partes.

Volíme:

$$u = \ln x\,,\ u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^2+1\,,\ v = \frac{x^3}{3}+x$$

Dostáváme: $\int_1^2 (x^2+1)\ln x\,dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx = \frac{14}{3}\ln 2 - 0 - \left[\frac{x^3}{9}+x\right]_1^2 =$

$$= \frac{14}{3}\ln 2 - \left(\frac{8}{9}+2-\left(\frac{1}{9}+1\right)\right) = \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{16}{9}$$

Příklad:

Vypočtěte integrál $\int_0^{1/2} \arcsin 2x dx$.

Řešení:

Volíme:

$$u = \arcsin 2x,\ u' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$v' = 1,\ v = x$$

Dostáváme: $\int_0^{1/2} \arcsin 2x dx = [x \arcsin 2x]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = * = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$* \int_0^{1/2} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ vyřešíme substitucí:

$$\sqrt{1-4x^2} = t \Rightarrow 1-4x^2 = t^2,$$

$$-8xdx = 2tdt \Rightarrow 2xdx = -\frac{1}{2}tdt$$

Přepočítáme meze:

$$x_2 = 1/2 : \sqrt{1-4\frac{1}{4}} = 0 = t_2$$

$$x_1 = 0 : \sqrt{1-0} = 1 = t_1$$

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{t} dt = \frac{1}{2}[t]_0^1 = \frac{1}{2}$$

1.3 UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

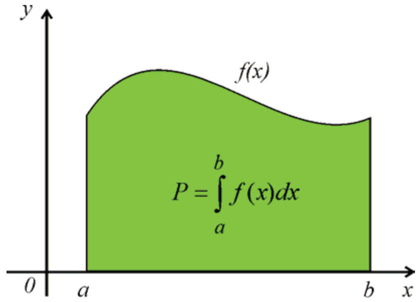
Pomocí integrálního počtu je možné vypočítat obsah rovinných útvarů, objemy rotačních těles a délky rovinných křivek. Velké uplatnění má určitý integrál také ve fyzice a chemii.

1.3.1 Geometrické aplikace

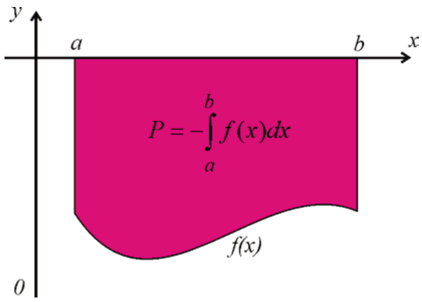
1. Obsah rovinného útvaru

Audio 1.3 Obsah rovinné oblasti

A. Pokud se jedná o rovinný útvar omezený osou *x*, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojité, nezáporné funkce $y = f(x)$, pak je jeho obsah dán určitým integrálem, jak bylo uvedeno u geometrické interpretace určitého integrálu: $P = \int_a^b f(x)dx$.

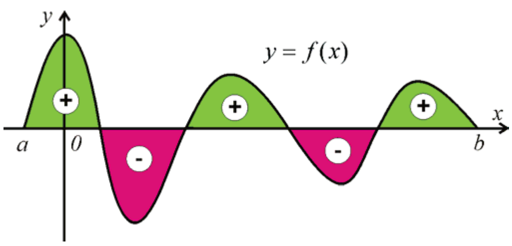


V případě, že funkce $y = f(x)$ je v intervalu $\langle a,b \rangle$ záporná, je integrál rovněž záporný.

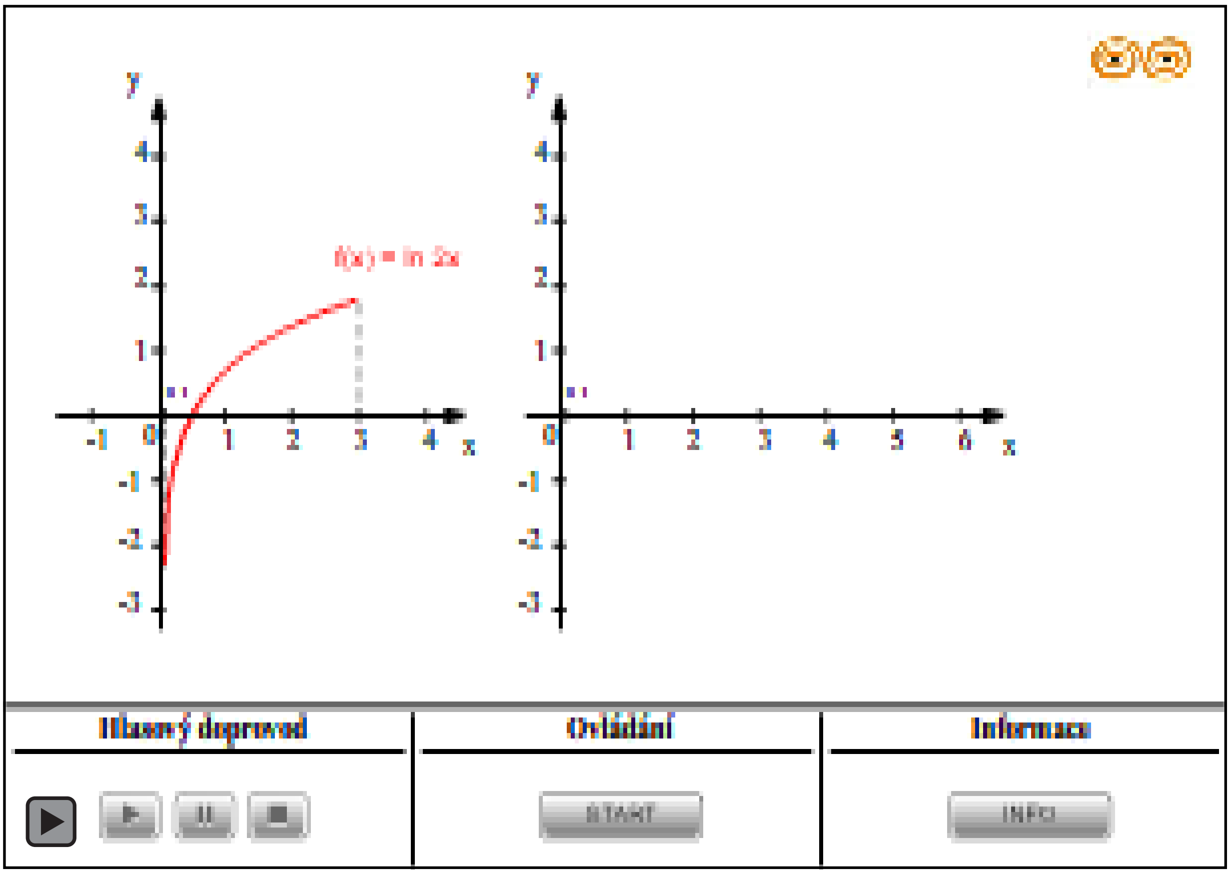


Vzhledem k tomu, že obsah každého obrazce je vždy nezáporné číslo, použijeme pro libovolnou funkci ve výpočtu obsahu její absolutní hodnotu: $P = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Jestliže funkce $y = f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a,b \rangle$ jak kladných, tak i záporných hodnot, potom tento interval rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá pouze nekladných hodnot resp. nezáporných hodnot a vypočteme obsahy podle předcházejících úvah. Tzn., pokud bychom počítali integrál $\int_a^b f(x)dx$ na celém $\langle a,b \rangle$, kladné a záporné části by se odečítali.



V následující animaci si můžete vyzkoušet, jak se mění celkový obsah plochy, která je ohraničená funkcí, která na intervalu $\langle a,b \rangle$ nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.

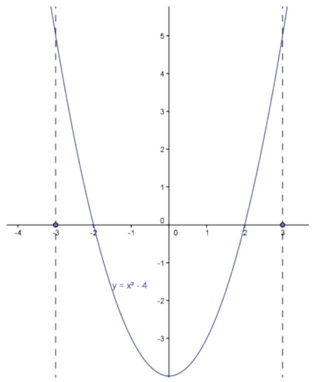


Příklad:

Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkou $y = x^2 - 4$, osou x a přímkami $x = -3$, $x = 3$.

Řešení:

Z grafu funkce vidíme, že na intervalu $\langle -3,3\rangle$ funkce mění znaménko, tzn. hledaný obsah získáme jako součet obsahů tří částí nebo jako $\int_{-3}^{3} \left|x^2 - 4\right| dx$. Průsečíky s osou x jsou $x = \pm 2$.



Navíc se jedná o funkci sudou, takže stačí určit obsah útvaru na intervalu $\langle 0,3\rangle$ a vynásobit dvěma.

$$2\int_0^3\left|x^2-4\right|dx=2\left(\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx\right)=2\left(\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3\right)=$$

$$=2\left(-\frac{8}{3}+8-0+\frac{27}{3}-12-\frac{8}{3}+8\right)=2\left(\frac{11}{3}+4\right)=\frac{46}{3}$$

Příklad:

(Aplikace ve statistice, statistické mechanice, atd.)
Určete, jaká je chyba měření, pokud měření je náhodná veličina podléhající normovanému normálnímu rozdělení (N(0,1)).

Řešení:

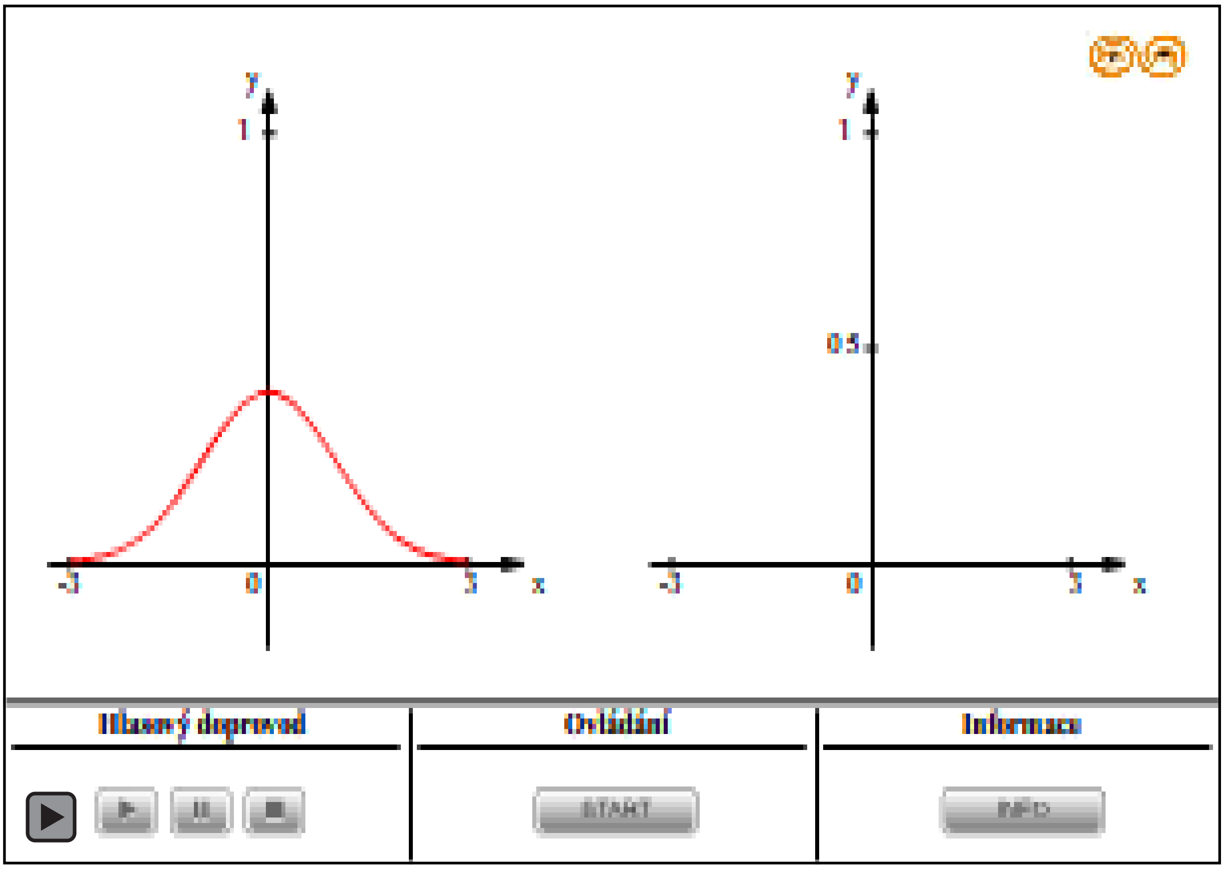
Jelikož náhodná chyba (např. chyba měření) podléhá N(0,1), víme, že funkce hustoty je:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnot z určitého intervalu, je rovna ploše pod hustotou nad tímto intervalem. To znamená, že potřebujeme určit primitivní funkci a její hodnota pro dané x bude naše hledaná chyba.

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

Problém je ten, že tento integrál neumíme analyticky určit, ale využijeme toho, že hodnoty $\Phi(x)$ jsou tabelovány. V animaci si toto ukážeme.



Poznámka:

Podle normálního rozdělení se řídí některé fyzikální a technické veličiny. Statistická mechanika popisuje dynamické systémy pomocí makroskopických veličin, kterým nezáleží na konkrétní mikroskopické realizaci (stejně jako termodynamika), jsou základem těchto oborů dynamické zákony mechaniky a matematická statistika spolu s teorií pravděpodobnosti.

