



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

Název: DYNAMIKA
Autor: Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.
Vydání: první, 2013
Počet stran: 190
Náklad: 5
Jazyková korektura: nebyla provedena.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tyto studijní materiály vznikly za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.



Název: Modernizace výukových materiálů a didaktických metod
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/15.0463
Realizace: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD
CZ.1.07/2.2.00/15.0463



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Úvodní předpoklady

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY	3
1.1	Úvodní předpoklady	4
1.1.1	Další zjednodušující předpoklady	5
1.2	Kinematika a Dynamika bodu.....	5
1.2.1	Kinematika bodu.....	6
1.3	Příklady k procvičení	9
1.3.1	Rovnoměrný pohyb po přímce:	10
1.3.2	Rovnoměrně zrychlený pohyb bodu po přímce.....	12
1.3.3	Příklady na brzdění auta před přechodem pro chodce	13
1.3.4	Nerovnoměrný pohyb po přímce	16
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	19



1 ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Úvodní předpoklady

Kinematika a dynamika bodu.

Kinematika bodu.

Pohyb bodu po přímce poloha rychlosť zrychlení.

Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb bodu.

Příklady k procvičení



MOTIVACE:

Chcete-li popsat jak se auto, raketa či atom hýbe je dobré pro popis pohybu používat definované veličiny. Pro popis pohybu se používají poloha, rychlosť, zrychlení a čas. Tyto veličiny pak hrají dále významnou roli i ve vztahu k příčinám pohybu.



CÍL:

Základní kinematické veličiny a vztahy mezi nimi.

Zvláštní případy pohybu-rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb.



1.1 ÚVODNÍ PŘEDPOKLADY

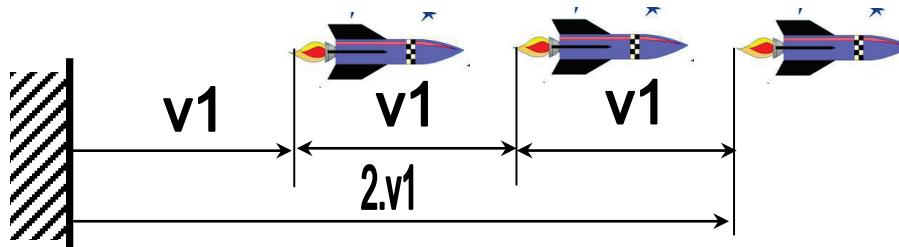
Pohyby všech věcí ve vesmíru, strojů, automobilů, planet, molekul, atomů, hvězd i galaxií, se řídí určitými zákony pohybu. Tyto zákony se snažili postupně odhalovat lidé jako Aristoteles, Galileo Galilei, Isaac Newton, Albert Einstein a John Archibald Wheeler, který se zabýval kvantovou mechanikou.

Důvodem nebylo trápení studentů u zkoušek, ale to, aby šlo předpovědět budoucí chování věcí aut, strojů, planet.... .

Dobrý zákon by měl nejen vysvětlit všechny jevy, z nichž vychází, ale také předpovědět něco do budoucna. V mechanice je kritériem platnosti zákona experiment. Jestliže nějaký zákon je experimentem vyvrácen, přestává být zákonem, ale často je dál možno původní zákon používat pro určité rozmezí podmínek.

Příklad

Představte si tři raketu, pohybující se po jedné přímce konstantními rychlostmi. První raketa se vůči místu startu pohybuje rychlostí v_1 , druhá vůči první také rychlostí v_1 a třetí vůči druhé také rychlostí v_1 . Třetí raketa se vůči místu startu pohybuje rychlostí dvojnásobnou $v_3=2.v_1$. Určete rychlosti všech raket vůči místu startu.



Zdá se, že úloha nemá řešení, ale existují nejméně dvě řešení. První řešení je takové, že rychlosti všech raket jsou nulové a říká se mu triviální řešení. Druhé řešení vychází ze speciální teorie relativity a relativistického sčítání rychlostí u a v , kde v našem příkladu $u=v$.

$$\text{výsledná rychlos} = \frac{u+v}{1+\frac{u \cdot v}{c \cdot c}}$$

Výsledky:

Rychlos první rakety vůči místu startu je $u_01=1,342 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (0,447 c)

Rychlos druhé rakety vůči místu startu je $u_02=2,236 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (0,745 c)

Rychlos třetí rakety vůči místu startu je $u_03=2,683 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (0,894 c)

Kde c je rychlos světla ve vaku $c=299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$

Ještě komplikovanější by bylo, kdybychom uvažovali se zakřivením prostoru.

V tomto materiálu se vychází z předpokladů klasické Newtonovské fyziky. Rychlosti, pro které má smysl uvažovat s relativistickými jevy, jsou ve srovnání s běžnými rychlostmi věcí, které nás obklopují, velmi malé. Předcházející příklad by měl tedy jen triviální řešení.



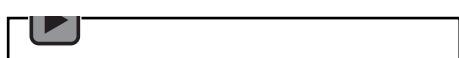
Pro součet dvou rychlostí $v=u=3000000 \text{ m.s}^{-1}$ je odchylka mezi běžným sčítáním rychlostí a sčítáním relativistickým cca 0,02%, pro rychlosti 300000 m.s^{-1} je tato odchylka 0,0002%. Pro nižší rychlosti ji lze zanedbat.

Další zjednodušující předpoklady:

- 1) Trajektorii každého bodu, což je místo ve kterém se bod nachází v každém čase, lze přesně popsat vůči nehybnému tzv. základnímu prostoru. V kvantové mechanice by byly s trajektorií potíže.
- 2) Prostor, ve kterém bude pohyb popisován je Euklidovský, to znamená takový, který odpovídá běžným školním představám a není zakřiven. Přesnou definici Euklidovského prostoru naleznete v učebnicích matematiky či geometrie.
- 3) Čas je nezávislý na věcech a událostech a okolnostech. Základní jednotkou času je sekunda. Další používané jednotky jsou minuty, hodiny, dny roky.
- 4) Vazby mezi tělesy si nepamatují předchozí stav a nejsou jeho funkcí, takovým vazbám se říká skleronomní vazby.



Audio 1.1 Další zjednodušující předpoklady



1.1.1 Další zjednodušující předpoklady

- 1) Trajektorii každého bodu, což je místo ve kterém se bod nachází v každém čase, lze přesně popsat vůči nehybnému tzv. základnímu prostoru. V kvantové mechanice by byly s trajektorií potíže.
- 2) Prostor, ve kterém bude pohyb popisován je Euklidovský, to znamená takový, který odpovídá běžným školním představám a není zakřiven. Přesnou definici Euklidovského prostoru naleznete v učebnicích matematiky či geometrie.
- 3) Čas je nezávislý na věcech a událostech a okolnostech. Základní jednotkou času je sekunda. Další používané jednotky jsou minuty, hodiny, dny roky.
- 4) Vazby mezi tělesy si nepamatují předchozí stav a nejsou jeho funkcí, takovým vazbám se říká skleronomní vazby.

Tyto předpoklady mají určitá omezení, ale při rychlostech, velikostech objektů a vzdálenostech, se kterými se budeme setkávat je jejich použití oprávněné.

Dynamiku rozdělíme na dvě části kinematiku, která popisuje pohyb bodu bez ohledu na to co je příčinou pohybu a vlastní dynamiku, která se zajímá o příčiny pohybu. V první části budou uvedeny vztahy pro výpočet kinematiky bodu a pak dynamiky bodu. Pro pohyby těles bude vždy nejprve probrána kinematika příslušného typu pohybu a pak jeho dynamika, to platí i pro dynamiku soustav těles čili mechanismy. Další kapitoly v tomto materiálu se věnují rázu, lineárnímu kmitání a pohybu těles s proměnnou hmotností.

1.2 KINEMATIKA A DYNAMIKA BODU

Z hlediska matematiky bod patří k takzvaným základním pojmem, které se nedefinují podobně jako množina, přímka, pomocí těchto základních pojmu a axiomů se pak definuje vše ostatní.

Dle **Euklida** je **bod** něco, co nemá části, tedy to co již nelze dále dělit.

Za hmotný bod nadále budeme považovat cokoliv, u čeho nás z vlastností zajímají pouze hmotnost a poloha v daném čase, ostatní vlastnosti jsou pro řešenou úlohu nepodstatné. To



znamená, že za hmotný bod můžeme považovat i různá tělesa například elektron, atom, automobil, lod', Zeměkouli, vždy podle charakteru toho o co, a s jakou přesností se zajímáme.

Z hlediska dynamiky jsou pro hmotný bod významné v daném čase pouze hmotnost, poloha, rychlosť a zrychlení.

Jakmile budeme znát zákony pohybu hmotného bodu, bude možné přejít formulaci zákonů pohybu těles, protože každé těleso si můžeme představit jako soubor velkého, často nekonečného, množství bodů.

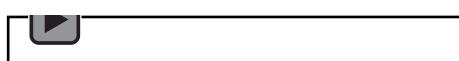
1.2.1 Kinematika bodu

1.2.1.1 Pohyb bodu po přímce, poloha rychlosť, zrychlení

Kinematika je část mechaniky, která se snaží popsat pohyb, to znamená, jak se něco hýbe, bez ohledu na příčiny pohybu, tedy proč se to hýbe. Pro popis pohybu bodu je zapotřebí o něm vědět kde a kdy se nachází a jakou má v daném okamžiku rychlosť a zrychlení.

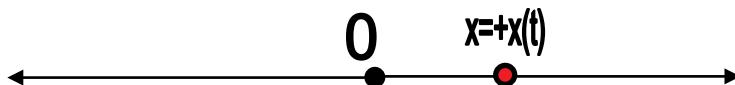


Audio 1.2 Pohyb bodu po přímce



Nejjednodušším případem **trajektorie**, to je množinou všech poloh bodu, v nichž se může v různých časových okamžicích bod nacházet, je přímka.

Nachází-li se bod na přímce, pak pro popis jeho polohy potřebujeme jedinou souřadnicí - vzdálenost od daného počátečního bodu, kterou lze označit například x nebo $x(t)$, což vyjadřuje závislost na čase t . Pro určení $x(t)$ vyznačíme na přímce nulovou polohu a jeden směr považujeme za kladný.



Poloha bodu se mění v čase, což vyjadřuje zápis $x=x(t)$. Dalšími veličinami kromě času a polohy popisujícími pohyb jsou dráha, rychlosť, zrychlení a případně ryv.

Dráha s je délka trajektorie mezi dvěma časy t_2 a t_1 , v případě pohybu po přímce $s=x(t_2)-x(t_1)$. Dráha se udává nejčastěji v metrech. Dalšími používanými jednotkami dráhy jsou násobky metru, mm, km atd. V anglicky mluvících zemích se můžeme stále velmi často setkat s jednotkami jako palec, stopa, yard a míle. Pro velké vzdálenosti se používají jednotky jako astronomická jednotka, což je průměrná vzdálenost Země od Slunce a doby, za které světlo ve vakuu urazí danou vzdálenost, například světelné minuty, hodiny, dny, roky; případně parseky či megaparseky (Mpc). Existuje a stále se používá ještě mnoho dalších jednotek, ale základní jednotkou SI jsou jen metry. Jestliže používáme při výpočtech základní jednotky je výsledek rovněž v základních jednotkách. Pro jiné jednotky je třeba znát vztahy pro přepočet jednotek.

Okamžitá Rychlosť v:

Představte si, že se Usain Bolt rozbíhá v závodě na sto metrů při světovém rekordu 9,58 s na MS v Berlíně. Snadno lze vypočítat průměrnou rychlosť vydelením celkové dráhy časem $v=10,44 \text{ m.s}^{-1}$ ($37,58 \text{ km.h}^{-1}$), ale touto rychlosťí neběžel celou dobou. Chceme-li určit rychlosť v prvních deseti metrech jeho běhu, vydělíme tuto dráhu časem, za který ji uběhl, podobně určíme rychlosť, kterou uběhl například druhý metr dráhy, či posledních 10 cm. Pokud



budeme dráhu a tedy i rozdíl času Δt zmenšovat až k nule dostaneme okamžitou rychlosť v čase t , což lze vyjádřit následující limitou.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$

Tato limita je ovšem definicí derivace

Derivace podle času, **a jen podle času**, se často označují tečkou nad derivovanou veličinou.

Okamžitá rychlosť je tedy derivací polohy podle času.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$



Audio 1.3 Okamžitá rychlosť.



Pro zajímavost Boltova maximální rychlosť těsně před cílem byla $12,42 \text{ m.s}^{-1}$ ($44,72 \text{ km.h}^{-1}$).

Jednotky rychlosťi: Základní jednotkou rychlosťi je metr za sekundu [m.s^{-1}]. Dalšími často používanými jednotkami jsou kilometry či míle za hodinu [km.h^{-1} ; mile.h^{-1}]. U anglických jednotek se často uvádí rychlosť pomocí zkratky s per-p například míle za hodinu miles per hour se značí mph. V letecké se často používají násobky rychlosťi zvuku zvané Machovo číslo Ma. Velmi vysoké rychlosťi se často uvádějí jako poměr k rychlosći světla ve vakuu, viz příklad z úvodu se třemi raketami.