B. Pokud je rovinný útvar ohraničený dvěma funkcemi (křivkami) $y = f(x)$ a $y = g(x)$, přičemž platí $f(x) \geq g(x)$, a přímkami $x = a$, $x = b$, je jeho obsah určen:

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

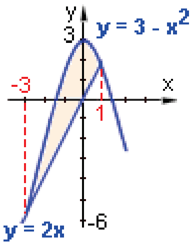
<u>Příklad:</u>

Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

<u>Řešení:</u>

Rovinný útvar je ohraničený pouze dvěma funkcemi, takže musíme první určit *x*-ové souřadnice průsečíků křivek (řešíme rovnici $f(x) = g(x)$).

$$3 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1 \text{ (jak vidíme i z grafu)}$$



Hledaný obsah je:

$$P = \int_{-3}^{1} \left(3 - x^2 - 2x\right) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-3}^{1} = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$$

C. Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce $\varphi(t)$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci různou od nuly a $\varphi'(t)$ je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah útvaru ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|.$$

2. Délka rovinné křivky

Audio 1.4 Délka křivky

Věta: Je-li funkce $y = f(x)$ definovaná na $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci, pak pro délku jejího grafu platí:

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Nyní se podíváme na obecnější případ, kdy křivka nemusí být grafem funkce (může se jednat o trajektorii nakreslenou bodem spojitě se pohybujícím v rovině). Tzn., zadáme křivku pomocí parametrických rovnic $x = \varphi(t), y = \psi(t)$. Z fyzikálního pohledu je délka křivky vlastně drahou, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β. Pro délku křivky dané parametrickými rovnicemi lze dokázat následující tvrzení:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2 + \left(\dot{\psi}(t)\right)^2}\, dt .$$

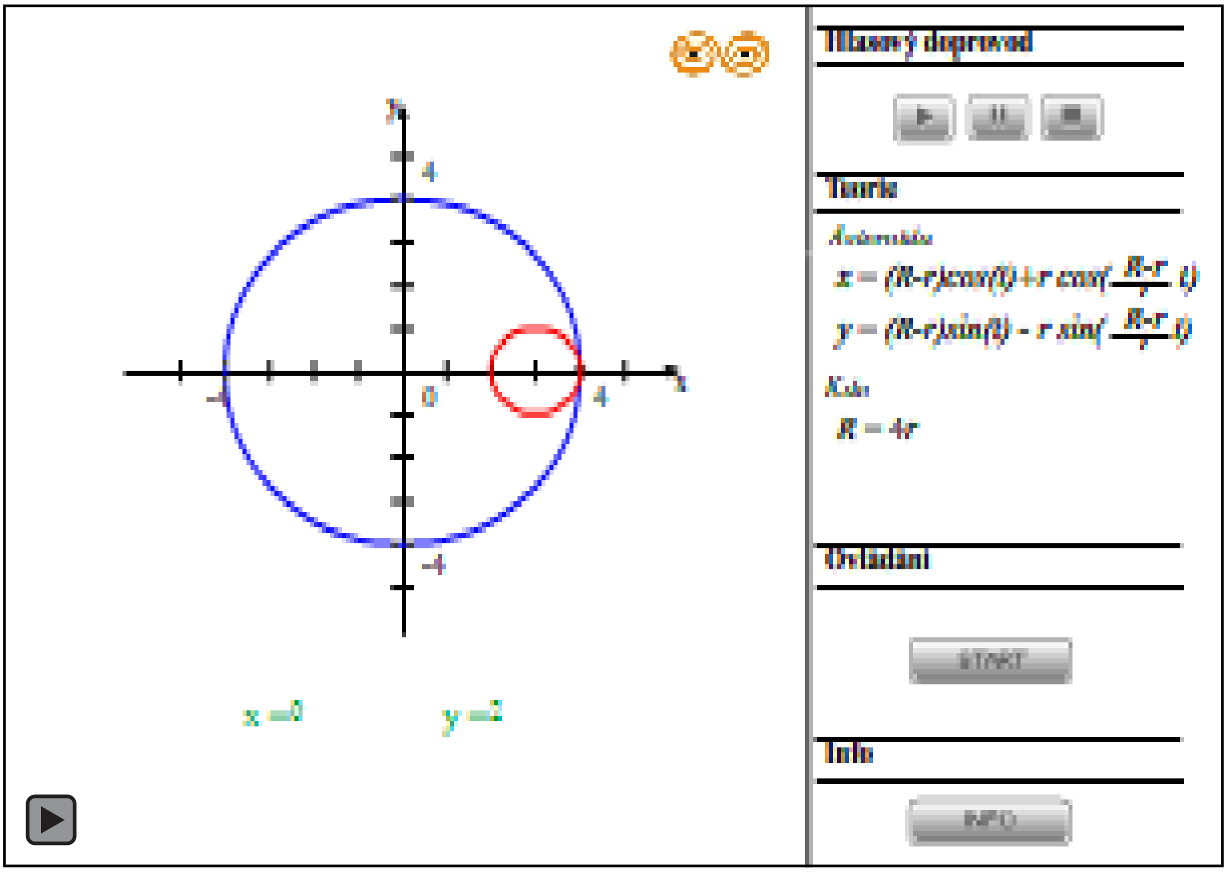
Příklad:

Vypočtěte délku asteroidy.

Řešení:

Asteroida je zvláštním případem hypocykloidy. Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se kutálí po vnitřní straně nehybné kružnice.

Asteroidu dostaneme v případě, kdy se kružnice o poloměru $r = \frac{a}{4}$ kutálí po vnitřní straně kružnice poloměru $R = a$. V animaci se na vytvoření asteroidy podíváme. Zvolíme si konkrétní nehybnou kružnici poloměru $R = 4$ se středem v $[0,0]$ a kružnici s $r = 1$ a středem v $[3,0]$ a bod na této kružnici se souřadnicemi $[4,0]$. Kutálením menší kružnice nám bod vykreslí křivku (asteroidu).



Máme určit délku obecné asteroidy. Parametrické rovnice jsou:

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Jak jsme viděli z animace, asteroida je symetrická vzhledem k oběma souřadnicovým osám, stačí vypočítat délku v jednom kvadrantu $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a vynásobit 4.

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t$$
$$\dot{y} = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt = 12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,dt = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Další geometrické a fyzikální aplikace určitého integrálu

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DALŠÍ GEOMETRICKÉ A FYZIKÁLNÍ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Geometrické aplikace

Fyzikální aplikace

MOTIVACE:

Jak jsme již zmínili v minulé přednášce, určitý integrál je využíván v nepřeberném množství praktických problémů. My se zaměříme na jednoduché aplikace v mechanice, jako je výpočet souřadnic těžiště či momentů setrvačnosti hmotných křivek a rovinných oblastí. Další využití integrálního počtu je například při výpočtu tlakové síly, práce, pohybu, atd.

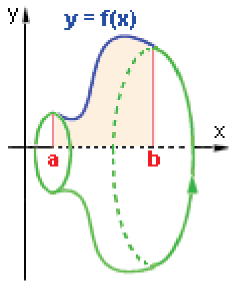
CÍL:

Umět aplikovat určitý integrál při řešení geometrických či fyzikálních problémů.

1.1 GEOMETRICKÉ APLIKACE

1.1.1 Objem rotačního tělesa

Necháme-li rovinný útvar rotovat kolem osy x, vznikne rotační těleso, jehož objem můžeme vypočítat pomocí určitého integrálu.



Věta: Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a,b\rangle$. Pak rotační těleso, vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x v intervalu $\langle a,b\rangle$, má objem:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Audio 1.1 Objem rotačního tělesa

Poznámka:

1) Obdobný vzorec platí, je-li osou rotace osa y. Objem tělesa, které vznikne rotací spojité křivky $x = h(y)$ pro $y \in \langle c,d\rangle$ kolem osy y, vypočteme ze vztahu:

$$V = \pi\int_c^d h^2(y)dy.$$

2) Pokud získáme těleso rotací útvaru ohraničeného křivkami $f(x), g(x)$ $(g(x) \le f(x))$ kolem osy x na $\langle a,b\rangle$, pak objem takového tělesa určíme jako

$$V = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx.$$

Věta: Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$, platí pro objem tělesa, které vznikne rotací útvaru kolem osy x:

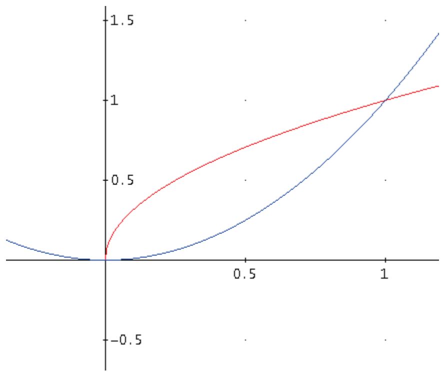
$$V = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt.$$

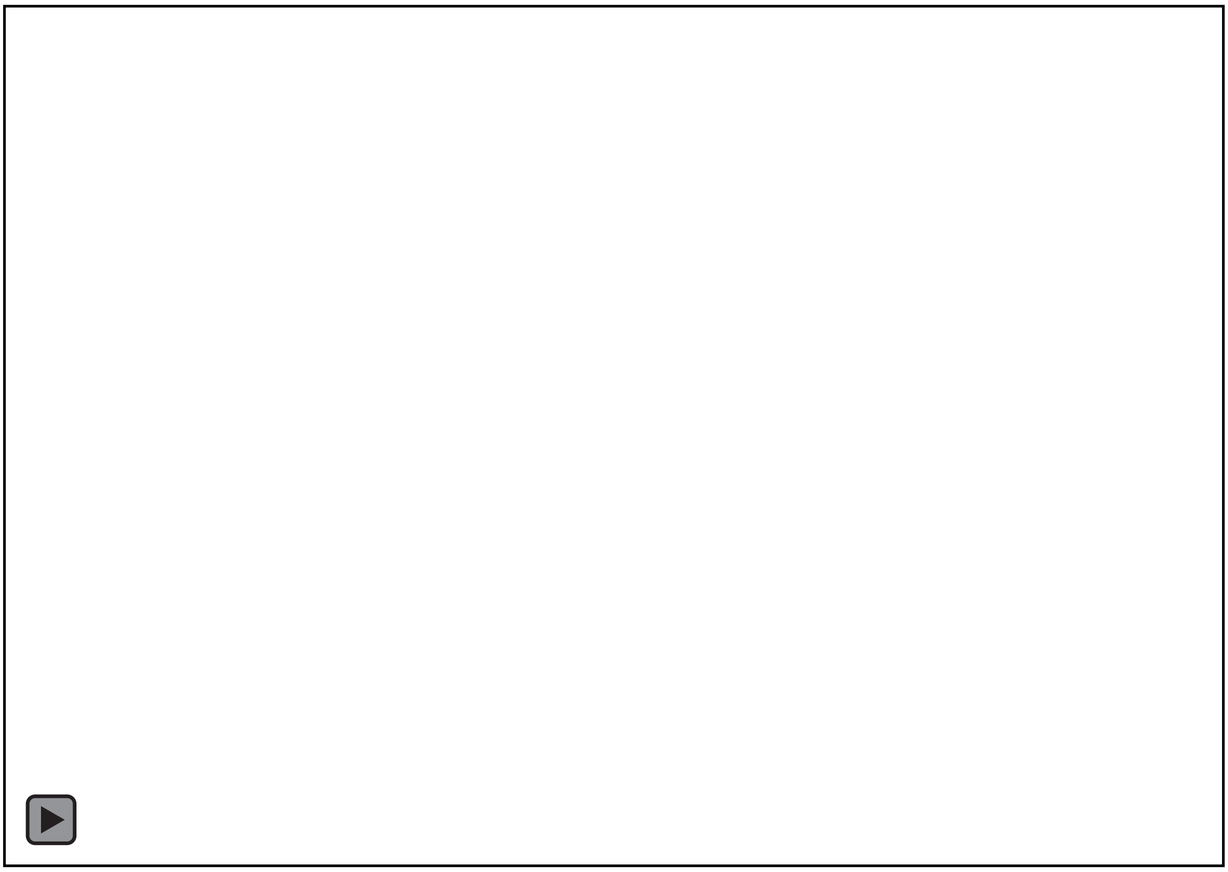
Příklad:

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivek $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ kolem osy x pro $x \in \langle 0,1 \rangle$.

Řešení:

V grafu vidíme rovinný útvar, jehož rotací kolem osy x vznikne těleso, jehož objem hledáme. Následující animace nám ukáže, o jaké těleso půjde.





Křivka $y = x^2$ ohraničuje útvar zdola a křivka $y = \sqrt{x}$ shora. Hledaný objem dostaneme, když od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x, odečteme objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou $y = x^2$.

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]=\frac{3}{10}\pi$$

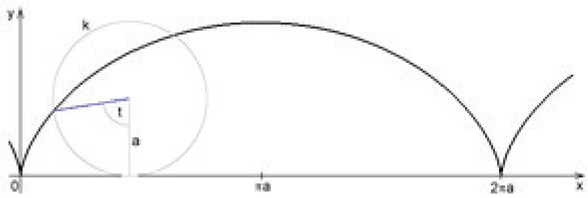
Příklad:

Určete objem rotačního tělesa vzniklého rotací jednoho oblouku cykloidy kolem osy x (cykloidiální vřeteno).

Řešení:

Víme, že cykloidu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi:

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. Do vzorce potřebujeme znát derivaci funkce $x=a(t-\sin t)\Rightarrow \dot{x}=a(1-\cos t)$.



$$V=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=$$

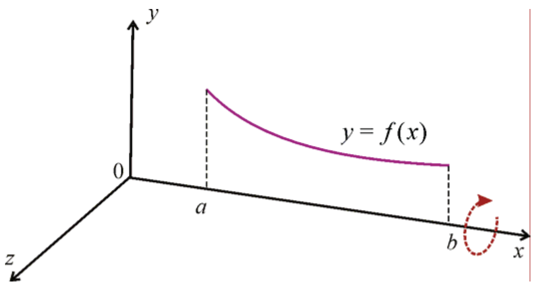
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\frac{1+\cos 2t}{2}-(1-\sin^2 t)\cos t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left[t-3\sin t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}=\pi a^3\left(2\pi-0+3\pi+0-0+0\right)=5\pi^2a^3$$

1.1.2 Obsah rotační plochy

Pomocí určitého integrálu vypočítáme i obsah pláště rotačního tělesa.

Audio 1.2 Obsah rotační plochy



Věta: Nechť je funkce $y=f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a,b\rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y=f(x)$ kolem osy

x v intervalu $\langle a,b\rangle$, platí:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Poznámka:

Rotace kolem osy y: $S = 2\pi\int_c^d h(y)\sqrt{1+\left(h'(y)\right)^2}\,dy.$

Věta: Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, platí pro obsah plochy tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Příklad:

Vypočtěte povrch pláště rotačního komolého kužele, které vznikne rotací křivky $y=x$ kolem osy x pro $x\in\langle 1,3\rangle$.

Řešení:

$$S = 2\pi\int_1^3 x\sqrt{1+1^2}\,dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \pi\sqrt{2}(9-1) = 8\pi\sqrt{2}$$

1.2 FYZIKÁLNÍ APLIKACE

Audio 1.3 Fyzikální aplikace

1.2.1 Hmotnost, moment setrvačnosti a souřadnice těžiště rovinné křivky

Představme si kus drátu, který je v obecném případě nehomogenní. Matematickým modelem je křivka. Předpokládejme, že máme nezápornou funkci ρ, která je definovaná ve všech bodech křivky a každému bodu přiřazuje délkovou hustotu v tomto bodě.

Křivka C je dána parametrickými rovnicemi

$$x=\varphi(t), y=\psi(t)\text{, kde } t\in\langle\alpha,\beta\rangle$$

Věta: Nechť $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojitou derivaci na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ a $\rho(t)$ je spojitá a nezáporná. Pak křivka C mající délkovou hustotu $\rho(t)$ má hmotnost

$$M(C) = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Pro souřadnice jejího těžiště platí

$$T=\left[\frac{S_y(C)}{M(C)},\frac{S_x(C)}{M(C)}\right],$$

kde

$$S_x(C)=\int_\alpha^\beta \psi(t)\rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$
$$S_y(C)=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Veličiny $S_x(C), S_y(C)$ nazýváme statické momenty křivky C vzhledem k ose x (y).

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x(C)=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$
$$I_y(C)=\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Poznámka:

Je-li křivka C grafem funkce $f(x)$ a $\rho(x)$ udává její délkovou hustotu v bodě, dostáváme z předchozího zjednodušenou verzi:

Pro souřadnice těžiště grafu C funkce $f(x)$ platí stejný vzorec $T=\left[\frac{S_y(C)}{M(C)},\frac{S_x(C)}{M(C)}\right]$, kde

$$M(C)=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$
$$S_x(C)=\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$
$$S_y(C)=\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$
$$I_x(C)=\int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$
$$I_y(C)=\int_a^b x^2\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Příklad:

Určete hmotnost a souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $K: x^2+y^2=r^2,\ y\ge 0, r>0$.

Řešení:

parametrické rovnice kružnice: $x=r\cos t, y=r\sin t, t\in\langle 0,\pi\rangle$

křivka je homogenní $\Rightarrow$ hustota je konstantní $\rho(x)=c, c>0$.

hmotnost: $M(C)=c\int_0^\pi \sqrt{[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2}\,dt=c\int_0^\pi r\,dt=cr[t]_0^\pi=cr\pi$

Statické momenty:

$$S_x(C) = c\int_0^{\pi} r\sin t \cdot r dt = r^2 c[-\cos t]_0^{\pi} = r^2 c(1+1) = 2r^2 c$$

$$S_y(C) = c\int_0^{\pi} r\cos t \cdot r dt = r^2 c[\sin t]_0^{\pi} = 0$$ ... stačilo si uvědomit, že těžiště musí ležet na ose y

Souřadnice těžiště: $T = \left[0, \dfrac{2r}{\pi}\right]$

1.2.2 Hmotnost, moment setrvačnosti a souřadnice těžiště rovinné oblasti

Věta: Nechť je hmotná rovinná oblast ohraničena křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x) \le f(x)$ na $\langle a, b\rangle$. Pak hmotnost této oblasti s konstantní plošnou hustotou ρ je

$$M = \rho\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Statické momenty určíme ze vztahů:

$$S_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx,$$

$$S_y = \rho\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Pro momenty setrvačnosti platí:

$$I_x = \frac{\rho}{3}\int_a^b [f^3(x) - g^3(x)]dx,$$

$$I_y = \rho\int_a^b x^2[f(x) - g(x)]dx.$$

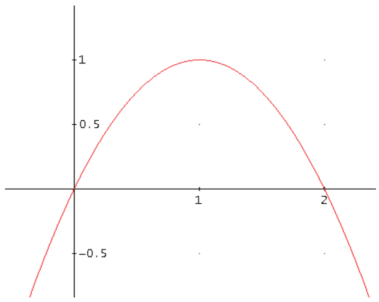
Těžiště má souřadnice:

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Příklad:

Určete souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 2x - x^2$ a osou x.

Řešení:



$$M=\rho\int_0^2\left[2x-x^2\right]dx=\rho\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\rho\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}\rho$$

Vidíme, že x-ová souřadnice těžiště bude rovna 1. Ověříme.

$$S_y=\rho\int_0^2 x\left[2x-x^2\right]dx=\rho\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\rho\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)=\frac{16}{12}\rho\Rightarrow T_x=\frac{S_y}{M}=1$$

$$S_x=\frac{\rho}{2}\int_0^2\left[2x-x^2\right]^2dx=\frac{\rho}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{\rho}{2}\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=\frac{16}{15}\rho\Rightarrow T_y=\frac{S_x}{M}=\frac{4}{5}$$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Funkce dvou proměnných, parciální derivace

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH, PARCIÁLNÍ DERIVACE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

MOTIVACE:

V minulém semestru jsme studovali vlastnosti funkcí jedné nezávislé proměnné. K popisu mnoha reálných situací obvykle s jednou proměnnou nevystačíme. V mnoha praktických problémech zjistíme, že určitá veličina závisí na dvou či více jiných veličinách. Například dráha tělesa závisí na rychlosti a čase, průhyb nosníku závisí dokonce na čtyřech veličinách či objem válce závisí na poloměru základny a výšce, atd. To znamená, že se v mnoha problémech (v mechanice, fyzice, ...) s funkcemi více proměnných budete setkávat.

CÍL:

Chápat pojem funkce více (dvou) proměnných, umět určit definiční obor daných funkcí. Dokázat parciálně derivovat funkce dvou proměnných.

1.1 FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Definice: Reálná funkce dvou reálných proměnných $f: R^2 \to R$ je zobrazení, které každému bodu $[x, y] \in R^2$ přiřadí nejvýše jedno $f(x, y) \in R$.

Audio 1.1 Funkce dvou proměnných

Poznámka:

1. $[x, y]$ … uspořádaná dvojice nezávislých proměnných (argumentů)

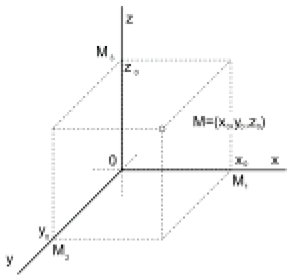
   $z = f(x, y)$ … závislá proměnná (funkční hodnota)

2. Zápis funkce: $z = f(x, y)$, $f(x, y)$, $[x, y, z] \in f$

3. Množina $D_f = \{[x, y] \in R^2 : \exists z \in R : f(x, y) = z\}$ se nazývá definiční obor funkce *f*, tj. množina všech bodů $[x, y]$, kterým daná funkce přiřazuje funkční hodnotu z. Pro určení definičního oboru funkce dvou proměnných postupujeme analogicky jako u funkce jedné proměnné.

4. Množina $H_f = \{z \in R : \exists [x, y] \in D_f : f(x, y) = z\}$ se nazývá obor hodnot funkce *f* (množina všech z).

5. Grafem funkce dvou proměnných rozumíme plochu v prostoru o souřadnicích $[x, y, z]$, kde $[x, y]$ nabývají všech hodnot z definičního oboru funkce.



Obr. bod M v prostoru

<u>Příklad:</u>

Vyšetřete a nakreslete definiční obor funkce

a) $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^3 + y)}$

b) $z = \arccos(2x - y)$

c) $z = -\dfrac{2}{\sqrt{\cos(x + y)}}$

MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

Řešení:

Vypíšeme omezující podmínky pro proměnné x, y (tj. pro definiční obor). Víme, že omezující podmínky jsou pro odmocninu (pod odmocninou nesmí být záporné číslo), pro zlomek (ve jmenovateli nesmí být nula), pro logaritmickou funkci (argument musí být větší jak 0) a pro funkci arkussinus a arkuskosinus (argument musí být v intervalu $\langle -1,1\rangle$).

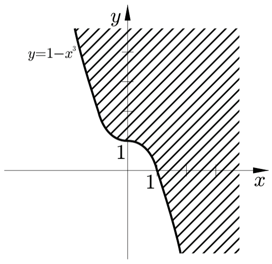
a) podmínky: $\ln(x^3 + y) \geq 0 \;\wedge\; x^3 + y > 0$

soustavu nerovnic vyřešíme:

$$\ln(x^3 + y) \geq 0 \Rightarrow x^3 + y \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 - x^3 \;\wedge\; y > -x^3$$

$$D_f = \{[x, y] \in R^2 : y \geq 1 - x^3\}$$

Definiční obor znázorníme (pomocí znalostí grafů elementárních funkcí). Nejdříve zakreslíme graf funkce $y = 1 - x^3$ (pokud je v podmínce def. oboru ostrá nerovnost, znázorníme křivku čárkovaně) a pak vyznačíme plochu nad či pod křivkou, podle nerovnosti v podmínce def. oboru. V našem případě body na křivce patří do definičního oboru a vyšrafujeme plochu nad křivkou.



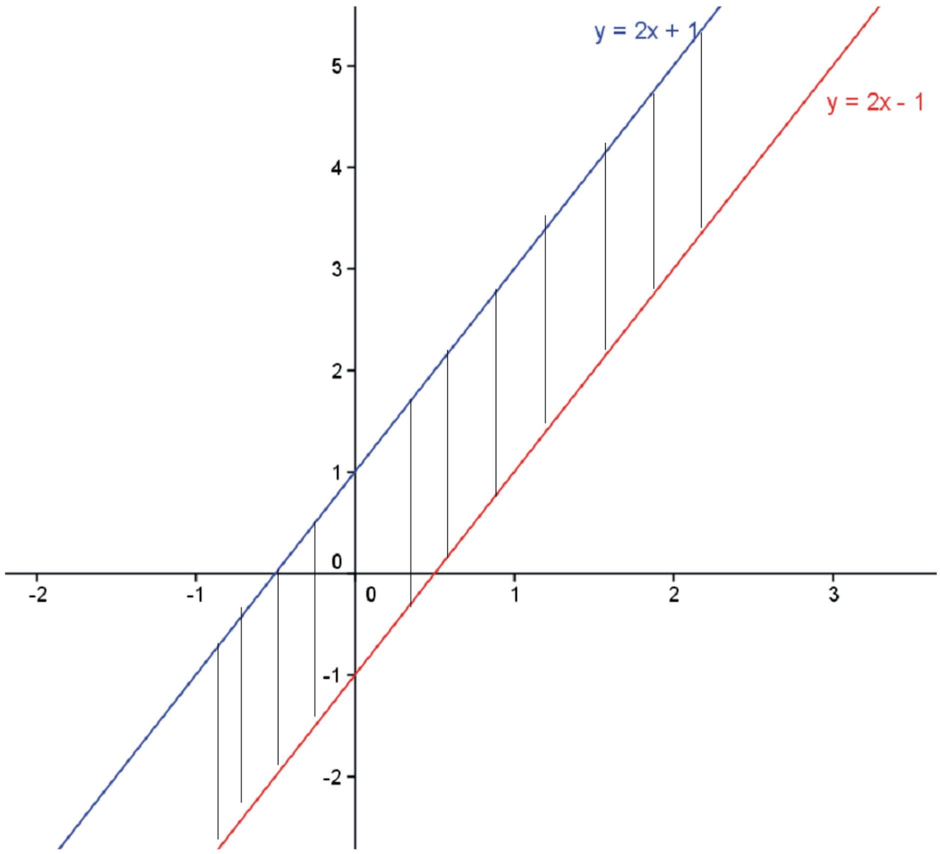
b) podmínky: $-1 \leq 2x - y \leq 1$

vyřešíme:

$$-1 \leq 2x - y \leq 1 \Rightarrow -1 - 2x \leq -y \leq 1 - 2x \Rightarrow -1 + 2x \leq y \leq 1 + 2x$$

$$D_f = \{[x, y] \in R^2 : -1 + 2x \leq y \leq 1 + 2x\}$$

Definiční obor znázorníme: Nejdříve zakreslíme grafy funkcí: $y = -1 + 2x$ a $y = 1 + 2x$. Jedná se o lineární funkce, kde grafem je přímka. Definičním oborem budou body mezi přímkami, včetně bodů na přímkách.

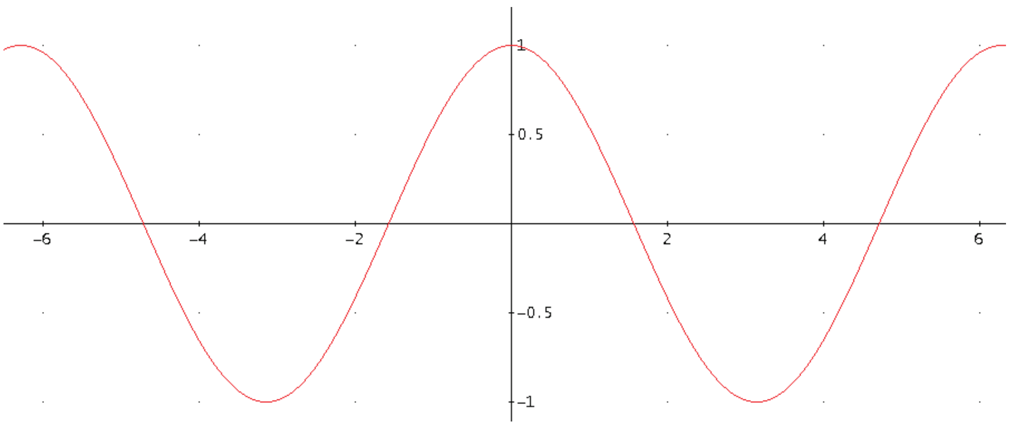


c) podmínky: $\sqrt{\cos(x+y)} \neq 0 \quad \wedge \quad \cos(x+y) \geq 0$

Z obou podmínek vidíme, že vlastně budeme řešit pouze jednu nerovnici:

$$\cos(x+y) > 0 \, .$$

Řešíme goniometrickou nerovnici. Pomůžeme si grafem funkce kosinus (červeně ... $y = \cos x$).



Z grafu je zřejmé, že funkce kosinus má kladné hodnoty na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Jelikož se jedná o periodickou funkci s periodou 2π, musíme s tímto při výsledku počítat.

$$\cos(x+y) > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + y < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

kde

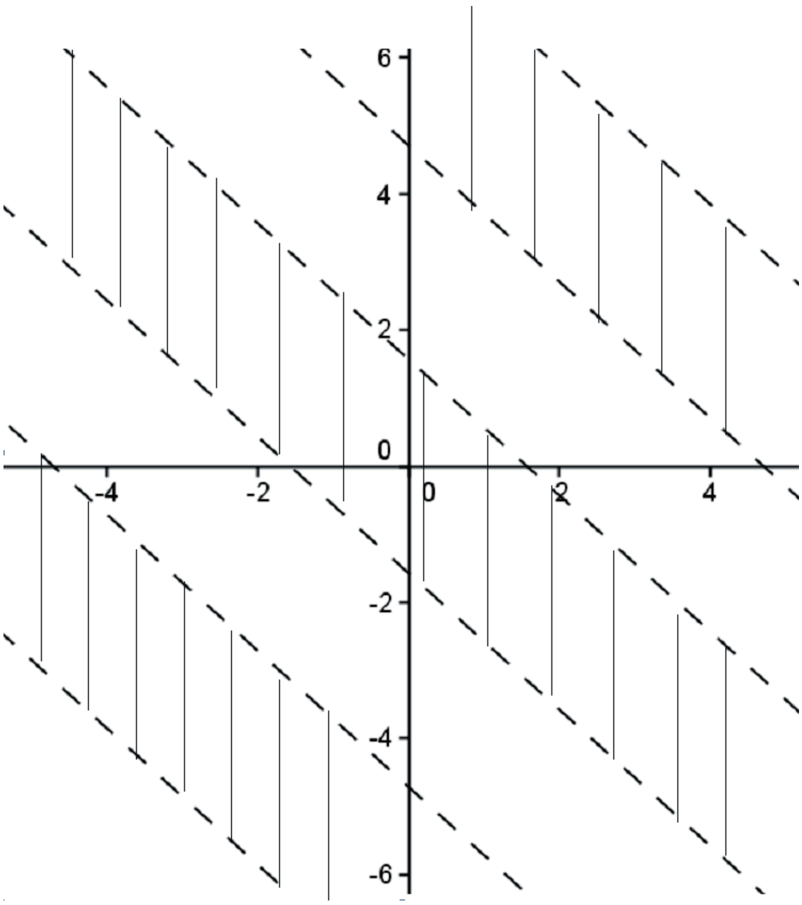
$$k \in Z .$$

$$D_f = \left\{ [x, y] \in R^2 : -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

Definiční obor znázorníme: Uvědomíme si, že se opět bude jednat o přímky. První zvolíme $k = 0$: zakreslíme (čárkovaně - v D_f je ostrá nerovnost) tedy grafy funkcí: $y = -x - \frac{\pi}{2}$, $y = -x + \frac{\pi}{2}$ a vyšrafujeme plochu mezi přímkami

Jako další zvolíme např. $k = -1$ a zakreslíme grafy funkcí: $y = -x - \frac{\pi}{2} - 2\pi = -x - \frac{5\pi}{2}$ a $y = -x + \frac{\pi}{2} - 2\pi = -x - \frac{3\pi}{2}$

Takto budeme pokračovat dál pro $k = \ldots, -2, 1, 2, \ldots$.