Zrychlení a:

Rychlosť se také může v průběhu pohybu měnit velmi podobnou úvahou lze dospět k definici zrychlení. Obvykle se značí **a** z anglického acceleration.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)$$

Jednotky zrychlení: Základní jednotkou zrychlení je metr za sekundu na druhou [m.s^{-2}]. Často se také setkáte s násobky tříhového zrychlení G. $1G=1.g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$.



Audio 1.4 Okamžité zrychlení.



Okamžité zrychlení je tedy derivací rychlosťi podle času.

Ryv j: Změnu zrychlení vyjadřuje veličina zvaná **ryv**. Požadavky na určitý průběh ryvu jsou například při provozu osobních výtahů. Obvykle se značí **j** z anglického jerk – cukat, trhat sebou. Pokud je Vám ve výtahu špatně je to v důsledku ryvu.

$$\vec{j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \dot{\vec{a}}(t)$$

Základní jednotkou ryvu je metr za sekundu na třetí [m.s^{-3}]. V tomto materiálu se s ním dále setkávat nebude.



Kombinace vztahů mezi polohou, rychlostí, zrychlením a časem.

Stává se, že neznámé časovou závislost mezi jednotlivými veličinami, ale například víme, že při pohybu ve vzduchu je zrychlení úměrné druhé mocnině rychlosti. Je proto vhodné vyjádřit i další vztah mezi rychlostí, polohou a zrychlením. Všechny kinematické vztahy pohybu bodu po přímce lze vyjádřit následujícími rovnicemi.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t)$$

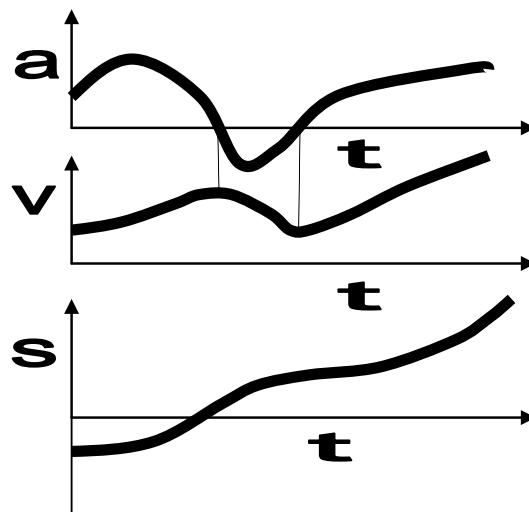
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Vyloučením času z předchozích rovnic dostaneme následující vztah mezi zrychlením, rychlostí a polohou

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)}$$

$a(t)$	Zrychlení bodu v čase t	$[m.s^{-2}]$
$v(t)$	Rychlosť bodu v čase t	$[m.s^{-1}]$
$x(t)$	Poloha bodu v čase t	$[m.]$
t	Čas t	$[s]$

Uvedené vztahy úplně popisují pohyb bodu po přímce. Znalosti je třeba doplnit znalostí integrálního a diferenciálního počtu. Často je užitečné nakreslit si grafy časových průběhů daných veličin. Při využití znalostí diferenciálního a integrálního počtu lze určovat i maxima a minima jednotlivých veličin.



1.2.1.2 Rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený pohyb bodu

Předchozí vztahy jsou obecnými vztahy mezi polohou, rychlostí a zrychlením a časem pro pohyb po přímce. V případě, že některá z předchozích veličin je konstantní pak se předcházející vztahy zjednoduší. Například padá-li těžké břemeno na Zemi v blízkost povrchu Země a odpor vzduchu je zanedbatelný lze zrychlení považovat za konstantní a tento pohyb nazýváme rovnoměrně zrychlený. Podobně například vlak po rozjetí už ani nezrychluje, ani



nezpomaluje, to znamená, že jeho zrychlení a je nulové tento pohyb nazýváme rovnoměrný. Počáteční rychlosť lze označit jako v_0 , a počáteční polohu jako x_0 .

Rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$a = \text{konst.}$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

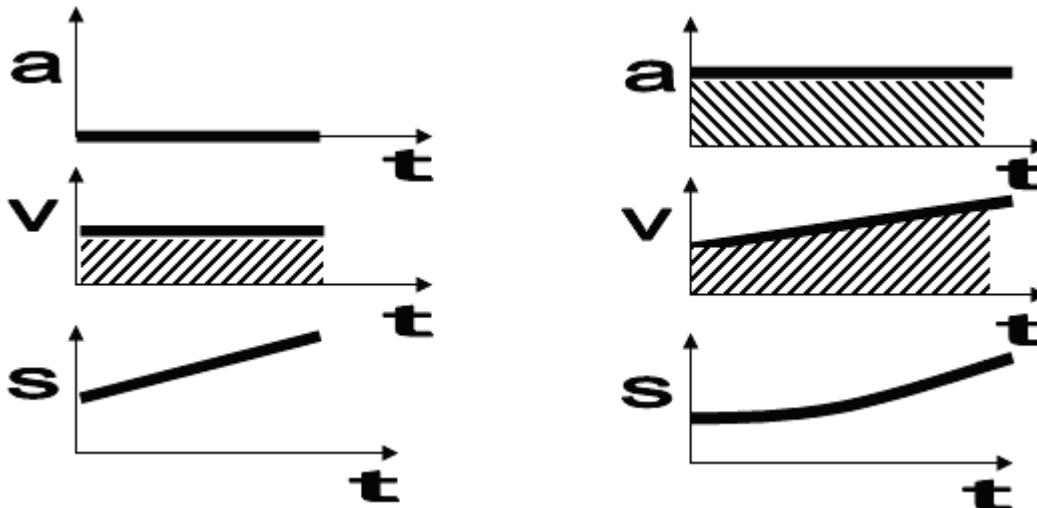
$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Rovnoměrný pohyb:

$$a = 0$$

$$v = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

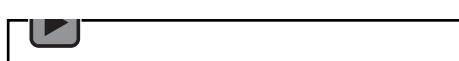


Na obrázku jsou znázorněny časové průběhy rychlostí a zrychlení pro rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb.

Všimněte si, že plocha v grafu rychlosti odpovídá přírůstku dráhy, protože velikost integrálu je rovna obsahu ploch pod křivkou.



Audio 1.5 Plocha v grafu.



Mnoho příkladů, především pro rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb lze s výhodou vypočítat, jestliže využijete předchozí znalosti. Nezapomeňte, že rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb jsou **jen zvláštními případy pohybu**. U pohybů, kde se mění rychlosť či zrychlení tyto vztahy většinou nelze použít a je nutno počítat pomocí obecných vztahů.

Velmi důležité je odhadnout co lze ve kterém případě zanedbat, co zjednodušit a jaké vztahy pro který případ použít. Při řešení úloh je nutno kromě znalostí kinematiky nutno také zapojit logické myšlení.

1.3 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Někdy je v příkladech nadbytek informací a je na nás abychom vybrali ty, které potřebujeme.



1.3.1 Rovnoměrný pohyb po přímce:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0$$

1.3.1.1 Příklad 1



Při mistrovském závodě 27. 5. 2006, který byl součástí Českého poháru v běhu do vrchu, na trati Ostravice-Lysá hora a zpět se utkali bězci Jan Havlíček ASK Slavia Praha a Miroslav Vítěk TJ Jiskra Ústí nad Orlicí. Havlíček měl strategii běžet do kopce poměrně rychle konstantní rychlostí $v_{11}=10\text{ km.h}^{-1}$ a dolů pak opatrněji konstantní rychlostí $v_{12}=20\text{ km.h}^{-1}$, zatímco Vítěk při běhu do kopce mírně šetřil síly a běžel konstantní rychlostí $v_{21}=9\text{ km.h}^{-1}$. Určete jakou rychlosť v_{22} musí běžet Vítěk dolů, aby doběhli do cíle oba ve stejný čas.

Řešení:

Je třeba si uvědomit, že dráha směrem nahoru sn je přesně stejná jako dráha směrem dolů sd. Čas Havlíčka směrem nahoru si označíme t_{11} a dolů t_{12} , podobně u Vítka t_{21} a t_{22} . Jedná se o rovnoměrný pohyb. Rovnost drah nahoru a dolů lze vyjádřit:

$$\begin{aligned} sn &= sd \\ v_{1,1} \cdot t_{1,1} &= v_{1,2} \cdot t_{1,2} \end{aligned}$$

Dráhy obou běžců jsou stejné:

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,1} \cdot t_{2,1}$$

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,2} \cdot t_{2,2}$$

Mají-li doběhnout současně, musí platit, že součet jejich časů se sobě rovná:

$$t_{1,1} + t_{1,2} = t_{2,1} + t_{2,2}$$

Zdá se, že ve čtyřech rovnicích je pět neznámých t_{11} , t_{12} , t_{21} , t_{22} a v_{22} . Nás, ale časy nezajímají a stačí nám jejich poměr. Možný postup řešení je, že z poslední rovnice vyjádříme čas t_{22} pomocí času t_{11} a známých rychlostí.

$$t_{2,2} = t_{1,1} + t_{1,2} - t_{2,1}$$

$$t_{1,2} = t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}}$$

$$t_{2,1} = t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}}$$



$$t_{2,2} = t_{1,1} + t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}} - t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}}$$

Dosadíme do druhé rovnice pro stejné dráhy obou běžců. Časy $t_{1,1}$, se zkrátí a rychlosť $v_{2,2}$ lze vypočítat z následující rovnice.

$$v_{1,1} \cdot t_{1,1} = v_{2,2} \cdot \left(t_{1,1} + t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}} - t_{1,1} \cdot \frac{v_{1,1}}{v_{2,1}} \right)$$

Pokud si dopředu uvědomíme, že na dráze ani na čase nezáleží, lze tento příklad řešit úvahou tak, že si libovolnou dráhu zvolíme například sn=sd=180 km. Rychlosť $v_{2,2}$ vypočteme snadno následující úvahou. Víme, že nahoru by první běžec běžel 18 h a dolů 9 h, celkem tedy 27 h. Druhý nahoru 20 h a na cestu dolů mu zbývá 7 h. Pak jeho rychlosť je 180 km děleno 7 h. (*Vzdálenost Ostravice vrchol Lysé hory je 8,5 km*)

Výsledek: $v_{2,2}=7,14 \text{ m.s}^{-1}$ (25,7 km.h⁻¹).

1.3.1.2 Příklad 2



Lanovka na Pustevnách je v současnosti (rok 2010) 1637 m dlouhá a má převýšení 400 m. Ráztoka má nadmořskou výšku 620 m. n. m., Pustevny 1020 m. n. m.. Za hodinu přepraví 900 osob na dvojsedačkách, na dráze se nachází 162 dvojsedaček to znamená, že 81 dvojsedaček jede v daném okamžiku jedním směrem. Lyžař jede kolem lanovky konstantní rychlosť tak, že potká 100 sedaček v protisměru. Určete rychlosť lyžaře.

Výsledek: $v=10,77 \text{ m.s}^{-1}$.

1.3.1.3 Příklad 3

Letadlo letí ve směru Praha-Ostrava, po přistání se téměř okamžitě vrací zpět, a doba, kterou strávilo letadlo na letišti je zanedbatelná. V průběhu prvního letu tam a zpět vane západní vítr ve směru od Prahy do Ostravy rychlosť v_V , rychlosť letadla vůči větru je v_L . V průběhu druhého letu vane severní vítr kolmo na směr letu. Letadlo při druhém letu musí letět mírně šikmo proti větru, tak aby jeho výsledný pohyb byl ve směru Praha-Ostrava. Rychlosť větru je vždy menší než rychlosť letadla.

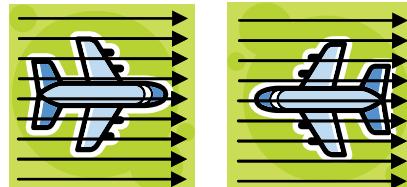
Určete:

- 1) Poměr doby letu t_1 a t_2 Praha-Ostrava-Praha letu při prvném a druhém letu.

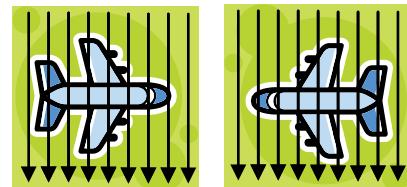


- 2) Určete konkrétní doby letu pro rychlosť větru $v_V = 80 \text{ km.h}^{-1}$; cestovní rychlosť letadla typu Saab SF340A/340B je $v_L = 480 \text{ km.h}^{-1}$. Vzdálenost mezi Prahou a Ostravou je $L = 350 \text{ km}$.

1. Let:



2. Let:



Výsledky:

Poměr doby letu je:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{vL}{\sqrt{vL^2 - vV^2}}$$

Případně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{vV^2}{vL^2}}}$$

Pro zadané rychlosti letadla a větru je čas prvního letu Praha-Ostrava-Praha **t1=5400 s (90 min)** a čas druhého letu **t2=5324 s (88,74 min)**.

Poznámka: Příklad je obdobou *Morley-Michelsonova pokusu, kde snaha o vysvětlení výsledku pokusu dala impuls ke vzniku teorie relativity*.

1.3.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb bodu po přímce

$$a = \text{konst}$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

1.3.2.1 Příklad 1

Automobil projede kolem policejní hlídky konstantní rychlosť $v = 72 \text{ km/h}$ a jede dále touto rychlosťí. Policejná hlídka po 1 sekundě vyrazí za ním tak, že její automobil se pohybuje s konstantním zrychlením $a = 3 \text{ m.s}^{-2}$.