1.2 PARCIÁLNÍ DERIVACE

Pokud chceme vědět, jak se změní funkce dvou proměnných v závislosti na změně jedné z proměnných, rozhodneme o tom pomocí parciálních derivací funkce.

Definice: Nechť funkce $f : R^2 \to R$ je definovaná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Má-li funkce $f(x, y_0)$ o jedné proměnné x derivaci v bodě x_0, nazýváme ji parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v bodě A (obdobně pro proměnnou y) a značíme ji: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(A)}{\partial x}, f'_x(A)$.

Poznámka:

Audio 1.2 Výpočet parciální derivace

1. Již samotná definice poskytuje návod, jak parciální derivace počítat. Parciální derivaci funkce podle pevně zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž druhou proměnnou považujeme za konstantu. Při hledání parciálních derivací užíváme tedy známá pravidla pro derivace funkcí jedné proměnné.

2. Parciální derivace určují rychlost růstu funkce ve směrech rovnoběžných s osami *x, y*. $f'_x(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která je průnikem grafu funkce f s rovinou $y = y_0$.

Příklad:

a) Spočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = x^2 y + \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

b) Spočtěte parciální derivace funkce $z = 3x^2 + \sin xy + e^{2y} + 2y$ v bodě $A = [\pi, 0]$.

Řešení:

a) Hledáme dvě parciální derivace funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Nejdříve budeme funkci derivovat podle proměnné *x*, tzn., proměnnou *y* budeme považovat za konstantu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2xy + \frac{1}{x}$$

Nyní budeme derivovat funkci podle proměnné *y* a proměnnou *x* budeme považovat za konstantu.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = x^2 - \frac{1}{y}$$

b) Parciální derivace v bodě najdeme tak, že určíme parciální derivace obecně a do výsledku dosadíme souřadnice bodu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y\cos xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial f(A)}{\partial x} = 6\pi + 0\cdot\cos 0 = 6\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + 2e^{2y} + 2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f(A)}{\partial y} = \pi\cdot\cos 0 + 2e^{0} + 2 = \pi + 4$$

1.2.1 Parciální derivace vyšších řádů

Audio 1.3 Parciální derivace vyšších řádů

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné zavádíme pojem derivace vyšších řádů. Vypočítané parciální derivace prvního řádu mohou být opět funkcemi proměnných *x, y*. Můžeme je tedy stejně jako v případě funkce jedné proměnné znovu derivovat a získáme celkem čtyři parciální derivace druhého řádu:

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}$ ... druhá parciální derivace podle x vznikne tím, že derivujeme 1. parciální derivaci podle x znovu podle x

2. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}$ ... druhá parciální derivace podle y vznikne tím, že derivujeme 1. parciální derivaci podle y znovu podle y

3. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ ... druhá parciální derivace podle x a y vznikne tím, že 1. parciální derivaci podle x derivujeme podle y

4. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$ ... druhá parciální derivace podle y a x vznikne tím, že 1. parciální derivaci podle y derivujeme podle x

Příklad:

Spočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = x^2 y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení:

Potřebujeme určit 1. parciální derivace funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, které jsme si již určili v předcházejícím příkladě a).

1) Jako první budeme parciálně derivovat $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{x}$.

   Nejdříve budeme funkci derivovat podle proměnné *x*.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2y - \frac{1}{x^2}$$

Nyní budeme derivovat funkci podle proměnné y a dostaneme smíšenou parciální derivaci.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

2) Už nám zbývá parciálně derivovat funkci $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{1}{y}$.

Funkci budeme derivovat podle proměnné x a opět dostaneme smíšenou parciální derivaci.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$ .... vidíme, že smíšené derivace jsou stejné, pořadí proměnných ve jmenovateli udává, v jakém pořadí derivujeme

Už nám zbývá jen derivace podle y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{y^2}$$

Poznámka:

1. Druhé smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si jsou rovny. Tato rovnost neplatí obecně, ale pouze v případě, kdy smíšené parciální derivace jsou spojité funkce. Říkáme, že smíšené parciální derivace v případě spojitosti funkcí nezávisí na pořadí derivování.

2. Je zřejmé, že i druhé parciální derivace mohou být funkcemi proměnných x a y, můžeme je tedy dále derivovat, čímž získáme parciální derivace třetího řádu. Derivací třetích parciálních derivací dostaneme parciální derivace čtvrtého řádu, atd.

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] KREML P.a kol.: Matematika II.. Učební texty VŠB-TUO, Ostrava, 2007, ISBN 978-80-248-1316-5.

[2] JARNÍK V.: Integrální počet I. Praha, 1974.

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Totální diferenciál a jeho užití

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH, PARCIÁLNÍ DERIVACE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Diferenciál

Diferenciál

Tečná rovina a normála

MOTIVACE:

K zavedení diferenciálu vedla snaha nalézt co nejlepší aproximaci obecné funkce pomocí funkce lineární. Důvod pro takovouto aproximaci je skutečnost, že lineární funkce je jednoduchá a snadno se s ní z početního i teoretického hlediska pracuje. Ve fyzice často nějaká veličina závisí na jiných veličinách (např. na čase). Změna veličiny, která je funkcí dvou proměnných, lze vyjádřit právě pomocí diferenciálu. Toho lze využít například při sestavování diferenciálních rovnic, které popisují vztahy mezi veličinami a jejich změnami nebo při výpočtu změny objemu (povrchu) válce, atd. Dalším významným oborem, kde je totální diferenciál využíván, je termodynamika (přírůstky termodynamických potenciálů - např. vnitřní energie plynu - jsou totální diferenciály).

CÍL:

Chápat pojem totálního diferenciálu. Umět využít diferenciál v různých aplikacích, tj. aproximovat funkci lineární funkcí, určit přibližnou hodnotu, nalézt rovnici tečné roviny a normály.

1.1 DIFERENCIÁL

Stejně jako u funkce jedné proměnné je i u funkcí dvou proměnných často vhodné nahrazovat přírůstek funkce pomocí diferenciálu či lineární aproximací funkce v bodě. Pro funkci jedné proměnné neměl pojem diferenciálu příliš valný význam, ovšem pro funkci ve více rozměrech je již velmi důležitý.

Audio 1.1 Totální diferenciál

Definice: Funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ *totální diferenciál* (je v bodě A diferencovatelná), je-li možno její přírůstek v okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = k_1 h_1 + k_2 h_2 + \rho\tau(h_1, h_2),$$

kde k_1, k_2 jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $h_1 = dx = x - x_0$, $h_2 = dy = y - y_0$ a

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \tau(h_1, h_2) = 0.$$

Věta: Je-li funkce $z = f(x,y)$ v bodě A diferencovatelná, má v bodě A spojité parciální derivace a platí: $k_1 = \dfrac{\partial f(A)}{\partial x}, k_2 = \dfrac{\partial f(A)}{\partial y}$.

Definice: Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná, pak výraz

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

nazýváme *totálním diferenciálem* funkce $z = f(x,y)$.

Poznámka:

1) jiný zápis diferenciálu: $dz(A) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$

2) pomocí diferenciálu můžeme určit přibližnou funkční hodnotu v libovolném bodě $X = [x, y]$ z definičního oboru, který je "blízko" bodu $A = [x_0, y_0]$:

$$f(X) \approx f(A) + f'_x(A)\cdot(x - x_0) + f'_y(A)\cdot(y - y_0)$$

Příklad:

a) Najděte lineární aproximaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}$ v okolí bodu (0,0).

b) Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu $1{,}94^2 \cdot e^{0{,}12}$.

Řešení:

a) $f(x,y) \approx f(0{,}0) + df(0{,}0)[(x,y)] = f(0{,}0) + f'_x(0{,}0)\cdot(x-0) + f'_y(0{,}0)\cdot(y-0)$

Potřebujeme určit:

$$f(0{,}0) = \operatorname{arctg}\frac{0+0}{1+0} = 0$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2} \Rightarrow f'_x(0{,}0) = 1$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{1+xy-(x+y)x}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2} \Rightarrow f'_y(0{,}0) = 1$$

Můžeme tedy psát: $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy} \approx x+y$

b) Víme, že: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

Chceme určit přibližnou hodnotu $1{,}94^2\cdot e^{0{,}12}$. Můžeme využít funkce $f(x,y) = x^2\cdot e^y$ a totálního diferenciálu dané funkce v bodě $(2{,}0)$ s diferencemi $dx = x - x_0 = 1{,}94 - 2 = -0{,}06$, $dy = y - y_0 = 0{,}12 - 0 = 0{,}12$.

$$f(x_0,y_0) = 2^2\cdot e^0 = 4$$

$$f'_x(x,y) = 2x\cdot e^y \Rightarrow f'_x(2{,}0) = 4$$

$$f'_y(x,y) = x^2\cdot e^y \Rightarrow f'_x(2{,}0) = 4$$

Dosadíme:

$$1{,}94^2\cdot e^{0{,}12} \approx 4 + 4\cdot(-0{,}06) + 4\cdot 0{,}12 = 4{,}24$$

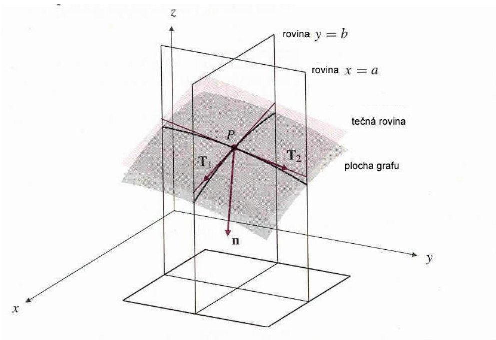
Věta: Je-li funkce $z = f(x,y)$ v bodě A diferencovatelná, pak je v tomto bodě i spojitá.

Věta: Má-li funkce $z = f(x,y)$ v bodě A spojité parciální derivace, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

1.2 TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA

Věta: Tečná rovina τ plochy $z = f(x, y)$ v bodě $P = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, pokud je funkce *f* diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Rovnice tečné roviny v bodě *P* je dána vztahem

$$\tau : f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

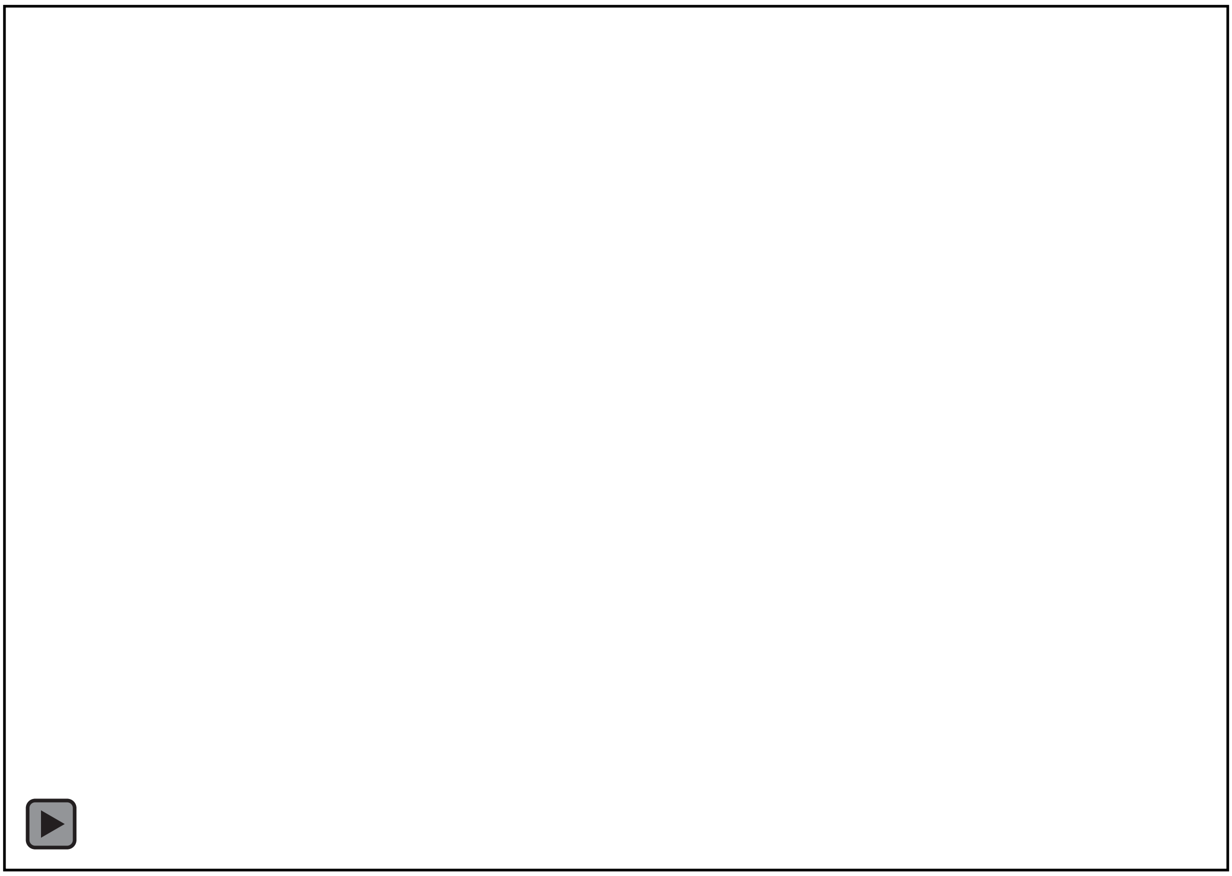


Poznámka:

Audio 1.2 Využití totálního diferenciálu

Tečná rovina musí procházet bodem na ploše grafu a můžeme ji najít pouze tehdy, kdy má funkce v daném bodě diferenciál. Tzn., že diferenciál v daném bodě je "přírůstkem na tečné rovině". Tečná rovina je nejlepší lineární aproximací funkce v okolí daného bodu.

V animaci se podíváme, že bodem na ploše grafu funkce prochází nespočetně mnoho rovin, ale tečná rovina je jen jedna. Jako funkci mějme $z = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2$ a začínáme v bodě $[0,2,-1]$.



Normála plochy je přímka kolmá na tuto rovinu v bodě dotyku a její směrový vektor má souřadnice $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ (je kolineární s normálovým vektorem roviny) a její parametrické rovnice jsou:

$$\eta: \ x = x_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot t, \ y = y_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot t, \ z = f(x_0, y_0) - t, \ t \in R.$$

Poznámka:

Diferenciál funkce se používá mj. k přibližným výpočtům hodnot funkce dvou proměnných, kdy skutečný přírůstek funkce je nahrazen přibližným přírůstkem, tj. diferenciálem (přírůstkem na tečné rovině):

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Příklad:

Určete rovnici tečné roviny a parametrické rovnice normály ke grafu funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A=[4,-3,?]$.

Řešení:

Víme, že tečnou rovinu najdeme pomocí vztahu:

$$\tau: f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Potřebujeme určit $f(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$ a $f'_y(x_0,y_0)$.

$$f(x_0,y_0)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

$$f'_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f'_x(4,-3)=\frac{4}{5}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f'_y(4,-3)=-\frac{3}{5}$$

Dosadíme: $\tau: z-5=\frac{4}{5}\cdot(x-4)-\frac{3}{5}\cdot(y+3)$

Upravíme: $\tau: \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-z=0$ ... rovnice tečné roviny

Normála: $\eta:\ x=4+\frac{4}{5}\cdot t,\ y=-3-\frac{3}{5}\cdot t,\ z=5-t, t\in R$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] ŠKRÁŠEK J. a kol.: Základy aplikované matematiky I. a II. SNTL, Praha, 1986.

[2] DOBROVSKÁ V., VRBICKÝ J..: Diferenciální počet funkcí více proměnných - Matematika IIb. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0656-8

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Extrémy funkce dvou proměnných

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Volné lokální extrémy

Vázané lokální extrémy

MOTIVACE:

Extrémy funkcí jsou jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního počtu a setkáváme se s nimi takřka všude - např. při odhadu parametrů regresní přímky pomocí metody nejmenších čtverců (př. určování koeficientu teplotní roztažnosti látky z naměřených hodnot při různých změnách teploty), při řešení optimalizačních problémů (př. v aerodynamice), při hledání podmínek termodynamické rovnováhy, v oblasti teoretické mechaniky, atd.

CÍL:

Chápat pojem extrém funkce dvou proměnných, umět definovat typy lokálních extrémů a znát nutné a postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů.

Stejně jako u funkce jedné proměnné rozdělujeme extrémy na lokální (v okolí daného bodu) a globální či absolutní (na celém definičním oboru).

1.1 VOLNÉ LOKÁLNÍ EXTRÉMY

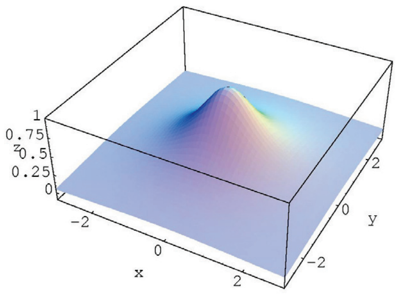
Lokální extrémy funkce dvou proměnných jsou definovány analogicky jako extrémy funkce jedné proměnné.

Definice: Řekneme, že funkce $f : R^2 \to R$ má v bodě $(x_0, y_0) \in D_f$:

1. *lokální minimum*, jestliže $\exists U(x_0, y_0)$ tak, že $\forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$

2. *lokální maximum*, jestliže $\exists U(x_0, y_0)$ tak, že $\forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

Audio 1.1 Lokální extrémy



Poznámka:

Jsou-li nerovnosti v definici splněny ostře, pak se extrémy nazývají ostré. Na obrázku výše je vidět lokální maximum.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné existují pro funkce dvou proměnných nutné a postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů.

Věta (nutná podmínka existence extrému - Fermatova věta):

Nechť má funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Existují-li v bodě (x_0, y_0) parciální derivace prvního řádu, pak jsou rovny nule, tj.: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$

Audio 1.2 Nutná podmínka existence extrému

MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

Definice: Bod $(x_0, y_0) \in D_f$ se nazývá *stacionární bod* funkce *f*, jestliže v něm existují obě parciální derivace prvního řádu a jsou rovny 0.

Audio 1.3 stacionární bod

Poznámka:

Body podezřelé z extrému:

a) stacionární body

b) body, v nichž alespoň jedna parciální derivace neexistuje a zbývající je rovna 0

c) body, v nichž neexistuje ani jedna parciální derivace

O existenci a typu extrému pak rozhodneme podle postačující podmínky pro lok. extrém (lze pouze v případě stacionárních bodů) nebo podle definice.

Věta (postačující podmínka existence extrému):

Nechť má funkce $f(x, y)$ na okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace druhého řádu. Označme:

$$D_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) \text{ a } D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Pak platí:

1. Jestliže $D_2 > 0$, má funkce $f(x, y)$ v (x_0, y_0) ostrý lokální extrém. Navíc

   je-li $D_1 > 0$, jedná se o ostré lokální minimum

   je-li $D_1 < 0$, jedná se o ostré lokální maximum

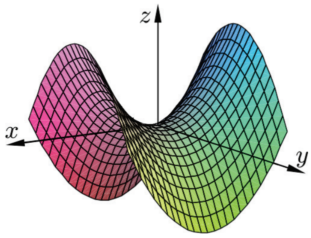
2. Jestliže $D_2 < 0$, nemá funkce $f(x, y)$ v (x_0, y_0) lokální extrém

3. Jestliže $D_2 = 0$, nelze tímto způsobem rozhodnout.

Audio 1.4 Postačující podmínka existence extrému

1.1.1 Geometrická interpretace

Výpočet lokálních extrémů funkce dvou proměnných vede k nalezení stacionárních bodů plochy $z = f(x, y)$, v nichž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou *xy*. Stacionárním bodům, které nejsou lokálními extrémy, odpovídají body, v jejichž okolí má plocha tvar sedla (tzv. sedlové body) - viz. obrázek.



1.1.2 Algoritmus pro nalezení lokálních extrémů funkce dvou proměnných

1. Určíme první parciální derivace a položíme je rovny 0, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.
2. Vyřešíme soustavu. Řešením jsou stacionární body. Dále nalezneme body, v nichž neexistuje aspoň jedna první parciální derivace.
3. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici.
4. Vypočítáme hodnoty determinantů pro první stacionární bod.
5. Na základě postačující podmínky rozhodneme o existenci a druhu extrému.
6. Body 4., 5. budeme opakovat pro všechny stacionární body.
7. Nelze-li rozhodnout pomocí postačující podmínky, použijeme definici.

Příklad:

Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x\left(3 - x^2\right) - y^2$.

Řešení:

$D_f = R \times R$

1) $f'_x = 3 - 3x^2$, $f'_y = -2y$

   sestavíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme:

   $3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
   $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

2) Z řešení soustavy jsme dostali 2 stacionární body: $A = [1,0]$, $B = [-1,0]$
   parciální derivace existují ve všech bodech definičního oboru $\Rightarrow$ žádné další body (kromě stacionárních) podezřelé z extrému neexistují

3) $f''_{xx} = -6x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$, $f''_{yy} = -2$

   $D_1 = f''_{xx} = -6x$, $D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

4) pro $A=[1{,}0]$: $D_1(A)=-6 \ \wedge\ D_2(A)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=12$

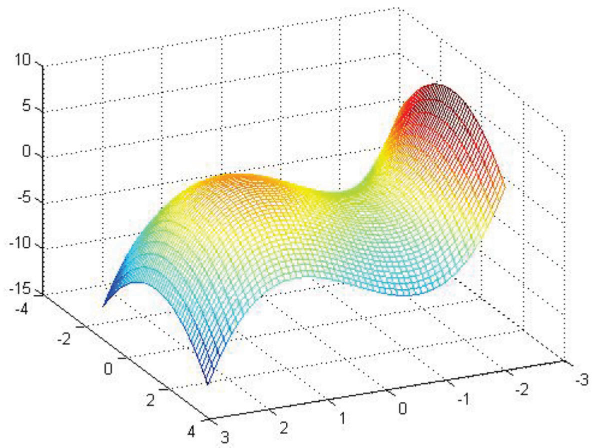
pro $B=[-1{,}0]$: $D_1(B)=6 \ \wedge\ D_2(B)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-12$

5) pro $A=[1{,}0]$: $D_2(A)>0 \Rightarrow$ v A existuje lokální extrém

$D_1(A)<0 \Rightarrow$ v A je lokální maximum

pro $B=[-1{,}0]$: $D_2(B)<0 \Rightarrow$ v B neexistuje lokální extrém, jde o sedlový bod

Na grafu funkce (Obr. 2) můžete vidět jak lokální maximum, tak i sedlový bod.



Obr. 2 Graf funkce $z=x\left(3-x^2\right)-y^2$.

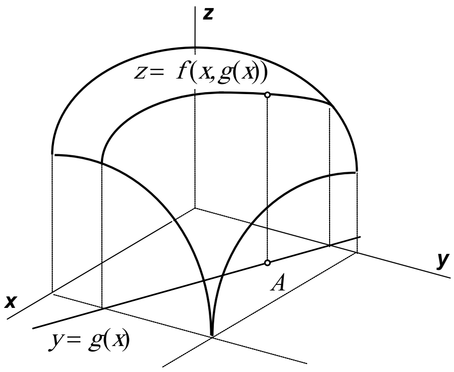
1.2 VÁZANÉ LOKÁLNÍ EXTRÉMY

V praxi je obvyklá situace, kdy kromě lokálních extrémů je potřeba určit extrémy funkce $f(x,y)$ vzhledem k množině. Typicky tuto množinu tvoří body z definičního oboru splňující zadanou podmínku (vázanou podmínku $g(x,y)=0$). Znamená to, že kromě zadané funkce je navíc dána podmínka, kterou hledané extrémy musí splňovat. Takové extrémy budeme nazývat *vázané extrémy*.

Audio 1.5 Vázané extrémy

1.2.1 Geometrická interpretace

Bodům, které leží v definičním oboru funkce $z=f(x,y)$ a vyhovují rovnici $g(x,y)=0$, odpovídají na ploše $z=f(x,y)$ body, které tvoří křivku k (Obr. 3). Body vázaných extrémů jsou pak ty body, v nichž funkce $z=f(x,y)$ nabývá svého lokálního extrému na křivce k.



Obr. 3 Vazební podmínka

1.2.2 Metody hledání vázaných extrémů

Úkolem je nalézt vázané lokální extrémy funkce *f* dvou proměnných s vazbou $g(x,y)=0$.

Mohou nastat dva případy:

1. Rovnice $g(x,y)=0$ určuje implicitně funkci $y=\varphi(x)$. Tzn., že lze z vazby explicitně vyjádřit jednu proměnnou. Po dosazení do funkce *f* dostáváme funkci jedné proměnné. Lokální extrémy této funkce jsou pak vázanými extrémy funkce f při vazbě $g(x,y)=0$. Této metodě se říká *přímé dosazení* a spočívá tedy v převedení úlohy vázaného extrému funkce dvou proměnných na úlohu určení lokálního extrému funkce jedné proměnné.

   Audio 1.6 Přímá metoda hledání vázaných extrémů

2. Zmíněnou metodu není vhodné použít tehdy, pokud z podmínky $g(x,y)=0$ nelze žádnou proměnnou vyjádřit (nebo je toto vyjádření složité). V této situaci použijeme tzv. *Lagrangeovu metodu neurčitých koeficientů*.

   Postup:

   a) Vytvoříme Lagrangeovu funkci $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$

   b) Určíme parciální derivace funkce L podle proměnných x, y

   c) Sestavíme soustavu rovnic pro zjištění stacionárních bodů

   $$L'_x=0$$
   $$L'_y=0$$
   $$g(x,y)=0$$

   d) Soustavu vyřešíme a podle postačující podmínky pro lokální extrém rozhodneme o tom, zda v nalezených bodech má L lokální extrém.

Poznámka:

Pokud v nějakém ze stacionárních bodů nenastane extrém funkce L, přesto se může stát, že funkce f bude v tomto bodě mít vázaný extrém (ověříme jiným způsobem).

Příklad:

Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = xy - x + y - 1$ za podmínky $x + y = 1$

Řešení:

Z vazební podmínky lze explicitně vyjádřit proměnnou *y*, takže využijeme přímé metody

$y = 1 - x$ dosadíme do předpisu funkce a dostaneme funkci jedné proměnné

$f(x) = x(1-x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x$ … hledáme lokální extrém funkce 1 proměnné

$D_f = R$

najdeme stacionární body: $f'(x) = -2x - 1 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

rozdělíme definiční obor na intervaly a budeme zjišťovat monotónnost na jednotlivých intervalech

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right): f'(-1) = -2\cdot(-1) - 1 = 1 > 0 \Rightarrow \text{na } \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \text{ je funkce rostoucí}$$

$$\left(-\frac{1}{2},\infty\right): f'(0) = -2\cdot 0 - 1 = -1 < 0 \Rightarrow \text{na } \left(-\frac{1}{2},\infty\right) \text{ je funkce klesající}$$

monotónnost se v bodě $x = -\frac{1}{2}$ mění z rostoucí na klesající $\Rightarrow$ v bodě je lokální maximum

Závěr:

V bodě $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\right)$ má funkce $f(x,y)$ vázané lokální maximum

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] ŠKRÁŠEK J. a kol.: Základy aplikované matematiky I. a II. SNTL, Praha, 1986.

[2] DOBROVSKÁ V., VRBICKÝ J..: Diferenciální počet funkcí více proměnných - Matematika IIb. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0656-8

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Obyčejné diferenciální rovnice

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Rovnice 1. řádu

Separovatelné diferenciální rovnice

MOTIVACE:

Diferenciální rovnice jsou velmi důležitou částí matematické analýzy, protože umožňují řešit mimo jiné celou řadu úloh z fyziky a technické praxe. Postup při řešení praktických problémů spočívá v sestavení diferenciální rovnice (ze známých vlastností problému), vyřešení rovnice a následného převedení nalezeného řešení zpět do praxe. V podobě diferenciálních rovnic lze formulovat velkou spoustu vědeckých problémů, a tak se diferenciální rovnice objevují snad ve všech vědeckých oborech. Největší zastoupení mají v matematice a fyzice. Lze se však s nimi také setkat např. v chemii, sociologii, ekologii atd. Ve fyzice (mechanice, aplikované mechanice, termodynamice, ...) jsou ve formě diferenciálních rovnic formulovány většiny fyzikálních zákonů. Tyto rovnice nejčastěji popisují závislost fyzikálních veličin na čase. Hlavním představitelem těchto rovnic ve fyzice (mechanice) jsou rovnice pohybové, které popisují pohyb těles pod vlivem vzájemných a vnějších sil, např. se jedná o Hamiltonovy rovnice či Lagrangeovy rovnice.

CÍL:

Chápat pojem obyčejná diferenciální rovnice a pochopit rozdíl mezi jednotlivými typy řešení. Umět řešit separovatelné diferenciální rovnice.

1.1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Za *obyčejnou diferenciální rovnici* n-tého řádu označujeme rovnici

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,,$$

v níž je neznámou funkce y a daná rovnice obsahuje derivace do řádu n neznámé funkce jedné nezávislé proměnné. Jinak řečeno, diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi funkcí jedné proměnné a jejími derivacemi.

Audio 1.1 Diferenciální rovnice

Řádem diferenciální rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace (my se budeme věnovat diferenciálním rovnicím 1. a 2. řádu - obsahují y', případně y'').

1.2 ROVNICE 1. ŘÁDU

Jedná se o diferenciální rovnici

$$y' = F(x, y)\,,$$

kde $F(x, y)$ je funkce dvou proměnných.

Definice: Řekneme, že funkce φ, která je definovaná na intervalu (a,b), je *řešením* diferenciální rovnice $y' = F(x, y)$ na (a,b), pokud ve všech bodech (a,b) má derivaci $\varphi'(x)$ a pro $\forall x \in (a,b)$ platí:

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))\,.$$

Poznámka:

Řešením nazveme každou funkci, která vyhovuje dané rovnici.

Definice: *Cauchyovou úlohou* (počáteční úloha) pro diferenciální rovnici $y' = F(x, y)$ označujeme úlohu

$$\begin{cases} y' & = & F(x, y), \\ y(x_0) & = & y_0. \end{cases}$$

Jejím řešením je řešení φ, které splňuje počáteční podmínku $\varphi(x_0) = y_0$.