Určete:



- 1) Za jak dlouho od projetí kolem hlídky policie automobil dostihne.
- 2) Jakou rychlosť vp bude mít policejní automobil v tomto okamžiku.
- 3) Jakou dráhu s urazí před dosižením automobilu.

Nakreslete grafy závislostí rychlosťí na čase.

Řešení:

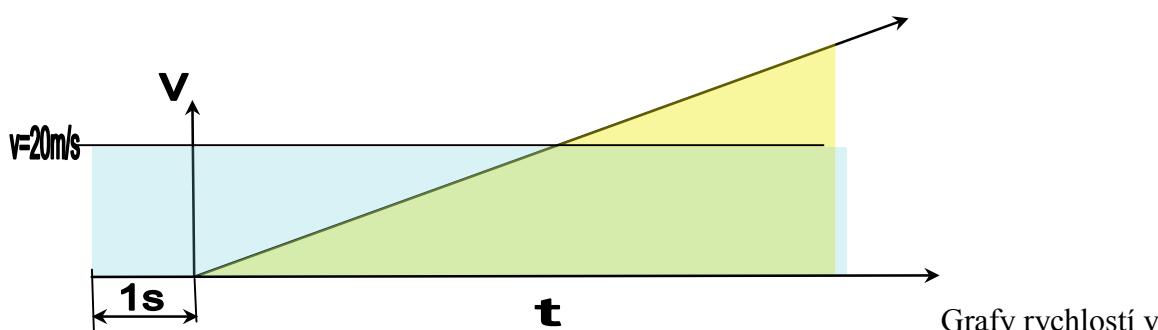
Jedná se o kombinaci rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu a při dosižení musí si být obě dráhy rovny. Počáteční rychlosť hlídky v_0 je nulová. Získáme kvadratickou rovnici pro čas.

$$v \cdot (t + 1 \cdot s) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Pro zjištění rychlosťi a dráhy se jedná jen o dosazení do vztahů.

$$\begin{aligned} vp &= a \cdot t + v_0 \\ sp &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \end{aligned}$$

Grafy rychlosťí v závislosti na čase.



závislosti na čase lze použít tak, že hledáme v jakém čase se sobě rovnají obsahy obdélníka, jehož jedna strana odpovídá konstantní rychlosťi automobilu a druhá neznámému času t zvětšenému o 1 s, a trojúhelníka, jehož jedna strana je odpovídá součinu zrychlení a času $a \cdot t$ a druhá času t . Po výpočtu následuje zkouška nejčastěji dosazením do původních rovnic.

Výsledky:

- 1) $t=15,27$ s
- 2) $vp=42,8$ m/s
- 3) $s=305,4$ m

1.3.3 Příklady na brzdění auta před přechodem pro chodce

Brzdění, se skládá z několika fází:

Reakční doby řidiče na podnět.

Reakční doby brzd to je náběh brzdového systému a doba prodlevy brzd.

Samotné brzdné dráhy.

Pro **reakční dobu dobrého řidiče**, který není pod vlivem alkoholu nebo drog či není jeho schopnost snížena poslechem rádia, telefonováním či věkem, a prodlevu brzd se počítá v součtu **1 sec**. Po tuto dobu jedeme a nic se neděje s rychlosťí jízdy. Zrakem zjistíme, že se



děje něco, co je v rozporu s běžnou situací, tedy nebezpečí, mozek to vyhodnotí jako nebezpečné a vydá svalům příkaz reagovat, noha povolí pedál plynu, přesune se na brzdu a zmáčkne pedál a brzdy začnou zabírat.

Na brzdnou dráhu má také vliv stav vozovky, její povrch, pneumatiky a další činitelé. Je také rozdíl, jedeme-li s osobním autem, s nákladním či s motocyklem.

Důležitý je koeficient tření mezi vozovkou a koly. Koeficienty jsou uvedeny v tabulce a platí pro běžnou pneumatiku v dobrém stavu. Současné drážkované pneumatiky (uvažuje se o zákazu používání) **FORMULE 1** mají součinitel tření na dobrém podkladu cca **f= 2,0**. Také reakční doby řidiče a brzd je u formule výrazně kratší i **0,3 s**.

Vozovka	Suchá	Mokrá	
		čistá	znečištěná
Typ Vozovky	Koeficient tření f		
rozehřátý asfalt (živičná výroba)	0,9	0,8	0,6
beton nový zdrsněný	0,7	0,65	0,55
dlažba žulová	0,5	0,35	0,25
zasněžená vozovka, kola s řetězy	0,55	0,25	0,1
zasněžená vozovka (zimní pneu)	0,45	0,1	0,1
vozovka zledovatělá, kola s řetězy	0,35	0,15	0,15
vozovka zledovatělá, kola bez řetězů (zimní pneu)	0,15	0,05	0,05
bláto	-	-	0,3

Maximální možné zrychlení či zpomalení je na vodorovné cestě rovno tříhovému zrychlení vynásobenému koeficientem tření $a_{max}=g \cdot f$. Toto maximální možné zrychlení není dáno stavem brzd, ale jen a jen stavem cesty a pneumatik.

1.3.3.1 Příklad 2

V obci jede na suché asfaltové vozovce Formule 1 (formule jede po takové cestě jen pro potřeby tohoto příkladu) a auto vybavené běžnými pneumatikami rychlosť 50 km.h^{-1} . Určete, jak daleko přechodem musí začít auta brzdit, aby stačila zastavit. Údaje vyhledejte v tabulce a v textu nadní.

Výsledky: formule 9,08 m; auto 24,8 m.

1.3.3.2 Příklad 3

Řidič osobního auta s běžnými pneumatikami jede po suché asfaltové vozovce a při rychlosti $v=50 \text{ km/h}$ by zastavil, viz předchozí příklad. Určete, jakou rychlosť přijede k přechodu, pojede-li rychlosť a) 60 km/h b) rychlosť 70 km.h^{-1} .

Výsledky:

- a) $41,7 \text{ km.h}^{-1} = 11,6 \text{ m.s}^{-1}$
- b) $60,6 \text{ km.h}^{-1} = 16,8 \text{ m.s}^{-1}$ (velký rozdíl).



1.3.3.3 Příklad 4

Jede-li řidič osobního auta rychlostí 50 km.h^{-1} a na suché asfaltové vozovce by zastavil před přechodem. Určete, jakou rychlosť dojede k přechodu, jestliže začne brzdit ve stejně vzdálenosti jako v prvním případě, a vzdálenost ve které by musel začít brzdit, aby před přechodem zastavil, je-li vozovka:

- Ze žulových kostek a po dešti (celkem čistá).
- Suchá a zledovatělá.
- Mokrá a zledovatělá-čistý led.

Pozn. Zkuste si tyto vzdálenosti určit pro různé rychlosti.

výsledky:

- $10,9 \text{ m.s}^{-1} = 39,1 \text{ km.h}^{-1}; 42,0 \text{ m}$
- $12,7 \text{ m.s}^{-1} = 45,6 \text{ km.h}^{-1}; 79,5 \text{ m}$
- $13,5 \text{ m.s}^{-1} = 48,6 \text{ km.h}^{-1} 210,6 \text{ m}$

1.3.3.4 Příklad 5

Kámen padá do propasti a za čas $T=2,5 \text{ s}$ uslyšíme zvuk dopadu. Určete hloubku propasti. (fyzikální konstanty $g=9.81 \text{ m.s}^{-2}$, rychlosť zvuku $c=330 \text{ m.s}^{-1}$). Odpor vzduchu zanedbejte.

Výsledek $H=28,56 \text{ m}$.

Uvažujte pro jakou přesnost je možno zanedbat zpětný odraz zvuku a ve spojení s příklady v další části, určete, jak zanedbání odporu vzduchu ovlivní přesnost.

1.3.3.5 Příklad 6



"Vběhl jsem do strojovny, zavřel oči a čekal, co se bude dít," popisuje okamžiky těsně před nárazem do mostu ve Studénce strojvůdce rychlíku Comenius Jiří Šindelář. Ještě před tím ale uvedl do provozu rychlobrzdu, čímž strojvůdce zachránil život mnoha lidem. Vlak začal brzdit a po ujetí **vzdálenosti 452 m** snížil rychlosť ze **134 km.h⁻¹** na **90 km.h⁻¹** a narazil ve Studénce do zříceného mostu, přesto zemřelo 8 lidí z celkem 200, kteří byli ve vlaku. **Předpokládejte, že vlak brzdí rovnoměrně zrychleně (zpomaleně) a zrychlení je pro všechny body v části určete stejné.**

Určete:

Za jaký čas **t1** narazil vlak do mostu?

V jaké vzdálenosti **s2** by musel vlak začít brzdit (zrychlení je stejné), aby do mostu narazil rychlosť **v2=50 km/h**, při které by pravděpodobnost úmrtí či větších zranení by byla mnohem nižší.

Na jaké vzdálenosti **s3** by vlak z původní rychlosti zastavil?

Výsledky:

t1=14,53 s



s₂=708,8 m
s₃=823,5 m

1.3.4 Nerovnoměrný pohyb po přímce

U následujících příkladů je nutno použít diferenciální vztahy a je potřebná znalost integrálního počtu.

1.3.4.1 Příklad 1

Kámen padá do propasti, dopadne a za čas vidíte jeho dopad $T=10$ s. Uvažujte s odporem vzduchu úměrným druhé mocnině rychlosti: $a=g-k\cdot v^2$. Konstantu k určete ze znalosti ustálené rychlosti volného pádu $v_{vp}=250 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Určete rychlosť, se kterou kámen dopadá a hloubku propasti H. Porovnejte tuto rychlosť a dráhu s rychlosťí a dráhou vypočtenými při zanedbání odporu vzduchu. Integrování je trochu obtížnější.

- Zjistěte, pro jaký naměřený čas bude rozdíl mezi drahou vypočtenou bez a se zanedbáním odporu vzduchu menší než 2%.

Řešení:

Nejprve určíme konstantu k z úvahy, že při ustálené rychlosti volného pádu je zrychlení nulové.

$$0 = g - k \cdot v_{vp}^2$$

Pro určení rychlosti dopadu použijeme diferenciální vztah vedoucí na separovatelnou diferenciální rovnici, kterou separujeme a integrujeme.

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ g - k \cdot v^2 &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ dt &= \frac{d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \\ \int_0^T dt &= \int_0^{v_{dopadu}} \frac{d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \end{aligned}$$

Jednou z možností je použít při výpočtu rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{g - k \cdot v^2} = \frac{1}{\sqrt{g + k \cdot v}} + \frac{1}{\sqrt{g - k \cdot v}}$$

Po integraci, která vede na logaritmy, a po dalších úpravách získáme rychlosť dopadu.

$$v_{dopadu} = \frac{1 - e^{2 \cdot T \cdot \sqrt{k \cdot g}}}{-1 - e^{2 \cdot T \cdot \sqrt{k \cdot g}}} \cdot v_{vp}$$

Pro určení dráhy je vhodné použít postupně následující vztahy.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)} \\ g - k \cdot v^2 &= \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{d\vec{x}(t)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d\vec{x}(t) &= \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \\ H &= -\frac{1}{2k} \cdot \ln \left(\frac{-g + k \cdot v_{dopadu}^2}{-g} \right) \\ \int_0^H d\vec{x}(t) &= \int_0^{v_{dopadu}} \frac{\vec{v}(t) \cdot d\vec{v}(t)}{g - k \cdot v^2} \end{aligned}$$

U rychlostí bez uvažování s odporem vzduchu se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g a jeho řešení je jednoduché.

výsledky:

s uvažováním odporu vzduchu
bez zahrnutí odporu vzduchu

$$v_{dopadu} = 61,67 \text{ m.s}^{-1}; H = 381,9 \text{ m}$$

$$v_{dopadu} = 98,06 \text{ m.s}^{-1}; H = 490,3 \text{ m.}$$

1.3.4.2 Příklad 2



Jessika chce kvůli pojistce zabít kočku tak, že ji vyhodí z vrcholu budovy Empire State Building. Tato budova má 102 pater a 448 m. Výšky pater považujte za stejné. Kočka se ovšem při pádu chová jinak než kámen, či člověk, a klade vzduchu větší odpor. V první fázi letu je kočka stresovaná, schoulí se do klubíčka, a kdyby letěla tímto způsobem pořád, ustálila by se její rychlosť na 144 km.h^{-1} . Po **třech sekundách** letu se kočka uklidní, roztahne nohy a ocas a začne plachtit podobně jako poletucha. Kdyby takto plachtila pořád, dosáhne ustálené rychlosti volného pádu pouze 72 km.h^{-1} a velmi často se jen lehce zraní. Zrychlení kočky při uvážení odporu vzduchu je přibližně úměrné druhé mocnině rychlosti podle vztahu $a = g \cdot k \cdot v^2$, kde g je tříhové zrychlení a k je konstanta, kterou ze zadaných hodnot dokážeme určit. V tomto případě se jedná o dvě různé konstanty k_1 a k_2 , které se pro obě části letu se liší.

Určete:

- 1) Ze kterého patra má Jessika vypustit kočku, aby na zem dopadla co nejvyšší rychlosť a určete i tuto rychlosť.
- 2) Jakou rychlosťí a za jakou dobu kočka dopadne z vrcholu budovy.
- 3) Zda v případě, že se vše prozradí, bude vyšší trest za pojistný podvod nebo za týrání zvířat. Otázka č. 3 není součástí dynamiky.

Tento příklad pro analytické řešení používá trochu obtížnější integrály vyžadující rozklad na parciální zlomky podobně jako u předchozího příkladu nebo znalost toho jaký integrál vede na funkci hyperbolický tangens.

Výsledky:



Kočku má vyhodit mezi 9. a 10. patrem výška (**40,64 m**) pak dopadne rychlosť

$$v_1=25,05 \text{ m.s}^{-1}; (90,2 \text{ km.h}^{-1}).$$

Rychlosť dopadu z vrcholu budovy bude téměř shodná s ustálenou rychlosťí volného pádu $v_2=20 \text{ m.s}^{-1}$ (72 km.h^{-1}). Doba letu kočky z vrcholu budovy ve druhé fázi bude **T2=20,125 s** Celková doba letu $T+T_2=23,125 \text{ s}$.

1.3.4.3 Příklad 3



Při závodu vozů formule 1 na Hungaroringu udeřila Felipe Massu pružina do hlavy, dále pokračoval v zatáčce rovně a vjel do naskládaných pneumatik. Při nárazu do pneumatik rychlosť v_0 se přední část jeho vozu bořila do bariéry pneumatik. Odpor pneumatik se zvyšoval přibližně úměrně druhé mocnině délky, kterou vůz v bariéře vězel. To znamená, že pro zrychlení platilo $a=-k \cdot x^2$, kde x délka dráhy od nárazu do pneumatik čili délka zaboření se v pneumatikách. Kolik nejvíce metrů se formule do pneumatik zabořila, než se vůz úplně zastavil. $k=30 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_0=180 \text{ km/h}$;

Výsledek H=5 m.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Pohyb bodu v rovině

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	POHYB BODU V ROVINĚ	3
1.1	Pohyb bodu v rovině (dvourozměrný Euklidův prostor E2)	4
1.1.1	Demonstrace souřadných systémů.....	4
1.1.2	Poloha, rychlosť a zrychlení v kartézských souřadnicích.....	4
1.1.3	Rychlosť a zrychlení v polárních souřadnicích.....	4
1.1.4	Zvláštní případy Pohybu bodu v rovině.....	5
1.1.5	Pohyb bodu po kružnici.....	6
1.2	Příklady k procvičení	7
1.2.1	Příklad 1.....	7
1.2.2	Příklad 2.....	8
1.2.3	Pohyb bodu po kružnici.....	8
1.3	Pohyb bodu v prostoru.....	11
1.4	Příklady k procvičení	14
1.4.1	Příklad 1.....	14
1.4.2	Příklad 2 (obtížné).....	14
2	POUŽITÁ LITERATURA	15



1 POHYB BODU V ROVINĚ



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

- Pohyb bodu v rovině.
- Kartézské a polární souřadnice.
- Šikmý vrh.
- Pohyb bodu po kružnici.
- Příklady k procvičení.
- Pohyb bodu v prostoru.
- Kartézské a válcové a sférické souřadnice.
- Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

K popisu pohybu například koule vyhozené koulařem nelze vystačit se vztahy pro pohyb po přímce. Je nutno umět jednoznačně pospat polohu bodu v každém okamžiku. V této části se dozvítíte, jak lze přepočítat kinematické veličiny v jednotlivých souřadných systémech v rovině a v prostoru.



CÍL:

- Pohyb bodu v rovině.
- Šikmý vrh.
- Pohyb bodu po kružnici.
- Pohyb bodu v prostoru.

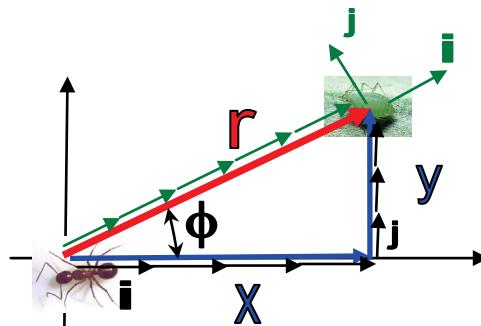
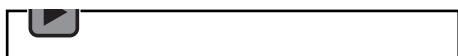


1.1 POHYB BODU V ROVINĚ (DVOUROZMĚRNÝ EUKLIDŮV PROSTOR E2)

Polohu bodu udává polohový vektor. Pro popis polohy bodu v rovině potřebujeme dvě nezávislé souřadnice. Nejčastěji používané systémy jsou kartézský, který tvoří dvě na sebe kolmé souřadnice nejčastěji značené x , y a polární, který udává úhel od nějaké přímky procházející počátkem souřadné soustavy a vzdálenost od tohoto počátku, nejčastěji se značí r a ϕ .



Audio 1.1 Pohyb bodu v rovině.



1.1.1 Demonstrace souřadných systémů

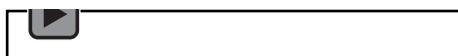
Mravenec se dostane ke mšici tak, že půjde 4 cm ve směru x a 3 cm ve směru y , což představuje kartézský souřadný systém, nebo půjde 5 cm ve směru, který svírá se směrem x úhel $36,87^\circ$ vynášený proti směru hodinových ručiček, což představuje polární souřadný systém. Výsledek je v obou případech takový, že se mravenec dostane ke mšici. Ovšem systémy spíše popisují polohu mšice než cestu mravence.

1.1.2 Poloha, rychlosť a zrychlení v kartézských souřadnicích

Kartézský souřadný systém má tu výhodu, že jednotkové vektory ve složkách x , y , které se nejčastěji označují i a j , nemění ani svou velikost, jež je neustále rovna jedné, ale ani svůj směr a při derivacích se chovají jako konstanty. Dvě tečky nad písmeny znamenají druhou derivaci podle času. Pak lze rychlosť a zrychlení vyjádřit následujícími rovnicemi.



Audio 1.2 Výhoda kartézských souřadnic.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ \vec{v} &= \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} \\ \vec{a} &= \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Protože se jednotkové vektory nemění, často se mluví jen o velikostech složek polohy, rychlosti a zrychlení bodu (x , y , v_x , v_y , a_x , a_y).

1.1.3 Rychlosť a zrychlení v polárních souřadnicích

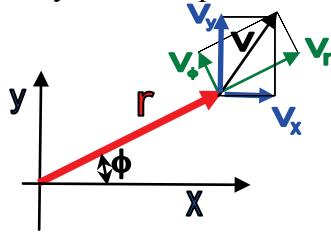
Pro určení velikostí složek rychlostí a zrychlení je možno použít transformační vztahy: $x=r\cos(\phi)$; $y=r\sin(\phi)$, které se pro odvození složek rychlostí v polárním systému derivují podle času. Pamatujte si, že s časem se mění jak vzdálenost r , tak i úhel ϕ .

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cdot \cos(\phi) + r \cdot (-\sin(\phi) \cdot \dot{\phi})$$



$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \dot{\phi}$$

Pokud chceme vypočítat složky rychlosti a zrychlení ve směrech r a ϕ pak je třeba si uvědomit, že složky rychlosti a zrychlení v_r , a_r mají směry r , a složky v_ϕ , a_ϕ jsou na něj kolmé. Odvození velikostí složek rychlostí v polárním systému lze provést na základě znalostí trigonometrie.



$$v_r = v_x \cdot \cos(\phi) + v_y \cdot \sin(\phi)$$

$$v_r = (\dot{r} \cdot \cos(\phi) + r \cdot (-\sin(\phi) \cdot \dot{\phi})) \cdot \cos(\phi) + (\dot{r} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \dot{\phi}) \cdot \sin(\phi)$$

Využijeme-li toho, že $\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2 = 1$ pak dostaneme:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\phi = v_x \cdot \sin(\phi) - v_y \cdot \cos(\phi)$$

Podobně:

$$v_\phi = (\dot{r} \cdot \cos(\phi) + r \cdot (-\sin(\phi) \cdot \dot{\phi})) \cdot \sin(\phi) - (\dot{r} \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi) \cdot \dot{\phi}) \cdot \cos(\phi)$$

$$v_\phi = r \cdot \dot{\phi}$$

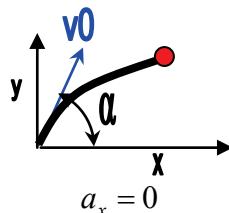
Podobné odvození lze provést pro zrychlení. Toto odvození není náročné na matematiku jen je trochu zdlouhavé.

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2 \quad a_\phi = r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}$$

1.1.4 Zvláštní případy Pohybu bodu v rovině

Šikmý vrh

V případě úloh se šikmým vrhem, v těhovém poli s konstantním těhovým g zrychlením je obvykle vhodné použít kartézský souřadný systém, kde jedna souřadnice má směr g , a většinou opačnou orientaci, a druhá je na něj kolmá. Také bývá výhodné ztotožnit počátek souřadného systému s místem vrhu či výstřelu, pak mají počáteční dráhy x_0 a y_0 nulové hodnoty. Z předchozího lze snadno odvodit následující vztahy mezi polohou rychlostí a zrychlením.



$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

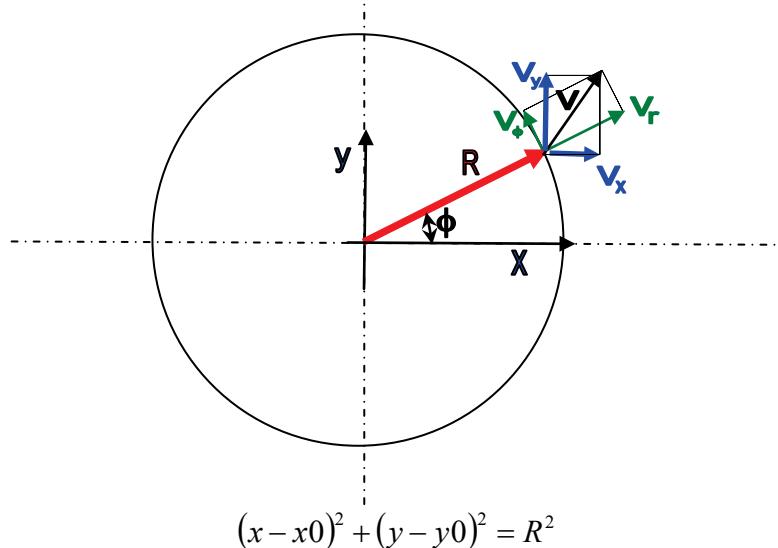
$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + (x_0)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) + (y_0)$$



1.1.5 Pohyb bodu po kružnici

Pohybuje-li se bod po kružnici se středem x_0, y_0 o poloměru R , pak existuje vztah mezi souřadnicemi a tento bod má jen jeden stupeň volnosti, to znamená, že změní-li se jedna souřadnice, pak už je druhá souřadnice dána.



Zde se výhodně použijí polární souřadnice (R, ϕ). Střed kružnice lze posunout do počátku souřadného systému $x_0=0$ a $y_0=0$. Transformační rovnice pak mají následující tvar $x=R.\cos(\phi)$ $y=R.\sin(\phi)$. Pro velikosti jednotlivých kinematických veličin při pohybu bodu po kružnici pak platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega & v_\phi &= R \cdot \dot{\phi} = R \cdot \omega & v_r &= \ddot{R} = 0 \\ \ddot{\phi} &= \dot{\omega} = \varepsilon & a_r &= \ddot{R} - R \cdot \dot{\phi}^2 = -R \cdot \omega^2 & a_\phi &= R \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{R} \cdot \dot{\phi} = R \cdot \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{\omega \cdot d\omega}{d\phi}\end{aligned}$$

Kde poloměr R má konstantní velikost.

Pro tyto veličiny používáme označení ϕ pro úhlovou dráhu, ω pro úhlovou rychlosť (rad.s⁻¹ nebo jen s⁻¹) a ε pro úhlové zrychlení (rad.s⁻² nebo jen s⁻²). Složky zrychlení a_r a a_ϕ jsou totožné se složkami tečného a normálového zrychlení a_t a a_n .

Všimněte si, že vztahy mezi úhlovou dráhou ϕ , úhlovou rychlosť ω , úhlovým zrychlením ε a časem velmi podobné vztahům mezi obdobnými veličinami u přímky.

Pro výpočet velikostí veličin na obvodu lze požít vztahy:

$s=R.\phi$ Dráha na obvodu (úhel je v radiánech).

$v=R.\omega$ Obvodová rychlosť.

$a_t=R.\varepsilon$ Tečné zrychlení.

$a_n = -R \cdot \omega^2$ Normálové, které se také označuje jako dostředivé, zde je směr od středu považován za kladný proto je před výrazem záporné znaménko.

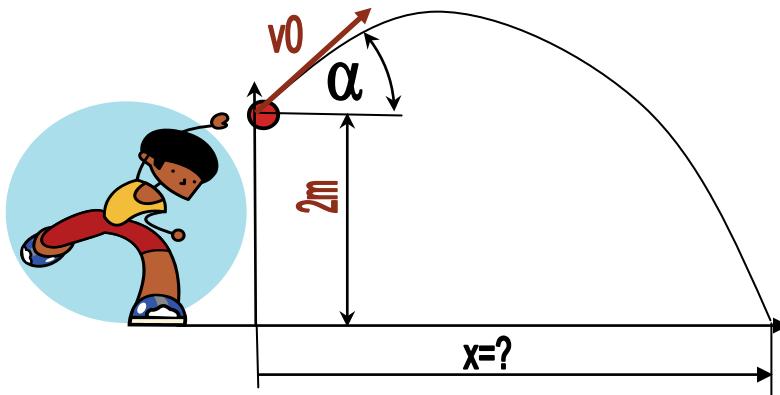


1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.2.1 Příklad 1

Určete maximální vzdálenost, do které doletí koule vržená koulařem ve výšce 2 m nad zemí, počáteční rychlosť $v_0=14,4 \text{ m.s}^{-1}$ a počátečním úhlu $\alpha=45^\circ$. Pasivní odpory lze zanedbat.