1.2.1 Řešení diferenciálních rovnic dělíme do tří typů

1. *Obecné řešení* rovnice 1. řádu tvoří každá funkce tvaru $y = \varphi(x, C)$, která splňuje rovnici pro libovolnou konstantu C. Obecné řešení tedy vždy obsahuje integrační konstantu.

2. *Partikulární řešení* (částečné) získáme přiřazením konkrétní hodnoty integrační konstantě v obecném řešení. Tzn. obecné řešení je souhrnem všech partikulárních řešení.

3. *Singulární řešení* (výjimečné) nelze získat z obecného. Vzniká jen u některých typů diferenciálních rovnic v průběhu jejich řešení.

Audio 1.2 Typy řešení diferenciální rovnice

Graf funkce, která je řešením dané diferenciální rovnice, se nazývá *integrální křivka* dané diferenciální rovnice.

Nejjednodušší typ diferenciální rovnice 1. řádu můžeme napsat ve tvaru:

$$y' = f(x),$$

což vede k hledání primitivní funkce. Dokážeme-li nalézt k funkci $f(x)$ funkci primitivní, dokážeme také vyřešit tuto diferenciální rovnici.

Pak:

$$y = \int f(x)dx\,.$$

Konstanta je zahrnuta v integrálu. Z toho je zřejmé, že hledaná funkce není jednoznačně určena, ale že diferenciální rovnice má řešení nekonečně mnoho.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici $y'(y-x) = (y-x)\sin x$

Řešení:

Rovnici můžeme vydělit výrazem $(y-x)$, za předpokladu $y \neq x$, a dostáváme

$y' = \sin x \;\Rightarrow\; y = \int \sin x dx \;\Rightarrow\; y = -\cos x + c$ … obecné řešení

Ještě musíme ověřit, zda $y = x$ není také řešením. Dosadíme do rovnice:

$$1(x-x) = (x-x)\sin x$$
$$0 = 0$$

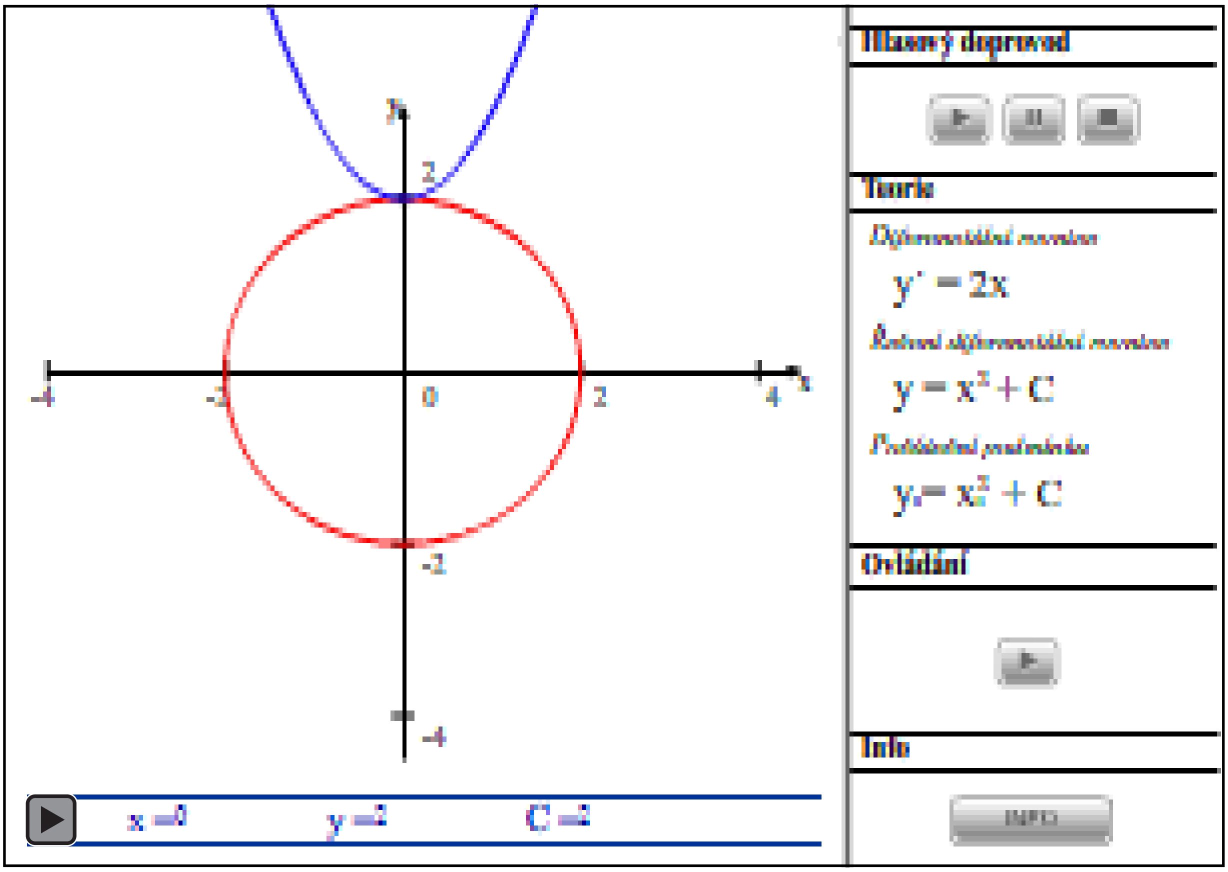
$$\Rightarrow\; y = x \text{ je singulární řešení}$$

Poznámka:

Rovnice $y' = 2x$ má obecné řešení $y = x^2 + C$, kdežto $y = x^2$, $y = x^2 - 4$ atd. jsou její partikulární řešení. Integrální křivky této diferenciální rovnice jsou paraboly rovnoběžně posunuté ve směru osy y.

Jelikož za C můžeme zvolit libovolné reálné číslo, můžeme na hledanou funkci klást další požadavek - zvolit počáteční podmínku. Chceme například, aby hledaná integrální křivka $y = x^2 + C$ procházela předem zvoleným bodem $A = [-1{,}5]$. Pak $5 = (-1)^2 + C \;\Rightarrow\; C = 4$, takže rovnice hledané křivky bude $y = x^2 + 4$.

V animaci si ukážeme závislost řešení diferenciální rovnice na počáteční podmínce. Budeme postupně volit body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = 4$ a vykreslovat řešení rovnice $y' = 2x$ procházející daným bodem. V každém bodě tudíž známe směr, kudy řešení vede.



1.3 SEPAROVATELNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Definice: Diferenciální rovnice tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0$$

se nazývá *separovaná* diferenciální rovnice.

Rovnice, která není separovaná, ale lze na ni převést se nazývá *separovatelná*:

$M(x)N(y) + R(x)S(y)y' = 0$. Za předpokladu, že $N(y) \neq 0,\ R(x) \neq 0$, převádíme rovnici na tvar $\dfrac{M(x)}{R(x)} + \dfrac{S(y)}{N(y)}y' = 0$ a tato rovnice je již separovaná (musíme zase zkontrolovat možná singulární řešení).

Poznámka:

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je tedy rovnice, ve které jde její pravá strana napsat jako součin funkce proměnné x a funkce proměnné y: $y' = f(x)g(y)$.

Např.: $y' = x^3(1-y)$ je separovatelná, ale rovnice $y' = x^3 - y$ není

Audio 1.3 Separovatelná diferenciální rovnice

<u>Postup řešení:</u>

1. derivaci y' přepíšeme jako podíl $\frac{dy}{dx}$ a dostáváme: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
2. získanou rovnost vynásobíme symbolem dx a vydělíme výrazem $g(y)$, tím převedeme na jednu stranu výrazy s jednou proměnnou a na druhou stranu výrazy s druhou proměnnou, tzn., že proměnné jsou separovány (odděleny) a můžeme psát:
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
3. integrujeme obě strany rovnice a po výpočtu integrálů budeme na jedné straně uvažovat integrační konstantu, tím obdržíme obecné řešení rovnice:
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$
4. pokud $g(y) = 0$, pak $\frac{dy}{dx} = 0$, tj. $y = konst.$ a dostáváme tzv. singulární řešení.

1.3.1 Úprava obecného řešení

Vypočítané obecné řešení někdy upravujeme, hlavně v případech, když integrací vznikla na levé straně logaritmická funkce. V tomto případě převedeme i pravou stranu na logaritmickou funkci užitím vztahu

$$A = \ln \mathrm{e}^{A}.$$

Předpokládejme, že obecné řešení nějaké diferenciální rovnice má tvar:

$$\ln m(y) = n(x) + C.$$

Na pravé straně zavedeme logaritmickou funkci

$$\ln m(y) = \ln \mathrm{e}^{n(x)+C},$$

$$\ln m(y) = \ln(\mathrm{e}^{n(x)}\mathrm{e}^{C}).$$

Z rovnosti logaritmů plyne

$$m(y) = e^{n(x)} e^{C}.$$

Označíme $e^{C} = C_1$, pak

$$m(y) = C_1 e^{n(x)}.$$

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici

a) $y' - y = 0$

b) $xyy' = \dfrac{1 - x^2}{y^2 + 1}$

Řešení:

a) $y' - y = 0$

osamostatníme na levé straně y'

$y' = y$, dostali jsme na pravé straně součin funkce proměnné x a y $\Rightarrow$ jedná se o separovatelnou rovnici

y' nahradíme podílem diferenciálů $\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = y$, upravíme na tvar $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, vydělíme y, pokud $y \neq 0$, a vynásobíme dx

$$\frac{dy}{y} = dx$$

integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + c$$

a dostáváme obecné řešení

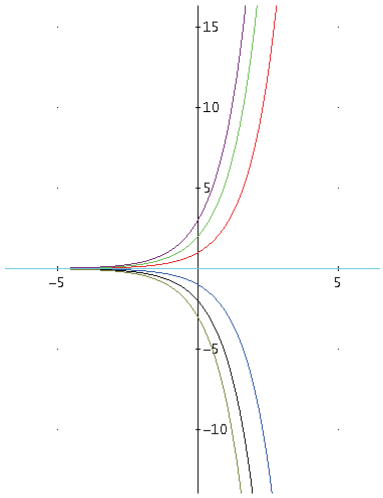
$$\ln|y| = x + c$$

jelikož nám na levé straně vznikla logaritmická funkce, řešení upravíme

$$\ln|y| = \ln e^{x+c}$$

$$\ln|y| = \ln(e^{x} \cdot C)$$

$$y = Ce^{x} \ \ldots \text{ obecné řešení}$$



řešení rovnice $y' - y = 0$ pro $C = -3,-2,-1,1,2,3$ a singulární řešení $y = 0$

b) $xyy' = \dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

$$y' = \frac{1-x^2}{xy\left(y^2+1\right)} \text{ za předpokladu } x, y \neq 0$$

$$y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y\left(y^2+1\right)} \ \ldots \text{ separovatelná}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y\left(y^2+1\right)}$$

$$y\left(y^2+1\right)dy = \frac{1-x^2}{x}dx \ \ldots \text{ separovaná}$$

$$\int \left(y^3+y\right)dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c \ \ldots \text{ obecné řešení}$$

Příklad:

Najděte křivku procházející počátkem soustavy souřadnic, pro kterou směrnice tečny v každém jejím bodě je rovna $2x+1$.

Řešení:

Směrnice tečny je derivace funkce y'

$$\Rightarrow y' = 2x + 1$$

$$y = \int (2x+1)dx$$

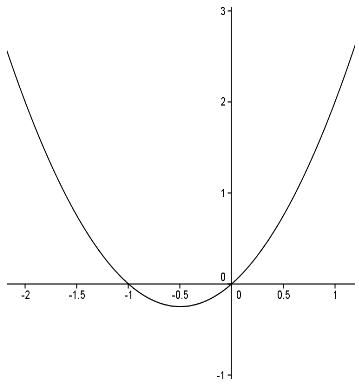
$$y = x^2 + x + c \ \ldots \text{ obecné řešení}$$

hledáme řešení procházející počátkem soustavy souřadnic $[0,0]$, tj. partikulární řešení

bod $[0,0]$ dosadíme do obecného řešení

$$0 = 0^2 + 0 + c \Rightarrow \ c = 0$$

hledaná křivka má rovnici: $y = x^2 + x$, jedná se o parabolu s vrcholem o souřadnicích $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, viz. obr.



2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Diferenciální rovnice

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Homogenní diferenciální rovnice

Exaktní diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

MOTIVACE:

Ukážeme si postup při řešení dalších typů diferenciálních rovnic 1. řádu. Budeme se věnovat exaktním rovnicím, které hrají významnou roli v aplikacích ve fyzice a lineárním rovnicím, které patří v praktických úlohách k nejčastějším.

CÍL:

Umět řešit diferenciální rovnice 1. řádu.

1.1 HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Homogenní diferenciální rovnice je rovnice tvaru:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

kde F je spojitá funkce.

Příklad:

Rozhodněte, zda se jedná o homogenní DR

a) $2xyy' = 3y^2 + x^2$

b) $2xyy' = 3y^2x^2$

Řešení:

a) osamostatníme derivaci a upravíme:

$$y' = \frac{3y^2 + x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{3y}{2x} + \frac{x}{2y}$$ … jedná se o homogenní diferenciální rovnici

b) po úpravě:

$$y' = \frac{3y^2x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{3yx}{2}$$ … nejedná se o homogenní diferenciální rovnici, jde o separovatelnou rovnici

Poznámka:

Po úpravě se tedy v rovnici mohou proměnné x, y vyskytovat výhradně ve zlomku $\left(\frac{y}{x}\right)^k$, kde $k \in Z - \{0\}$, tzn., nesmí v ní být samostatně.

Při řešení homogenní diferenciální rovnice použijeme substituci a tím převedeme rovnici na rovnici se separovanými proměnnými.

Audio 1.1 Homogenní diferenciální rovnice

Postup řešení:

1. zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, tj. za y a y' dosazujeme:

$$y = xz, \quad y' = z + xz'$$

2. po dosazení a úpravě dostáváme separovatelnou pro neznámou z:

$$z + xz' = F(z) \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(F(z) - z)$$

3. separovatelnou rovnici vyřešíme a po vyřešení dosadíme zpět za $z = \frac{y}{x}$.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici $x + y - (x - y)y' = 0$.

Řešení:

Určíme typ diferenciální rovnice - osamostatníme derivaci a upravíme:

$$x + y - (x - y)y' = 0$$
$$(x - y)y' = x + y$$

platí: $x \neq y$ (pokud $x = y$, nejednalo by se o DR)

$y' = \frac{x + y}{x - y}$ … vidíme, že jsme na pravé straně nedostali součin funkcí proměnné *x* a *y*, tzn., není separovatelná, zkusíme upravit na funkci proměnné $\frac{y}{x}$

$$y' = \frac{x\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{y}{x}\right)} \Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \text{ … homogenní diferenciální rovnice}$$

zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}, y' = z + xz'$

$$z + xz' = \frac{1 + z}{1 - z} \text{ … separovatelná diferenciální rovnice}$$

$$xz' = \frac{1 + z}{1 - z} - z$$

$$xz' = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z}$$

$z' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + z^2}{1 - z}$ za podmínky $1 - z \neq 0$ (je zaručeno z $x \neq y$) vydělíme $\frac{1 + z^2}{1 - z}$

$$\frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \frac{dx}{x} \text{ … separovaná DR}$$

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z}{1+z^2}dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arctan z - \frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| = \ln|x| + c$$

vrátíme substituci:

$$\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + c \ \dots \text{ obecné řešení homogenní DR}$$

1.2 EXAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Definice: Nechť $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou funkce mající spojité parciální derivace. Řekneme, že diferenciální rovnice

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

je *exaktní*, pokud výraz

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce dvou proměnných.