- *Pro zájemce:* Určete úhel, při kterém koulař při dané počáteční rychlosti vrhu dohodí nejdále a vzdálenost do které koule dolétne.



Řešení:

Pro místo dopadu platí, že jeho y-ová souřadnice je $y=-2 \text{ m}$, což lze vyjádřit rovnicí.

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot (y_0) \\-2 \text{ m} &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot t^2 + 14,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sin(45^\circ)\end{aligned}$$

Jedná se o kvadratickou rovnici kde neznámou je čas, po jeho výpočtu, pak stačí dosadit vypočtený čas do rovnice pro výpočet x-ové souřadnice. Čas $t=2,257 \text{ s}$.

$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + (x_0)$$

$$x = 14,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 2,257 \text{ s}$$

Určit úhel, pro který koulař dohodí do maximální vzdálenosti, lze dosazením za čas z první rovnice a položením první derivace podle úhlu nule, ale jednodušší cesta je v tomto případě použití numerického řešení.

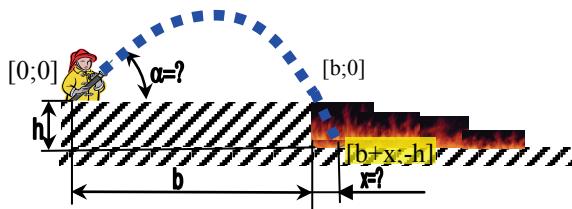
Odpověď: Za daných okolností koulař dohodí do vzdálenosti $x=22,98 \text{ m}$. **Při optimálním úhlu $\alpha_{\text{opt}}=42,52^\circ$ by koulař dohodil do vzdálenosti $x_{\text{opt}}=23,06 \text{ m}$.

Pozn. Světový rekord ve vrhu koulí drží **Randy Barnes (USA)** **23,12 m** ze dne **20. 5. 1990** ve **Westwoodu** (informace je z roku 2010).



1.2.2 Příklad 2

V jámě o hloubce $h=2\text{ m}$ vznikl požár. Hasič se pro žár může přiblížit k okraji jámy na minimální vzdálenost $b=5\text{ m}$. Hasičskou hadicí proudí voda rychlostí $v_0=8\text{ m.s}^{-1}$. Určete pod jakým úhlem $\alpha=?$ má hasič nastavit hadici, aby voda stříkala co nejbližší k okraji jámy a do jaké nejbližší vzdálenosti $x=?$ od kraje jámy voda dopadne. (pasivní odpory zanedbejte).

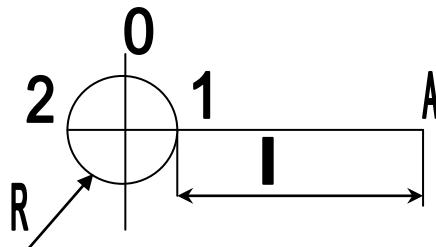


Výsledky:

Hasič má nastavit hadici pod úhlem $\alpha=65^\circ$ a nejbližší vzdálenost do které voda dopadne je $x_{\min}=0,804\text{ m}$.

1.2.3 Pohyb bodu po kružnici

1.2.3.1 Příklad 3



Po kruhové dráze o poloměru $R=1\text{ m}$ se pohybuje bod B rovnoměrně zrychleným pohybem po kružnici. Jeho počáteční poloha je v místě 0. Za čas $T=0,4\text{ s}$ vyrazí bod A ze své počáteční polohy naznačené obrázkem konstantní rychlostí $v_A=1\text{ m.s}^{-1}$. Oba body se setkají v místech 1 a 2. Místo 1 je od počáteční polohy bodu A vzdáleno o délku $l=2\text{ m}$. Určete normálovou a tečnou složku zrychlení bodu B v místech 1 a 2.

Výsledky:

Normálová složka zrychlení v místě jedna má velikost $a_{1n}=5,29\text{ m.s}^{-2}$.

Normálová složka zrychlení v místě dva má velikost $a_{2n}=15,86\text{ m.s}^{-2}$.

Tečné složky zrychlení jsou v místě jedna i dva stejně a mají velikost $a_t=1,68\text{ m.s}^{-2}$.

1.2.3.2 Příklad 4

Soustrojí je poháněno motorem s lineární charakteristikou (závislost hnacího momentu na otáčkách). Při jeho rozběhu pak úhlové zrychlení s narůstajícími otáčkami klesá. Tato závislost je charakterizována úhlovým zrychlením při nulových otáčkách ε_0 a otáčkami ustáleného pohybu nu, při nichž je úhlové zrychlení nulové (nakreslete si graf). Počáteční podmínky jsou nulové. (některé části mají jen numerické řešení).

Určete:

- 1) Časový průběh úhlové rychlosti a úhlu natočení.
- 2) Čas za jaký rotor vykoná 1. otáčku a jeho rychlosť (úhlovou) na konci 1. otáčky.
- 3) Čas kdy uhlová rychlosť dosáhne 95% ustálené a počet otočení do této doby.



- 4) Určete celkové zrychlení bodu na obvodu v tomto okamžiku, je-li poloměr rotoru R=20 mm.

počáteční zrychlení $\varepsilon_0 = 5.1 \text{ rad.s}^{-2}$, ustálené otáčky $\nu = 2350 \text{ ot/min}$

Výsledky:

Časový průběh úhlu natočení a úhlové rychlosti:

$$\phi(t) = \frac{\varepsilon_0}{k^2} (e^{t \cdot k} - t \cdot k - 1)$$

$$\omega(t) = \frac{\varepsilon_0}{k} (e^{t \cdot k} - 1)$$

$$\omega u = 2 \cdot \pi \cdot \nu u$$

$$k = \frac{-\varepsilon_0}{\omega u}$$

Čas za jaký vykoná rotor první otáčku (lze řešit jen numericky) T1=1,578 s.

Čas kdy úhlová rychlosť dosáhne 95% ustálené rychlosťi T95=144,55 s.

Velikosť celkového zrychlenia bodu na obvode a_{celk}=1093 m.s⁻²;

tečná složka a_t=0,0051 m.s⁻² normálová složka a_n=1093 m.s⁻².

U jiných příkladů je třeba vyjádřit souřadnice v jednom ze souřadnicových systémů a pak derivovat podle času.

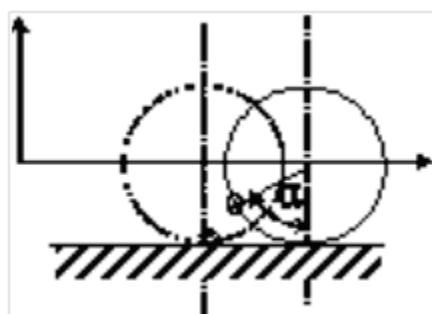
1.2.3.3 Příklad 5

Ve vzorku pneumatiky automobilu se zachytí kamínek. Automobil jede konstantní rychlosťí $v = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pneumatika se po silnici odvaluje (nedochází k proklouzavání); poloměr pneumatiky je $R = 25 \text{ cm}$.

Popište polohu kamínka v závislosti na čase (počáteční polohu volte v místě styku kamínku s vozovkou). Určete také průběh velikostí rychlosťi a zrychlení. Průběhy zakreslete do grafu.

Určete maximální rychlosť a zrychlení a polohu kamínku při nich.

Řešení: Střed si označíme S, polohu kamínku A



Poloha:

$$x_A = x_S - R \cdot \sin(\alpha)$$

$$y_A = -R \cdot \cos(\alpha)$$



Použijeme-li vztahy:

$$v = R \cdot \omega$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

(t je čas a ω označíme jako úhlovou rychlosť)

(platí pouze pro konstantnú rychlosť automobilu!!!)

pak:

$$x_A = v \cdot t - R \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y_A = -R \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Rychlosťi

$$v_{Ax} = v - R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v_{Ay} = R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v_{celk}(t) = v \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

$$|v_{max}| = 2 \cdot v = 20 \text{ m.s}^{-1}$$

Zrychlení

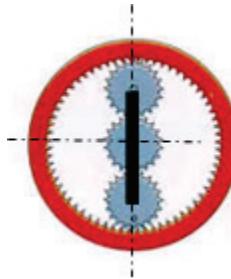
$$a_{Ax} = R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$a_{Ay} = R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

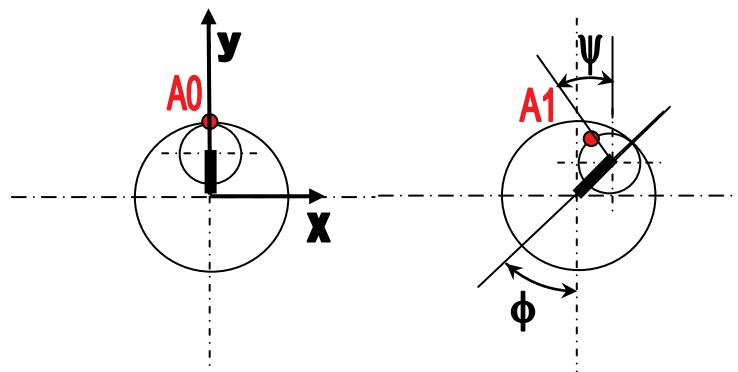
$$|a_{max}| = a_{celk}(t) = R \cdot \omega^2 = 400 \text{ m.s}^{-2}$$

Grafy jsou grafickým zobrazením příslušných rovnic, nejsou zde uvedeny.

1.2.3.4 Příklad 6



U planetové převodovky má satelit $z_2=33$ zubů a blokované korunové kolo $z_1=100$ zubů. Jedná se o nekorigovaná čelní ozubená kola s modulem $m_d=2 \text{ mm}$. Unašeč (černá tyč) se pohybuje konstantními otáčkami $n=100 \text{ ot.min}^{-1}$. Určete rychlosť a zrychlení bodu A, na roztečné kružnici, v okamžiku kdy unašeč svírá s původním svislým směrem úhel $\phi=45^\circ$ (pravý obrázek). Bod A je bod na satelitním kole a na počátku byl v nejvyšším místě (viz levý obrázek).



Pozn. Z celé teorie ozubených kol zde pro řešení potřebujete vědět pouze to, že průměr roztečné kružnice se vypočte jako počet zubů vynásobený modulem.

Tutoria

Plazmatický pohybovák
Pohybem plazmatického pohybováku při hledání kroužnic kruhu se zadání může dát po vnitřních kružnicích kroužnic kruhu. Když zadání je možné upřesnit zadáním kroužnic kruhu nezačínají v okolíku pohybu zadání

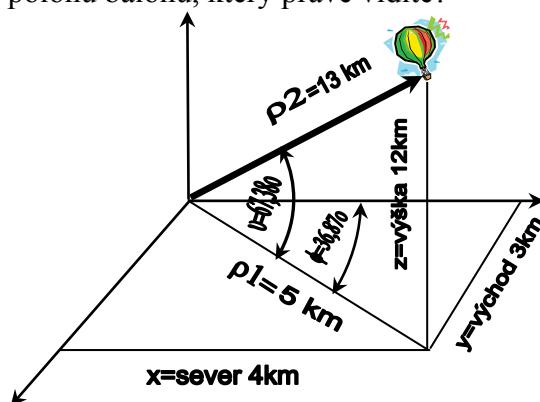
Ovládání

INFO

Výsledek: Bod A má v zadané poloze rychlosť, kterou lze určit pomocí složek ve směrech x a y $v_{Ax}=1,026 \text{ m.s}^{-1}$; $v_{Ay}=-2,395 \text{ m.s}^{-1}$ (v_{Ax} znamená rychlosť bodu A ve směru osy x atd.) a zrychlení, které má složky $a_{Ax}=19,44 \text{ m.s}^{-2}$ a $a_{Ay}=-9,68 \text{ m.s}^{-2}$.

1.3 POHYB BODU V PROSTORU

Pro popis toho, kde se bod nachází, se používá polohový vektor.
Jak byste popsali někomu polohu balónu, který právě vidíte?



Máte několik možností, můžete říct například:

- Půjdete čtyři kilometry na sever pak tři kilometry na východ a pak je balón dvanáct kilometrů nad Vámi. Tomuto popisu se říká kartézský souřadný systém (x, y, z).



- b) Půjdete pět kilometrů s azimutem $53,13^\circ$ (doplněk $36,87^\circ$) a pak je balón dvanáct kilometrů nad Vámi. Tomuto popisu se říká válcový souřadný systém (ρ_1, ϕ, z). *Azimut je orientovaný úhel, který svírá určitý směr, například pochodová osa se směrem severním. Úhel je orientovaný, zaleží tedy na směru měření úhlu, měří se po směru pohybu hodinových ručiček, tj. od severu k východu. Z definice vyplývá, že sever má azimut 0° , východ 90° , jih 180° a západ 270° .*
- c) Balón je od Vás vzdálený 13 km jeho azimut je $53,13^\circ$ a jeho výškový úhel je $67,38^\circ$. Tomuto popisu se říká kulový nebo sférický souřadný systém (ρ_2, ϕ, v).