Poznámka:

1) Rovnice je tedy exaktní právě tehdy, pokud existuje funkce $F(x,y)$ s vlastnostmi

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ a } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

2) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je diferenciálem nějaké funkce, právě když platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

3) Výraz

$$\partial F(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

se nazývá diferenciál funkce $F(x,y)$ a funkce $F(x,y)$ se nazývá kmenová funkce tohoto diferenciálu.

Věta (řešení exaktní rovnice):

Je-li $F(x,y)$ kmenová funkce diferenciálu $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, má rovnice $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ obecné řešení implicitně určené rovnicí

$$F(x,y)=C\,,\; C\in R.$$

Postup řešení:

1. Rovnici přepíšeme do tvaru $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$
2. Ověříme, že se jedná o exaktní rovnici pomocí: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$
3. Nalezneme kmenovou funkci. Integrací $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$ vzhledem k x dostaneme:

   $$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y),$$

   C(y) je integrační konstanta - tato konstanta nezávisí na *x*, obecně se však může jednat o veličinu, která závisí na *y*
4. Obdrženou rovnost derivujeme podle *y*

   $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+C'(y)$$

5. Na levou stranu (z $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$) dosadíme $Q(x,y)$ a zjednodušíme výraz na pravé straně. Obdržíme rovnici pro $C'(y)$, kterou vyřešíme a integrací nalezneme funkci $C(y)$.
6. Získanou $C(y)$ dosadíme do $F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$ a máme kmenovou funkci $F(x,y)$ a tím i implicitně zadané řešení původní rovnice.

Poznámka:

Můžeme postupovat i modifikovaným způsobem, kdy nejprve integrujeme $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$. Další kroky také modifikujeme.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici $\left(1-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=0$.

Řešení:

po úpravě $y' = -x - \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x}$ vidíme, že se nejedná ani o separovatelnou ani homogenní DR, ověříme, zda se jedná o exaktní DR

označme: $P(x,y) = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

a ověřme typ, musí platit $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$:

$-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ … rovnost je splněna, jedná se o exaktní DR

hledáme kmenovou funkci $F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$

$$\int\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = x - \arctan\frac{x}{y} \Rightarrow F(x,y) = x - \arctan\frac{x}{y} + C(y)$$

rovnost derivujeme podle y a s využitím $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ dostáváme:

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = c$$

řešení (konstantu můžeme zanedbat - konstanta minus konstanta je stále konstanta):

$$x - \arctan\frac{x}{y} = C$$

Poznámka:

Druhý způsob, jak nalézt kmenovou funkci spočívá v tom, že vypočteme oba členy $\int P(x,y)dx$, $\int Q(x,y)dy$ a kmenovou funkci vytvoříme sloučením těchto veličin, kde členy, které se vyskytují současně v obou výrazech, bereme pouze jedenkrát.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnici $(2x-3)y' + 3x^2 + 2y = 0$.

Řešení:

$$y' = -\frac{3x^2+2y}{2x-3}$$ … nejde ani o separovatelnou ani o homogenní DR

rovnici upravíme do vhodnějšího tvaru: $(2x-3)dy+(3x^2+2y)dx=0$

$$P=3x^2+2y\,,\ Q=2x-3$$

ověříme, zda platí $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$: $2=2$ ... jedná se o exaktní rovnici

$$\int P dx = x^3+2xy$$

$$\int Q dy = 2xy-3y$$

do kmenové funkce zapíšeme získané členy, ale stejný člen $2xy$ pouze jednou a hledané řešení tedy je:

$$x^3+2xy-3y=C$$

1.3 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Jsou jedny z nejdůležitějších diferenciálních rovnic 1. řádu a jsou to takové rovnice, které jsou lineární vzhledem k neznámé funkci a její derivaci.

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice 1. řádu je:

$$y'+a(x)y=b(x)\,,$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce v intervalu *I*.

Pokud je v uvažovaném intervalu $b(x)=0$ dostáváme homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu (zkrácený tvar):

$$y'+a(x)y=0,$$

což je rovnice řešitelná separací proměnných.

Poznámka:

Pozor, nezaměňovat název homogenní lineární DR s názvem homogenní DR

Postup řešení homogenní lineární rovnice:

1. z homogenní rovnice: $\frac{dy}{y}=-a(x)dx$
2. integrací dostaneme: $\ln|y|=-\int a(x)dx+\ln C$, kde $C>0$
3. odtud: $\ln|y|=\ln Ce^{-\int a(x)dx} \Rightarrow y=Ce^{-\int a(x)dx}$, což je obecné řešení homogenní lineární rovnice

Poznámka:

Funkce $y=0$ také vyhovuje rovnici $y'+a(x)y=0$, dostaneme ji volbou $C=0$, ale ne integrací

K nalezení řešení nehomogenní rovnice (úplný tvar, s pravou stranou) se užívá tzv. metody variace konstanty:

1. vyřešíme příslušnou homogenní rovnici a najdeme její obecné řešení: $y=Ce^{-\int a(x)dx}$
2. konstantu C nahradíme funkcí $C(x)$, tj. $y=C(x)e^{-\int a(x)dx}$
3. $y=C(x)e^{-\int a(x)dx}$ derivujeme, tzn., vypočítáme $y'=C'(x)e^{-\int a(x)dx}-C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$
4. do původní rovnice $y'+a(x)y=b(x)$ za y dosadíme $y=C(x)e^{-\int a(x)dx}$ a za y' dosadíme $y'=C'(x)e^{-\int a(x)dx}-C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$
5. po úpravě dostaneme: $C'(x)=b(x)e^{\int a(x)dx}$ (členy s $C(x)$ se musí vyrušit)
6. pak $C(x)=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+K$
7. dosadíme nalezenou funkci $C(x)$ zpátky do $y=C(x)e^{-\int a(x)dx}$ a obdržíme obecné řešení dané diferenciální rovnice:

$$y=e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+K\right)$$

Audio 1.2 Lineární diferenciální rovnice

<u>Příklad:</u>

Řešte diferenciální rovnici $y'+y=e^x$.

<u>Řešení:</u>

rovnice má tvar $y'+a(x)y=b(x)$, jedná se tedy o lineární DR

první vyřešíme rovnici ve zkráceném tvaru $y'+y=0$ ... separovatelná rovnice

$$y'=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y| = -x + \ln c$$

$$y = ce^{-x} \text{ … obecné řešení homogenní LDR}$$

aplikujeme metodu variace konstanty - konstantu v řešení homogenní LDR nahradíme funkcí a do původní rovnice $y' + y = e^x$ dosadíme za $y = c(x)e^{-x}$ a za $y' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^x$$

vidíme, že členy s $c(x)$ se opravdu vyruší a dostáváme:

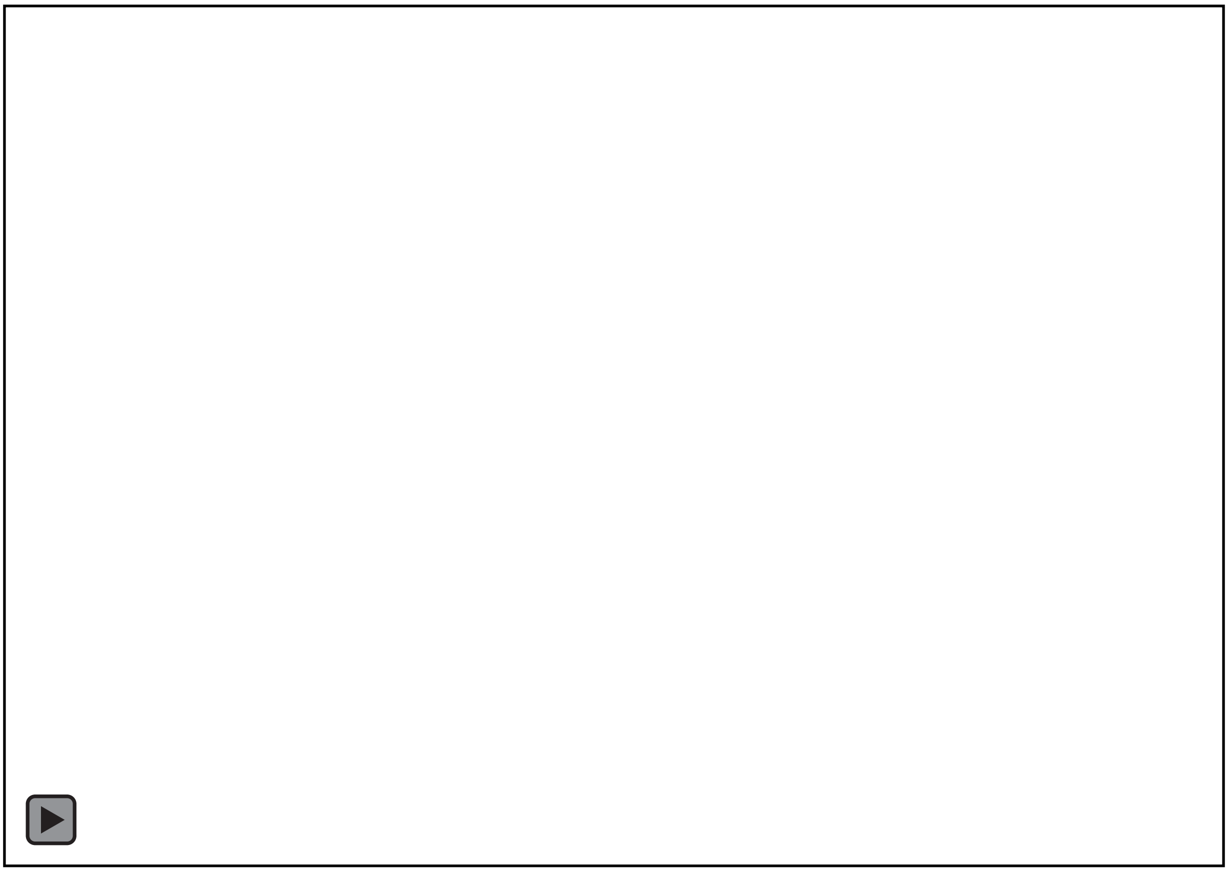
$$c'(x)e^{-x} = e^x \Rightarrow c'(x) = e^{2x}$$

$$c(x) = \int e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} + c$$

dosadíme do $y = c(x)e^{-x}$ a získáme obecné řešení zadané LDR

$$\boxed{y = \left(\tfrac{1}{2}e^{2x} + c\right)e^{-x} = ce^{-x} + \tfrac{1}{2}e^x}$$

Pro lepší pochopení obecného řešení úplné LDR si na následující animaci ukážeme závislost řešení na volbě konstanty *c*. Postupně budeme (animace podle osy *x*) vykreslovat grafy řešení pro $c = -4, -3, \ldots, 3, 4$.



2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Diferenciální rovnice 2. řádu

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Diferenciální rovnice 2. řádu

Nalezení fundamentálního systému řešení zkrácené rovnice

Řešení homogenní lineární DR s konstantními koeficienty

MOTIVACE:

Diferenciální rovnice druhého řádu jsou často využívány v oblasti fyziky pro popis fyzikálních vztahů. Příkladem mohou být pohybové rovnice, které popisují možné pohyby v daném prostředí. V klasické mechanice bude řešení popisovat trajektorii tělesa, v kvantové mechanice je řešením vlnová funkce, atd. Diferenciální rovnice druhého řádu je tedy možno využít při řešení standardních fyzikálních úloh (kmity pružiny, matematické kyvadlo či jednoduché elektrické obvody).

CÍL:

Chápat pojmy zkrácená lineární rovnice, wronskián, fundamentální systém řešení, charakteristická rovnice a umět nalézt tvar obecného řešení zkrácené LDR 2. řádu.

1.1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

Typů diferenciálních rovnic 2. řádu je velmi mnoho, my se budeme zabývat pouze řešením lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty, jelikož v mnoha fyzikálních aplikacích, které popisujeme diferenciálními rovnicemi, jsou parametry (jako hmotnost, hustota,...) brány jako konstanty.

Definice: Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má tvar

$$Ay'' + By' + Cy = D(x),$$

kde $A \neq 0$ a B, C jsou reálné konstanty a funkci $D(x)$ nazveme pravou stranou rovnice.

Audio 1.1 lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Poznámka:

Je- li navíc $D(x) \equiv 0$, jedná se o *homogenní* lineární diferenciální rovnici (zkrácený tvar). Tato rovnice má vždy konstantní řešení $y = 0$, tzv. *triviální*.

Např.:

$3y'' + 2y = 0$ … jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici

$3y'' + 2y = x^2 + 2x$ … jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici

Máme-li dánu rovnici $Ay'' + By' + Cy = D(x)$, pak rovnice, která vznikne nahrazením pravé strany nulovou funkcí (tj. $Ay'' + By' + Cy = 0$) se nazývá homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici $Ay'' + By' + Cy = D(x)$.

Dvojici funkcí $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ nazýváme *fundamentální systém řešení* rovnice $Ay'' + By' + Cy = 0$, pokud y_1, y_2 jsou dvě netriviální lineárně nezávislá řešení dané rovnice. O lineární nezávislosti funkcí rozhodneme pomocí Wronského determinantu (Wronskiánu):

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

pokud $W = 0$, pak jsou $y_1(x), y_2(x)$ lineárně závislé funkce, pokud $W \neq 0$, jsou $y_1(x), y_2(x)$ lineárně nezávislé funkce.

Audio 1.2 Fundamentální systém řešení

Příklad:

Ukažte, že funkce $y_1 = e^{5x}, y_2 = xe^{5x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Řešení:

funkce derivujeme a vypočteme hodnotu Wronskiánu

$$y_1' = 5e^{5x}, y_2' = e^{5x} + 5xe^{5x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{5x} & xe^{5x} \\ 5e^{5x} & e^{5x} + 5xe^{5x} \end{vmatrix} = e^{5x}\left(e^{5x} + 5xe^{5x}\right) - 5xe^{10x} = e^{10x}$$

Protože $e^{10x} \neq 0$ pro každé x, jsou funkce y_1, y_2 lineárně nezávislé a tvoří tedy fundamentální systém řešení dané rovnice.

1.2 ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DR S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Mějme zkrácenou rovnici $Ay'' + By' + Cy = 0$. Ukážeme, že všechna řešení takovéto rovnice dokážeme najít bez použití integrace a dokážeme je vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Do levé strany rovnice dosadíme za $y = e^{rx}$ (hledáme řešení v tomto tvaru), $y' = re^{rx}$ a $y'' = r^2e^{rx}$, kde r je konstanta.