Até už polohu balónu popíšete jakkoliv, vždy v prostoru budete potřebovat tři nezávislé souřadnice. Jestliže budeme uvažovat polohu balónu, jako funkci času můžeme psát, že každá z těchto souřadnic je funkcí času.

pravoúhlý (kartézský):

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}$$

válcový (cylindrický):

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_1(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

kulový (sférický):

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \rho_2(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \\ v &= v(t)\end{aligned}$$

Přirozený souřadný systém popisuje pohyb ve směrech okamžité tečny normály a binormály. Chceme-li přepočítat polohu z jednoho souřadného systému do druhého, je nutno použít goniometrické vztahy, které vycházejí z pravoúhlých trojúhelníků. Podívejte se při tom na obrázek balónu a následující vztahy jsou pak zřejmé.

Válcový na kartézský:

$$\begin{aligned}x &= \rho_1 \cdot \cos(\varphi) \\y &= \rho_1 \cdot \sin(\varphi) \\z &= z\end{aligned}$$

Kulový na kartézský:

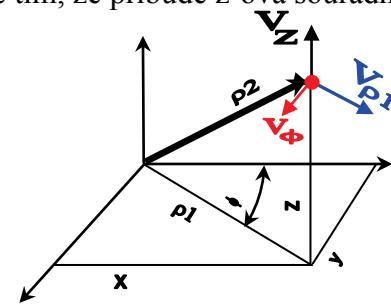
$$\begin{aligned}x &= \rho_2 \cdot \cos(v) \cdot \cos(\varphi) \\y &= \rho_2 \cdot \cos(v) \cdot \sin(\varphi) \\z &= \rho_2 \cdot \sin(v)\end{aligned}$$

Poloha, rychlosť a zrychlení v kartézském souřadném systému (**i, j, k** jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x, y a z).

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ \vec{v} &= \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \\ \vec{a} &= \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} + \dot{v}_z \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

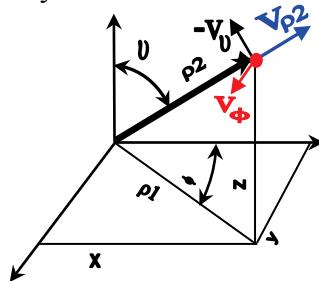


Velikosti složek rychlosti a zrychlení ve válcovém (cylindrickém) souřadném systému se liší od polárního systému pouze tím, že přibude z-ová souřadnice.



$$\begin{aligned} v_r &= \dot{\rho}_1 & a_r &= \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2 \\ v_\phi &= \rho_1 \cdot \dot{\phi} & a_\phi &= r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi} \\ v_z &= \dot{z} & a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned}$$

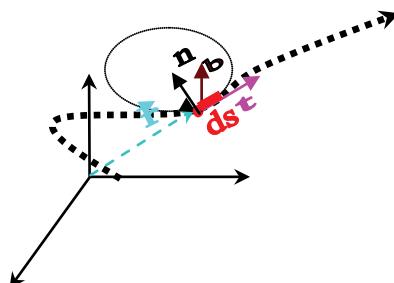
Odvození velikosti složek rychlosti a zrychlení v kulovém (sférickém) souřadném systému je trochu obtížnější, ale opět se jedná jen o znalost počítání s goniometrickými funkcemi v pravoúhlých trojúhelnících doplněných znalostmi o derivacích. Zde je uveden výsledek.



$$\begin{aligned} v_{\rho_2} &= \dot{\rho}_2 \\ v_\phi &= \rho_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\nu) \\ v_v &= \rho_2 \cdot \dot{v} \\ a_{\rho_2} &= \ddot{\rho}_2 - r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2(\nu) - r \cdot \dot{v}^2 \\ a_v &= 2 \cdot \dot{\rho}_2 \cdot \dot{v} + \rho_2 \cdot \ddot{v} - \rho_2 \cdot \sin(\nu) \cdot \cos(\nu) \cdot \dot{\phi}^2 \\ a_\phi &= 2 \cdot \dot{\rho}_2 \cdot \sin(\nu) \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\nu) \cdot \dot{v} \cdot \dot{\phi} + \rho_2 \cdot \sin(\nu) \cdot \ddot{\phi} \end{aligned}$$

Přirozený souřadný systém

Pohyb je také možno popsat v přirozeném souřadném systému. Tento systém tvoří t tečna normála n a binormála b také se mu říká průvodní trojhran křivky. Můžeme určit velikosti složek rychlosti a zrychlení ve směrech t, n a b. Kladný přírůstek dráhy ve směru tečny označíme ds. poloměr oskulační kružnice označíme ρ . Oskulační kružnice je taková kružnice, která má v bodě A s jeho trajektorií společnou tečnu t, stejný poloměr křivosti ρ , společnou hlavní normálu n a lze jí v malém okolí bodu danou trajektorii nahradit. Pak platí následující vztahy:



$$\begin{aligned}
 v_t &= \dot{s} \\
 v_n &= 0 \\
 v_b &= 0 \\
 a_t &= \ddot{s} = \dot{v} \\
 a_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \\
 a_b &= 0
 \end{aligned}$$

Často se pak mluví o tečném a_t a normálovém zrychlení a_n .

O tom, který ze systémů je vhodné použít při řešení problémů, rozhoduje charakter problému zkušenost a odhad. Použití vhodného typu souřadnic často problém výrazně zjednoduší.

1.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.4.1 Příklad 1

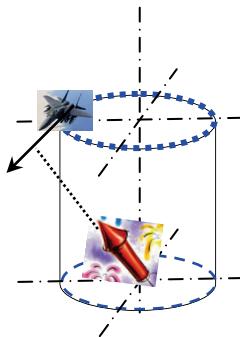
Pohyb bodu po šroubovici je popsán rovnicemi:

$$\begin{aligned}
 x &= R \cdot \sin(t) \\
 y &= R \cdot \sin(t) \\
 z &= A \cdot t
 \end{aligned}$$

R= 50 cm; t je čas, A=2m.s⁻¹

Určete obecně rychlosť a zrychlení bodu v čase t a hodnoty pro čas t=2 s.

1.4.2 Příklad 2 (obtížné)



Letadlo neustále krouží po kružnici o poloměru R ve výšce H konstantní rychlostí, jejíž velikost je vl. Letadlo se snaží sestřelit raketa letící rychlosť o konstantní velikosti vR. Raketa startuje ze středu průmětu kružnice na povrch země. Raketa míří neustále před letadlo tak, že kdyby letadlo i raketa pokračovaly v každém okamžiku přímočaře, raketa by proletěla přesně v polovině dráhy, kterou by za zbývající dobu urazilo letadlo. Určete, polohu rakety v čase a čas, za jaký se raketa dostane k letadlu.

vl=700 m.s⁻¹

R=50 km

H=10 km

vR=2000 m.s⁻¹



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Dynamika bodu

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DYNAMIKA BODU	3
1.1 Trocha historie.....	4
1.2 Newtonovy zákony	5
1.2.1 Řešení pohybu bodu pomocí zákona síly.	5
1.2.2 Obecný postup při řešení úloh, který je předveden na jednoduchém příkladu..	7
1.3 Další vektorové přístupy.	8
1.4 Energetické přístupy	9
1.4.1 Příklady potenciálních energií	10
1.4.2 Věta o změně kinetické energie.....	11
1.4.3 Věta o zachování mechanické energie	11
1.4.4 Příklad řešený pohybovou rovnicí i energeticky.....	12
1.4.5 Energetický přístup.....	12
1.5 Příklady k procvičení	13
1.5.1 Příklad 1.....	13
1.5.2 Příklad 2.....	13
1.5.3 Příklad 3.....	13
1.5.4 Příklad 4.....	13
1.5.5 Příklad 5.....	14
1.5.6 Příklad 6.....	14
1.5.7 Příklad 7.....	14
1.5.8 Příklad 8.....	15
1.5.9 Příklad 9.....	15
1.5.10 Příklad 10.....	16
1.5.11 Příklad 11.....	16
2 POUŽITÁ LITERATURA.....	17



1 DYNAMIKA BODU



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

- Dynamika bodu.
- Trocha historie.
- Newtonovy zákony.
- Další vektorové přístupy.
- Energetické přístupy.
- Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Zatím jsme se zajímali jen o to, jak se něco hýbe. Existuje více možností jak získat rovnice, kterými se řídí pohyb. Porozumění těmto rovnicím pro bod vede k porozumění i pro složitější případy. Pohybovými rovnicemi se řídí veškerý pohyb ve vesmíru od galaxií přes stroje k částicím.



CÍL:

- Pohybová rovnice hmotného bodu.
- D'Alambertův princip, věty o změně hybnosti a momentu hybnosti.
- Práce, výkon, energie, zákon zachování mechanické energie.



1.1 TROCHA HISTORIE

Zatím jsme popsali, jak se bod hýbe, to znamená kde je, jakou má rychlosť, zrychlení a případně ryv, ale nezajímali jsme se co je příčinou toho, že se hýbe. O příčiny pohybu se zajímali lidé uvedení v následujících odstavcích.

Aristoteles

Pokud je těleso na svém přirozeném místě a nepůsobí na něj žádné další vlivy, setrvává tam v klidu. Pokud těleso není na svém přirozeném místě, snaží se na ně dostat (což platí zejména o svislém pohybu). **Bez účinku síly se těleso nepohybuje jinak než svým přirozeným pohybem.** Odpověď na otázku, proč letí hovený kámen, či vystřelený šíp je, že při hodu kamene či výstřelu šípu jim předáme hybnou sílu, tzv. impetus. Ty si ji chvíli s sebou nesou a postupně ji spotřebovávají. Toto však nevysvětluje např. pohyb kyvadla.

V 11. století zavádí Avicenna impetus, který se sám o sobě nevyčerpává. Jedná se o hybnou sílu vtištěnou do tělesa zdrojem pohybu. Ta v pohybujícím se tělese zůstává a dále působí jeho pohyb. Impetus se zmenšuje pouze skrze jiné síly, typicky odporem prostředí.

Galileo

Galileo objevil, že přírodní jevy lze popsát matematicky a pokládá to za odraz "pravého zákona přírody". Galileo však přitom ještě nevytváří dynamiku v dnešním smyslu, tedy nehledá příčinu pohybů. Baví ho popisovat pozemské pohyby se stejnou přesností a exaktností, jak to dělali astronomové (Kepler) s pohyby nebeskými, například kvadratickou závislost dráhy při volném pádu na čase. Své úvahy odvozuje jen z experimentů, přesto významně ovlivní dynamiku principem setrvačnosti.

Isaac Newton

Předpoklady pro přesnější formulace dynamických zákonů dnes v rámci dostatečné přesnosti používané shrnul sir **Isaac Newton** v Principiích (*Philosophiae naturalis principia mathematica*) vydaných r. 1687.

Newton používá *Euklidovský geometrický prostor* a nezávisle běžící *absolutní čas*, což umožňuje měřit vzdálenosti a tvary těles a popisovat polohu tělesa vzhledem ke zvolené souřadné soustavě. Absolutní čas ukazuje na existenci jisté speciální míry v měření času. Newton také zavádí pojem absolutního prostoru, který označuje jako **základní prostor**, jehož body jsou neustále na svých místech a lze vůči nim určovat absolutní polohu těles, zejména můžeme mluvit o pohybu vůči absolutnímu prostoru. Newton neznal pojem zrychlení a přiřadil každému tělesu míru jeho pohybového stavu – *hybnost* – součin rychlosti a hmotnosti. U těles v klidu či rovnoměrném pohybu po přímce, se tato míra pohybu nemění. Jako příčinu změny pohybového stavu zavádí sílu. A formuluje i zákon akce a reakce o působení sil mezi dvěma tělesy, který je důsledkem zákona zachování hybnosti.

Po další dvě století souhlasily všechny experimenty s jeho teorií a až díky **Maxwelovým** objevům v oboru elektromagnetismu, a snahám o vysvětlení **Morley-Michelsonova** pokusu při hledání rychlosti Země vůči aetheru 1887 se dospělo ke vcelku jednoduché úpravě zákonů mechaniky, kterou lze pochopit při průměrných znalostech středoškolské matematiky, zvanou Einsteinova speciální teorie relativity (trochu podobné Kolumbovu vejci). Je spíše podivné, že s touto teorií nepřišel Hendrick Lorentz či George Fitzgerald o mnoho let dříve. Při vysvětlení Michelson-Morley experimentu, Lorentz navrhl, že dochází ke zkracování délek pohybujících se těles ([kontrakci délky](#)) ve směru pohybu. K tomuto závěru došel již v roce 1889 [George Fitzgerald](#). Lorentz zavedl termín místní čas, který vyjadřoval vztah mezi současností nepohyblivého tělesa a pohybujícího se tělesa. Speciální teorie relativity je platná jen pro velmi omezený rozsah souřadných soustav (inerciální) a proto vyžadovala zobecnění.



Obecná teorie relativity, která uvažuje i se zakřivením prostoročasu je již opravdu poměrně složitou teorií.

Pro částice pak tvoří pohybovou rovnici Schrödingerova rovnice, která určuje pouze pravděpodobnost toho, kde se částice nachází (kvantová mechanika).

V „naší“ dynamice budeme používat Newtonovy vztahy, které jsou v rámci rychlostí, a velikostí se kterými budeme pracovat dostatečně přesné.

Připomeňme si Newtonovy zákony, které jsou základem celé klasické mechaniky.

1.2 NEWTONOVY ZÁKONY

1. Zákon setrvačnosti:

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, jestliže na něj nepůsobí jiná tělesa silou nebo síly působící na těleso jsou v rovnováze.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$$

2. Zákon síly:

Síla je příčinou změny pohybového stavu. Kde síla je příčinou změny hybnosti \mathbf{p} , která je součinem hmotnosti a rychlosti $\mathbf{p}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{v}$.

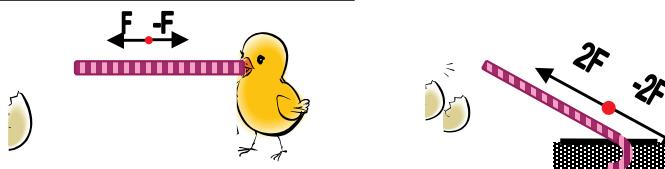
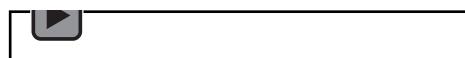
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Zákon akce a reakce:

Působí-li jedno těleso na druhé silou, působí i druhé těleso na první stejně velkou silou stejného směru opačné orientace.



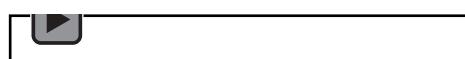
Audio 1.1 Newtonovy zákony.



1.2.1 Řešení pohybu bodu pomocí zákona síly.

Základní rovnicí celé dynamiky je právě druhý Newtonův zákon. Tato rovnice se často nazývá pohybovou rovnicí hmotného bodu. Všimněte si, že hybnost i síla jsou vektorové veličiny, které jsou dány velikostí, působištěm, směrem a orientací. Velikost, orientace a směr lze vyjádřit pomocí složek (v E3 se jedná o tři složky, E2 o dvě, E1 jednu). Směry složek se volí tak, aby byly na sebe vzájemně kolmé (ortogonální) nejčastěji v souřadných soustavách jako u kinematických veličin (polohového vektoru, rychlosti, zrychlení). V případě, že uvažujeme hmotný bod, pak je působiště sil dáné tímto bodem.

Audio 1.2 Pohyb bodu.



Pro konstantní hmotnost lze pohybovou rovnici zjednodušit pomocí zrychlení.



$$\sum \vec{F} = \frac{m \cdot \vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{d\vec{r}}$$

Pozor změna hmotnosti nemusí být nutně způsobena relativistickými jevy. Představte si balón, kde část lana leží na zemi a postupně se odvíjí a hmotnost balónu, včetně lana se zvyšuje, nebo raketu, jejíž hmotnost se snižuje s tím, jak jí ubývá paliva.

Pohybovou rovnici pak lze rozepsat ve složkovém tvaru pro různé souřadné systémy:

Kartézský souřadný systém

$$F_x = m \cdot a_x \quad F_y = m \cdot a_y \quad F_z = m \cdot a_z$$

Válcový souřadný systém

$$F_\phi = m \cdot a_\phi \quad F_\rho = m \cdot a_\rho \quad F_z = m \cdot a_z$$

Přirozený souřadný systém

$$F_n = m \cdot a_n \quad F_t = m \cdot a_t \quad F_b = 0$$

Pozor i v případě, že se bod pohybuje po přímce či v rovině je nutno uvážit, jestli na něj nepůsobí síly v jiných směrech, které mohou souviset s pasivními odpory působícími v dané přímce či rovině. Při řešení úloh je dobré si uvědomit, že obecně je pohybová rovnice diferenciální rovnicí druhého řádu, která může být nelineární a často nemusí mít řešení v uzavřeném tvaru.

Obecně existují dva typy úloh:

Úloha 1. druhu (kinetostatická).

Je to taková úloha, u které známe veličiny popisující pohyb a hledáme síly, které jsou přičinou tohoto pohybu. V tomto případě se pohybová rovnice rozpadne na soustavu lineárních rovnic a řešení úlohy nebývá obtížné.

Úloha 2. druhu (dynamická).

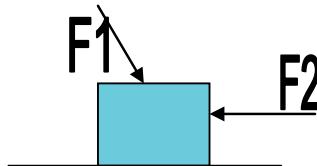
Je to taková úloha, u které známe působící síly a vyšetřujeme pohyb. V tomto případě je pohybová rovnice obecně nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu a o tom, jestli existuje řešení v uzavřeném tvaru, rozhodují další okolnosti.



1.2.2 Obecný postup při řešení úloh, který je předveden na jednoduchém příkladu.

Příklad

Na břemeno hmotnosti $m=0,3 \text{ kg}$. Působí dvě síly o velikostech $F_1=4,5 \text{ N}$ a $F_2=0,9 \text{ N}$. Síla F_1 svírá se svislým směrem úhel $\alpha=45^\circ$. Určete zrychlení tělesa, je-li na počátku v klidu. Určete tato zrychlení, pohybuje-li se těleso na začátku pohybu ve směru a proti směru pohybu síly F_1 rychlostí $v=10 \text{ m.s}^{-1}$. Koeficient tření mezi tělesem a podložkou je $f=0,2$.



00) Ověříme počet stupňů volnosti (u bodu v E3 nejméně 1 maximálně 3 stupně volnosti). Má-li bod 0 stupňů volnosti, lze úlohu řešit pomocí statických rovnic rovnováhy, při záporném počtu stupňů volnosti je pak nutno statické rovnice rovnováhy doplnit rovnicemi pružnosti a pevnosti.

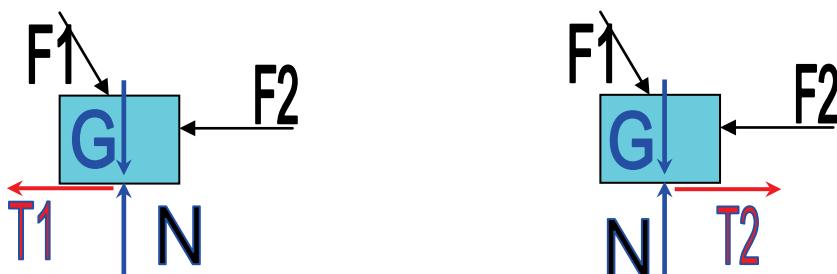
ad 00) Těleso se pohybuje jen po přímce ve vodorovném směru a má tedy jeden stupeň volnosti.

0) Pokusíme se odhadnout rozmezí, ve kterém se bude výsledek pohybovat.

ad 0) Těleso má hmotnost $m=0,3 \text{ kg}$; největší působící síla je $F_1=4,5 \text{ N}$ zrychlení bude určitě menší než $a=150 \text{ m.s}^{-2}$, ale břemeno se taky nemusí pohybovat vůbec $a=0 \text{ m.s}^{-2}$. Ke zpřesnění odhadu lze použít úvahu: Složka síly F_1 ve vodorovném směru je cca $0,7 F_1$ proti ní působí F_2 a síla způsobená třením, maximální zrychlení může být $a=70 \text{ m.s}^{-2}$, ale spíše bude mnohem menší v důsledku smykového tření. Tato úvaha by měla trvat několik sekund.

1) Bod uvolníme. To znamená, určíme všechny síly, které na něj působí velmi vhodné je nakreslit obrázek.

ad 1) Kromě sil F_1 a F_2 působí na těleso jeho vlastní tíha G , reakce podložky N a síla T způsobená třením, která působí proti směru pohybu. Zatím nevíme, kterým směrem se těleso pohybuje, proto je vhodné nakreslit oba případy. Pro zadaný směr rychlosti je směr třecí síly daný. **Třecí síla je vždy orientována proti směru pohybu.** V následujících rovnicích je kladný vodorovný směr volen ve směru kladné orientace rychlosti.



2) Napíšeme pohybovou rovnici a rozepíšeme ji do vhodných složek.

ad 2) Pro oba případy.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{T} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_1 \cdot \sin(\alpha) - T_1 - F_2 = m \cdot a_1 \quad - F_1 \cdot \sin(\alpha) - T_2 + F_2 = m \cdot a_2$$



$$N - G - F_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$N - G - F_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

3) Rovnice doplníme o vztahy z kinematiky, statiky, geometrie a tak dále.

ad 3) V tomto případě doplníme o vztah pro smykové tření.

$$T = N \cdot f$$

4) Vzniklou soustavu rovnic vyřešíme. (lze-li analyticky jinak numericky)

ad 4) V tomto případě se jedná o soustavu lineárních rovnic a lze ji řešit například dosazováním. Výsledkem bude $a_1=3,524 \text{ m.s}^{-2}$; $a_2=-11,689 \text{ m.s}^{-2}$. Záporná hodnota znamená, že je-li na počátku těleso v klidu pak se bud' nerozjede, nebo rozjede s opačnou orientací, ale zrychlení bude jiné a je nutno jej vypočítat pro opačnou orientaci třetí síly. Pokud se ale těleso pohybuje a kladná orientace je stejná jako u rychlosti pak záporné zrychlení znamená, že těleso zpomaluje.

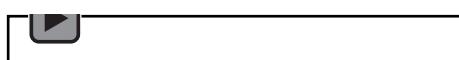
5) Ověříme správnost řešení. (například dosazením do původních rovnic či experimentem).

1.3 DALŠÍ VEKTOROVÉ PŘÍSTUPY.

D'Alambertův princip. Hlavní myšlenkou je připojit sílu, která vykompenzuje zrychlení a pak se úloha dynamická převede na úlohu statickou. Tato síla se nazývá D'Alambertova nebo setrvačná síla. Je to zdánlivá síla, kterou cítíte například při prudkém brzdění v autě, nebo při průjezdu zatáčkou.



Audio 1.3 D'Alambertův princip.



D'Alambertova síla

$$\vec{D} = -m \cdot \vec{a}$$

Rovnice pseudorovnováhy má tvar:

$$\sum \vec{F} + \vec{D} = \vec{0}$$

Toto řešení je velmi výhodné zejména u úloh 1. druhu i pro tělesa.

Dynamiku bodu lze řešit také pomocí **věty o změně hybnosti** a impulzu. Tento vztah lze odvodit z pohybové rovnice pro hmotný bod s konstantní hmotností.

$$\sum \vec{F} + \vec{D} = \vec{0}$$

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^t \vec{F} \cdot dt = m \cdot \int_{v_0}^{v(t)} d\vec{v} = m \cdot \vec{v}(t) - m \cdot \vec{v}_0$$

Pokud označíme impuls síly **I** a hybnost **p**

$$\vec{F} \cdot dt = \vec{I}$$



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

pak dospějeme k následujícímu vztahu:

$$\vec{I}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}_0(t_0)$$

Věta o změně hybnosti:

Přírůstek hybnosti v daném časovém intervalu t_0, t se rovná impulzu zrychlující síly v témže časovém intervalu. Impuls síly i hybnost jsou vektorové a lze je rozepsat do složek.

Řešení dynamiky bodu pomocí **věty o změně momentu hybnosti** a impulzu pro hmotný bod s konstantní hmotností.

Podobně jak se vypočte moment síly k bodu, lze vypočít i vypočít i moment hybnosti \mathbf{L} .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Po derivování

$$\frac{\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times m \cdot \vec{a} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Protože vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je roven nule a druhá část je moment síly platí následující vztah.

$$\begin{aligned}\vec{v} \times m \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \vec{r} \times \vec{F} &= \vec{M}\end{aligned}$$

Můžeme napsat velmi podobnou větu o změně momentu hybnosti.

$$\begin{aligned}\int_0^t \vec{M} \cdot dt &= \int_{L_0}^{L(t)} d\vec{L} \\ \vec{I}_M &= L(t) - L_0\end{aligned}$$

Věta o změně momentu hybnosti:

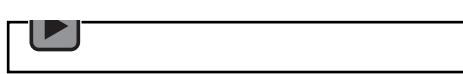
Přírůstek momentu hybnosti k danému bodu v určitém časovém intervalu je roven impulzu momentu I_M síly k témuž bodu a v témže časovém intervalu.

1.4 ENERGETICKÉ PŘÍSTUPY

Předchozí přístupy lze označit jako vektorové, ale v dynamice existuje ještě další přístup, kdy se dynamické úlohy řeší pomocí energií. Dvě formy mechanické energie se nazývají kinetická a potenciální. S energiemi pak souvisí mechanická práce. Energie i práce jsou skalárními veličinami, to znamená, že jsou úplně určeny jen svou velikostí.

Kinetická energie hmotného bodu E_k . Pro rychlosti a přesnosti, se kterými se běžně setkáváme je možno kinetickou energii hmotného bodu definovat jako polovina součinu hmotnosti m a druhé mocniny velikosti rychlosti.

 **Audio 1.4 Kinetická energie bodu.**



$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Potenciální energie Ep je energie bodu (tělesa) v potenciálovém silovém poli. Pozor nemusí se jednat jen o gravitační energii v blízkosti povrchu Země, ale například o energii pružiny, elektrostatického silového pole, gravitačního pole jiných těles atd. Lze ji definovat podobně jako práci jen s opačným znaménkem. Síla pole je pak funkcí polohy. U potenciální energie je definován **jen rozdíl energie** mezi dvěma místy a je jedno jakou hladinu (ekvipotenciální plochu) si vyberete jako množinu bodů s nulovou potenciální energií. Pokud počítáme s absolutní hodnotou Ep pak je nutno si stanovit hladinu s nulovou potenciální energií.