Po úpravě dostáváme: $e^{rx}\left(Ar^2 + Br + C\right) = 0$

Jelikož $e^{rx} \neq 0$,bude platit, že y je řešením, pokud r bude řešením tzv. *charakteristické rovnice* (kvadratická rovnice pro neznámou r)

$$Ar^2 + Br + C = 0.$$

Tuto charakteristickou rovnici odvodíme snadno ze zadání, kde místo y'' dosadíme r^2, místo y' dosadíme r a místo y dosadíme 1.

1.2.1 Nalezení fundamentálního systému řešení zkrácené rovnice

Mějme rovnici $Ay'' + By' + Cy = 0$ a její charakteristickou rovnici $Ar^2 + Br + C = 0$. Řešení zkrácené rovnice závisí na tom, jaké jsou kořeny charakteristické rovnice:

1. Jsou-li $r_1, r_2 \in R\,(r_1 \neq r_2)$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, pak $y_1(x) = e^{r_1x}$ a $y_2(x) = e^{r_2x}$.

2. Je-li $r_1 \in R$ dvojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice, pak $y_1(x) = e^{r_1x}$ a $y_2(x) = xe^{r_1x}$.

3. Jsou- li $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta \notin R$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, pak $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ a $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Potom funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = 0$ a obecné řešení y_0 má tvar:

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \text{ kde } C_1, C_2 \in R.$$

Audio 1.3 Řešení zkrácené LDR

Příklad:

Řešte diferenciální rovnice

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Řešení:

a) napíšeme příslušnou charakteristickou rovnici: $r^2 - 3r + 2 = 0$ a vyřešíme

$r_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$ … řešením jsou 2 různé reálné kořeny

$\Rightarrow\ y_1(x) = e^{1x}$ a $y_2(x) = e^{2x}$

obecné řešení je: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

b) charakteristická rovnice: $r^2 - 4r + 5 = 0$

$r_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-25}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm i$ ... 2 komplexně sdružené kořeny s $\alpha = 2, \beta = 1$

$\Rightarrow\ y_1(x) = e^{2x}\cos x$ a $y_2(x) = e^{2x}\sin x$

obecné řešení je: $y_0 = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$

c) charakteristická rovnice: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$r_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2$ … dvojnásobný reálný kořen

$\Rightarrow\ y_1(x) = e^{2x}$ a $y_2(x) = xe^{2x}$

obecné řešení je: $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II – TEORETICKÝ ZÁKLAD

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

Ing. Petra Schreiberová, Ph.D.

Ostrava 2013

ISBN 978-80-248-3037-7

Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Nehomogenní LDR 2. řádu - Lagrangeova metoda variace konstant

Metoda neurčitých koeficientů

MOTIVACE:

Jelikož se v mnoha technických aplikacích (např. pohybová rovnice hmotného bodu, pohybová rovnice pro harmonické buzení, aplikace v dynamice rotorových soustav,...) setkáváme i s nehomogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu, naučíme se tyto rovnice vyřešit. Ukážeme si dvě metody pro nalezení řešení - obecnou metodu a metodu pro speciální typy rovnic.

CÍL:

Poznat speciální pravou stranu a umět správně napsat odhadovaný tvar řešení k příslušné pravé straně. Dokázat vyřešit nehomogenní lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty s využitím Lagrangeovy metody variace konstant.

1.1 ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DR S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Mějme úplnou rovnici $Ay'' + By' + Cy = D(x)$, tj. $D(x) \neq 0$.

Obecné řešení úplné rovnice má tvar: $y = y_0 + \hat{y}$,

kde y_0 je řešení příslušné zkrácené rovnice a $\hat{y}$ je partikulární řešení úplné rovnice příslušné pravé straně $D(x)$.

Nalézt y_0 umíme, takže zbývá nalézt partikulární řešení.

To je možno pomocí dvou metod:

1. Lagrangeova metoda variace konstant (univerzální metoda použitelná pro každou lineární diferenciální rovnici)
2. metoda neurčitých koeficientů (metoda použitelná pouze v případě speciálního tvaru pravé strany)

Audio 1.1 Metody pro řešení nehomogenních LDR

1.1.1 Metoda neurčitých koeficientů

Pro některé funkce $D(x)$ (tzv. speciální pravé strany) můžeme tvar partikulárního řešení předem odhadnout a následně jednoduše dopočítat. Tvar speciální pravé strany je dán v následující větě.

Věta: Nechť pravá strana lineární DR s konstantními koeficienty má tvar

$$D(x) = e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right],$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s-tého stupně a $a, b \in R$.

Pokud $a + ib$ $(a - ib)$ není kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$\hat{y} = e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right],$$

kde $R(x), S(x)$ jsou (zatím neznámé) mnohočleny nejvýše s-tého stupně.

Poznámka:

1. Obecněji, je-li $a \pm ib$ r-násobným kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál je ve tvaru

$$\hat{y} = x^r e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right].$$

2. je-li pravá strana ve tvaru polynomu $(a = 0, b = 0)$, je třeba vyšetřit, zda charakteristická rovnice nemá kořen 0
3. pokud je na pravé straně exponenciála $(a \neq 0, b = 0, P(x) = 1)$, je nutné vyšetřit, zda existuje kořen a
4. je-li na pravé straně $\cos bx + \sin bx$ $(a = 0, b \neq 0, P(x) = 1, Q(x) = 1)$ je třeba ověřit, zda je kořenem hodnota ib, pokud je na pravé straně pouze jedna z goniometrických funkcí, partikulární řešení musíme hledat ve tvaru obsahujícím obě goniometrické funkce

Například:

speciální pravé strany:

$$\sin x \; (a = 0, b = 1, P(x) = 0, Q(x) = 1),$$

$$\sin x \cdot \frac{x}{e^x} \; (a = -1, b = 1, P(x) = 0, Q(x) = x)$$

nejsou speciální pravé strany:

$\sin x \cdot \cos 3x$ … funkce sinus a kosinus můžeme pouze sčítat

$\ln x$ … nejedná se o polynom, o exponenciální funkci ani o funkci sinus a kosinus

Tvar partikulárního řešení odhadneme podle následující tabulky ($P_n(x)$, $R_n(x)$ a $S_n(x)$ jsou polynomy n-tého stupně: $A_n x^n + ... + A_1 x + A_0$):

$D(x)$	kořen char. rovnice	$\hat{y}$
$P_n(x)$	$r = 0$, k-násobný	$x^k R_n(x)$
	$r \neq 0$	$R_n(x)$
e^{ax}	$r = a$, k-násobný	$Ax^k e^{ax}$
	$r \neq a$	Ae^{ax}
$\cos bx$	$r = \pm ib$	$x(A\cos bx + B\sin bx)$
$\sin bx$	$r \neq \pm ib$	$A\cos bx + B\sin bx$
$e^{ax} P_n(x)\cos bx$	$r = a \pm ib$	$xe^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx]$
$e^{ax} P_n(x)\sin bx$	$r \neq a \pm ib$	$e^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx]$

Příklad:

Odhadněte pro rovnici $y'' + 5y' = D(x)$ tvar partikulárního řešení:

a) $D(x) = 5x^2$,

b) $D(x) = \sin 5x$,

c) $D(x) = 3e^{5x}$,

d) $D(x) = 3e^{-5x}$

Řešení:

Potřebujeme najít řešení charakteristické rovnice: $r^2 + 5r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -5$

a) $D(x) = 5x^2$ … polynom druhého stupně $\Rightarrow$ i partikulární řešení musí být polynom stupně dva: $\hat{y} = Ax^2 + Bx + C$

musíme zkontrolovat, zda není řešením charakteristické rovnice 0: $r_1 = 0 \Rightarrow$ polynom musíme vynásobit x

partikulární řešení má tvar: $\hat{y} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$

b) $D(x) = \sin 5x$ … funkce sinus a kořeny charakteristické rovnice jsou reálná čísla (tzn. $\pm 5i$ není kořenem)

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = A\cos 5x + B\sin 5x$

c) $D(x) = 3e^{5x}$ … exponenciální funkce $\Rightarrow$ i partikulární řešení musí být exponenciální funkce se stejným argumentem, 5 není kořen

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = Ae^{5x}$

d) $D(x) = 3e^{-5x}$ … exponenciální funkce $\Rightarrow$ -5 je jednoduchý kořen

tvar partikulárního řešení: $\hat{y} = Axe^{5x}$

Nalezení obecného řešení

Po správném určení tvaru partikulárního řešení zbývá dopočítat neznámé koeficienty polynomů $R(x), S(x)$.

1. předpokládaný tvar řešení a jeho první a druhou derivaci dosadíme za y, y', y'' do původní (úplné) rovnice

2. dostaneme jednu rovnici pro neznámé koeficienty polynomů $R(x), S(x)$ a tu řešíme známou metodou neurčitých koeficientů, která spočívá v porovnání koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých funkcí na obou stranách rovnice - dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme

Poznámka:

Metodu neurčitých koeficientů lze použít i v případě, kdy pravá strana je rovna součtům speciálních pravých stran, např. $D(x) = (x+2)e^{7x} + \cos x$.

Příklad:

Řešte diferenciální rovnice

a) $y'' + 4y = -2$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' + 4y = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$D(x) = -2$ … polynom stupně 0 a 0 není kořenem $\Rightarrow$ $\hat{y} = A$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení: $\hat{y}' = 0$, $\hat{y}'' = 0$ a dosadíme do původní rovnice $y'' + 4y = -2$ a nalezneme koeficient A

$$0 + 4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

dosadíme do $\hat{y} = A$ a dostáváme partikulární řešení: $\hat{y} = -\frac{1}{2}$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2}}$$

b) $y'' + 2y' = 8\cos 4x$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' + 2y' = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -2$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-2x}$

$$D(x) = 8\cos 4x \text{ ... } \pm 4i \text{ není kořen } \Rightarrow \hat{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení:

$$\hat{y}' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x,$$

$$\hat{y}'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

dosadíme do původní rovnice $y'' + 2y' = 8\cos 4x$

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + 2(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) = 8\cos 4x$$

a nalezneme koeficienty A, B porovnáním koeficientů u příslušných funkcí a vyřešením soustavy

$$\cos 4x:\ -16A + 8B = 8$$

$$\sin 4x:\ -16B - 8A = 0 \Rightarrow A = -2B$$

dosadíme do první rovnice: $32B + 8B = 8 \Rightarrow 40B = 8 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$ a $A = -\frac{2}{5}$

dosadíme do $\hat{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$ a dostáváme partikulární řešení:

$$\hat{y} = -\frac{2}{5}\cos 4x + \frac{1}{5}\sin 4x$$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\cos 4x + \frac{1}{5}\sin 4x}$$

c) $y'' - y = (x+1)e^x$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' - y = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$D(x) = (x+1)e^x$ … jedná se o speciální pravou stranu (tvar $e^{ax}P_n(x)\sin bx$) - polynom stupně jedna krát exponenciální funkce s argumentem x, vidíme, že 1 je kořen

$$\Rightarrow\ \hat{y} = x\cdot(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení:

$$\hat{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + B)e^x = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B),$$

$$\hat{y}'' = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(2Ax + 2A + B)$$

dosadíme do původní rovnice $y'' - y = (x+1)e^x$

$$e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(2Ax + 2A + B) - (Ax^2 + Bx)e^x = (x+1)e^x$$

$$e^x(4Ax + 2A + 2B) = (x+1)e^x$$

$$4Ax + 2A + 2B = x + 1$$

a nalezneme koeficienty A, B porovnáním koeficientů u příslušných funkcí a vyřešením soustavy

$$x:\ 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x^0:\ 2A + 2B = 1 \Rightarrow 2B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

dostáváme partikulární řešení:

$$\hat{y} = \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^x$$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = y_0 + \hat{y}$:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^x}{4}(x^2 + x)}$$

1.1.2 Lagrangeova metoda variace konstant

Princip metody je analogický řešení lineární diferenciální rovnice I. řádu.

Mějme nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru

$$y'' + By' + Cy = D(x),$$

kde $B, C \in R$.

Víme, že obecné řešení zkrácené rovnice má tvar

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

přičemž $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém řešení.

Využijeme metody variace konstant.

Hledané obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

kde $C_1(x), C_2(x)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce.

Podobným postupem jako u rovnic prvního řádu (který je ale komplikovanější) dostaneme:

nechť funkce $C_1(x), C_2(x)$ splňují soustavu

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$$
$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=D(x),$$

pak funkce y je obecným řešením.

Při řešení soustavy využijeme Wronskiánu $\left(W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right)$ a Cramerova pravidla:

$$C_1'(x)=\frac{W_1}{W}\text{, kde } W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix} \text{ a } C_2'(x)=\frac{W_2}{W}\text{, kde } W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & D(x) \end{vmatrix}.$$

Příklad:

Řešte diferenciální rovnice

a) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y''+3y'+2y=0$

charakteristická rovnice: $r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-2$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$D(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ … nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi: $y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x}$

stačí určit funkce $C_1(x), C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-2e^{-3x}+e^{-3x}=-e^{-3x}$$

nalezení $C_1(x)$:

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ D(x) & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-\frac{e^{-2x}}{1+e^x}$$

$$C_1'(x)=\frac{W_1}{W}=-\frac{e^{-2x}}{(1+e^x)(-e^{-3x})}=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln\left|1+e^x\right| + c_1$$

nalezení $C_2(x)$:

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & D(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{1}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

$$C_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^x\right)\left(-e^{-3x}\right)} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \ldots = \ln\left|1+e^x\right| - 1 - e^x + c_2$$

obecné řešení získáme dosazením $C_1(x), C_2(x)$ do $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$:

$$y = \left(\ln\left|1+e^x\right| + c_1\right)e^{-x} + \left(\ln\left|1+e^x\right| - 1 - e^x + c_2\right)e^{-2x}$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln\left|1+e^x\right| + e^{-2x}\left(\ln\left|1+e^x\right| - 1 - e^x\right)$$

b) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

Řešení:

najdeme řešení příslušné zkrácené rovnice: $y'' + y = 0$

charakteristická rovnice: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

obecné řešení homogenní rovnice: $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$D(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ … nejedná se o speciální pravou stranu, budeme řešit variací konstant

v řešení homogenní rovnice nahradíme konstanty funkcemi: $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

stačí určit funkce $C_1(x), C_2(x)$

sestavíme a vypočteme wronskián:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

nalezení $C_1(x)$:

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\cos^3 x} & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$C_1'(x)=-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\frac{1}{2\cos^2 x}+c_1$$

nalezení $C_2(x)$:

$$W_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos^3 x}\end{vmatrix}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C_2'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C_2(x)=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c_2$$

obecné řešení získáme dosazením $C_1(x), C_2(x)$ do $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$:

$$y=\left(-\frac{1}{2\cos^2 x}+c_1\right)\cos x+\left(\tan x+c_2\right)\sin x$$

$$\boxed{y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos x}}$$

2 POUŽITÁ LITERATURA

[1] VLČEK J., VRBICKÝ J.: Diferenciální rovnice - Matematika IV. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-438-5

[2] KALAS J., RÁB M.: Obyčejné diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, 2. vyd, Brno, 2001, ISBN 80-210-2589-1

[3] VRBENSKÁ H.: Základy matematiky pro bakaláře II. Skriptum VŠB-TU, Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-545-4

[4] elektronický učební text: www.studopory.vsb.cz