Audio 1.5 Potenciální energie.



$$Ep(r) - Ep(r_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(r - r_0) \cdot d\vec{r}$$

Taky lze říct, že síla pole je gradientem potenciální energie.

1.4.1 Příklady potenciálních energií

- 1) Potenciální energie bodu o hmotnosti m v těhovém poli Země v blízkosti povrchu s těhovým zrychlením g a ve výšce h nad povrchem, kde nulová hladina je zvolena na povrchu Země.

$$Ep = m \cdot g \cdot h$$

- 2) Potenciální energie bodu o hmotnosti m v těhovém poli Země ve výšce y nad povrchem, kde nulová hladina je zvolena na povrchu Země. M_z je hmotnost Země; R_z je poloměr Země a κ je Newtonova gravitační konstanta. (Má význam pro velké výšky).

$$Ep = \frac{-M_z \cdot m}{R_z + y} \cdot \kappa + \frac{M_z \cdot m}{R_z} \cdot \kappa = \frac{-g \cdot R_z^2 \cdot m}{R_z + y} + \frac{g \cdot R_z^2 \cdot m}{R_z}$$

- 3) Potenciální energie lineární pružiny s tuhostí k při deformaci o délce y, kde nulová hladina odpovídá nezatížené a tedy nedeformované pružině.

$$Ep = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$$

Mechanická práce W je další skalární veličinou a její velikost (skalární veličiny mají pouze velikost) se vypočte stejně jako u práce jen s kladným znaménkem.

$$W(r - r_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Výkon: Je veličina charakterizující, jak rychle byla práce vykonána. Okamžitý výkon je definován jako:

$$P(t) = \frac{dW}{dt}$$



1.4.2 Věta o změně kinetické energie

Z pohybové rovnice lze odvodit vztah mezi dodanou prací a kinetickou energií, který říká, že **přírůstek kinetické energiem mezi dvěma polohami je roven práci působících sil mezi těmito polohami.**

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{d\vec{r}}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{v_0}^v m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$W(r - r_0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$W(r - r_0) = E_k - E_{k_0}$$

1.4.3 Věta o zachování mechanické energie

V konzervativním silovém poli platí, že se mechanická energie zachovává.

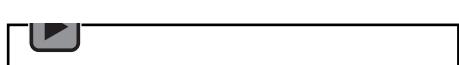
Konzervativní (potenciálové) silové pole znamená, že práce, která je vykonána silou pole po nějaké křivce závisí jen na počáteční a koncové poloze a nezávisí na tvaru křivky mezi polohami. Když chcete zvednout židlí a dát ji na stůl pak v tomto typu pole je jedno dáte-li ji nahoru přímo nebo jestli s ní nejdříve obejdete místo. Jiná definice je, že integrál po uzavřené křivce je roven nule. U židle to znamená, že skončí-li na konci tam, kde původně byla, pak se obejitím místo se židlí nevykonala žádná práce. Podobně, lze říci, že rotace pole je rovna nule.

Příkladem takového pole může být gravitační či elektrické pole, když zanedbáme pasivní odpory. V tomto typu pole se energie nepřeměňuje na jiné formy energie jako teplo či energii plastické deformace.

Součet kinetické a potenciální energie je v konzervativním silovém poli konstantní.



Audio 1.6 Další zjednodušující předpoklady



$$E_k + E_p = \text{konst.}$$

či v jiném tvaru:

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

V případě, že se nejedná o konzervativní pole a je dodána práce W navíc, která nesouvisí se silovým polem a přemění se cele na mechanickou energii, lze použít i další vztah, který ovšem není možno nazývat zákonem zachování mechanické energie.

$$E_{k0} + E_{p0} + (W) = E_{k1} + E_{p1}$$

Výsledná mechanická energie je rovna součtu původní mechanické energie a dodané práce.

K řešení dynamických úloh vede tedy více cest. Je možno je řešit vektorovým přístupem pomocí pohybové rovnice, D'Alambertova principu, hybnosti a impulsu síly, momentu hybnosti a impulsu silového momentu nebo pomocí energií. Většinou je některý způsob řešení pro danou úlohu vhodnější ve srovnání s ostatními, ale výběr způsobu řešení může být i

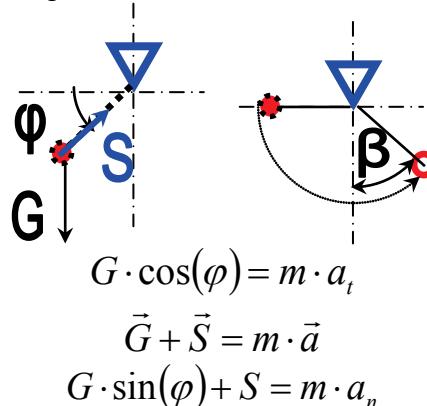


věcí obliby. Je nutno připomenout, že kromě rovnic dynamiky je také nutná znalost kinematiky, statiky, geometrie atd. Existují ještě další způsoby řešení úloh např. pomocí Lagrangeových rovnic, či Hamiltonových rovnic, ale v tomto materiálu se s nimi setkávat nebudeme.

1.4.4 Příklad řešený pohybovou rovnicí i energeticky

Hmotný bod je zavěšen na lanku zanedbatelné hmotnosti a pohybuje se po kruhové dráze v gravitačním poli Země. V počáteční poloze lanko vodorovné. Ve vyšetřované poloze svírá se svislým směrem úhel β . Počáteční rychlosť je nulová. Určete rychlosť bodu ve vyšetřované poloze. Hmotnost bodu je $mB=0,1 \text{ kg}$; délka lanka $r=35 \text{ cm}$; $\beta=35^\circ$.

Řešení Na bod působí jeho tíha G a síla v lanku S . Zakreslíme si bod v obecné poloze dané úhlem φ . Pohybovou rovnici rozepíšeme do tečného a normálového směru.



Je-li tření zanedbatelné, pak nás bude zajímat jen rovnice v tečném směru. Použijeme-li kinematické vztahy pro zrychlení a získáme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme pro konečnou úhlovou rychlosť ω a vynásobením délku lanka získáme rychlosť bodu.

$$a_t = r \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\omega \cdot d\omega}{d\varphi}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$G \cdot \cos(\varphi) = m \cdot r \cdot \frac{\omega \cdot d\omega}{d\varphi}$$

$$\int_0^{90^\circ + \beta} G \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi = \int_0^{\omega_k} m \cdot r \cdot \omega \cdot d\omega$$

$$v_k = \omega_k \cdot r$$

($v=2,371 \text{ m/s}$)

1.4.5 Energetický přístup

Nulovou hladinu potenciální energie zvolíme například v místě závěsu. Jedná se o bod v těhovém poli Země blízko povrchu a potenciální energie závisí na tíze a výšce. Kinetická energie je dána hmotností a rychlostí.



$$Ep_0 + Ek_0 = Ep_1 + Ek_1$$

Počáteční potenciální i kinetická energie jsou rovny nule.

$$0 + 0 = -m \cdot g \cdot r \cdot \cos(\beta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_k^2$$

Z daného vztahu lze okamžitě určit rychlosť bodu v_k ve vyšetřované poloze. Výsledek musí vyjít v obou případech shodný. ($v=2,371 \text{ m/s}$).

1.5 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.5.1 Příklad 1

Kabina výtahu včetně nákladu má hmotnost $m=380 \text{ kg}$, jakou silou je namáháno lano, když kabina:

- a) Stojí. ($F=3727 \text{ N}$)
- b) Pohybuje se vzhůru konstantní rychlostí $v=3,2 \text{ m.s}^{-1}$. ($F=3727 \text{ N}$).
- c) Pohybuje se vzhůru s konstantním zrychlením $a=3,2 \text{ m.s}^{-2}$. ($F=4943 \text{ N}$).
- d) Jede s tímto zrychlením dolů. ($F=2511 \text{ N}$).

Výsledky jsou uvedeny v závorkách.

1.5.2 Příklad 2

Určete hmotnost hmotného bodu, který se vlivem účinku zrychlující síly $F=230 \text{ N}$ rozjede za čas $T=42 \text{ s}$ na rychlosť $v=31 \text{ km.h}^{-1}$.

Výsledek $mb=1122 \text{ kg}$.

1.5.3 Příklad 3

Náboj o hmotnosti $m=28 \text{ g}$ opustil hlaveň pušky rychlosť $v=720 \text{ m.s}^{-1}$. Hlavní se pohyboval náboj po dobu $t=0,00065 \text{ s}$. Určete, jaký průměrný tlak působil v hlavni, jestliže vnitřní průměr hlavně je $d=8,3 \text{ mm}$. Určete hybnost H náboje po opuštění hlavně.

Výsledky $p=573,2 \text{ MPa}$; $H=20,16 \text{ kg.m.s}^{-1}$.

1.5.4 Příklad 4

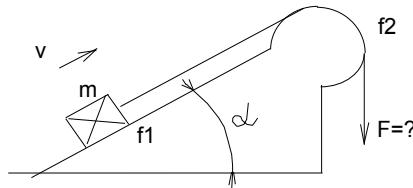
Určete, jakou silou musí být vytahováno lanem břemeno o hmotnosti $m=100 \text{ kg}$ po nakloněné rovině se sklonem $\alpha=20^\circ$ směrem vzhůru se zrychlením $a=2 \text{ m.s}^{-2}$. Lano svírá s nakloněnou rovinou úhel $\beta=30^\circ$. (orientace nahoru). Koeficient tření mezi nakloněnou rovinou a břemenem je $f=0,1$.

Výsledek $F=685,1 \text{ N}$.



1.5.5 Příklad 5

Jakou silou je zapotřebí vytahovat těleso po nakloněné rovině s koeficientem tření f_1 a úhlem sklonu nakloněné roviny α , aby na dráze s dosáhlo rovnoměrně zrychleným pohybem rychlosti v . Počáteční rychlosť je v_0 . Lano je vedeno přes pevný kruhový trám s koeficientem tření f_2 . Síla má směr svisle dolů.



$$m=70 \text{ kg}$$

$$v_0 = 1 \text{ m/s}$$

$$v=10 \text{ km.h}^{-1}$$

$$f_1=0,15$$

$$f_2=0,1$$

$$\alpha=30^\circ$$

$$s=6 \text{ m}$$

Výsledek $F=581,5 \text{ N}$.

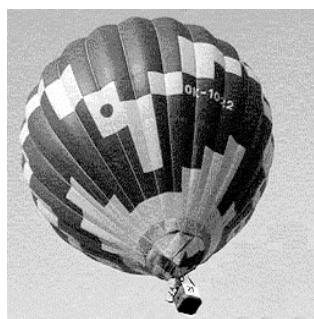
1.5.6 Příklad 6

Odbrzděný automobil o hmotnosti $m=1075 \text{ kg}$ se rozjízdí ze svahu délce $s=63 \text{ m}$ vlastní tíhou. Jaký je sklon svahu, jestliže rychlosť automobilu po projetí svahu je $v=56 \text{ km.h}^{-1}$. Určete rychlosť automobilu v polovině svahu (pasivní odpory zanedbejte).

Výsledky $\alpha=11,29^\circ$; $v(s/2)=11 \text{ m.s}^{-1}$.

1.5.7 Příklad 7

Balón o hmotnosti $m=540 \text{ kg}$ klesá svisle dolů se stálým zrychlením $a=1,6 \text{ m.s}^{-2}$.



Určete:

- 1) Jaká vztlaková síla působí na balón.
- 2) Jakou hmotnost m_Z musí mít závaží, které je třeba vyhodit z koše balónu, aby se začal pohybovat svisle vzhůru se stálým zrychlením $a_2=0,82 \text{ m.s}^{-2}$ (vztlaková síla je stejná).
- 3) Za jak dlouho začne balón stoupat, je-li původní rychlosť v okamžiku odhození $v=10 \text{ m.s}^{-1}$ směrem dolů.

$$a_2=0,82 \text{ m.s}^{-2}$$



$$\begin{aligned} m &= 540 \text{ kg} \\ a &= 1,6 \text{ m.s}^{-2} \\ v &= 10 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Výsledky:
F=4432 N
mZ=123,0 kg
t= 12,20 s.

1.5.8 Příklad 8

Ze země vylétá raketa po opuštění atmosféry počáteční rychlostí $v_0 = 5 \text{ km.s}^{-1}$ pak vypne motory. Určete, jaké maximální výšky H dosáhne. Na raketu působí přitažlivost Země. Pozor tříhové zrychlení není konstantní a je nutno využít Newtonova gravitačního zákona.

Newtonův gravitační zákon

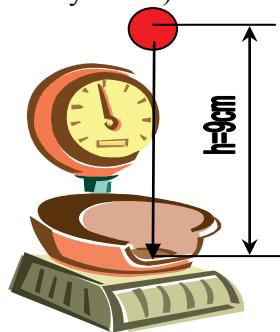
$$F_g = \frac{M_z \cdot m_R}{(R_z + y)^2} \kappa$$

M_z je Hmotnost Země; m_R je hmotnost rakety; $R_z = 6380 \text{ km}$ je poloměr Země; κ je Newtonova gravitační konstanta a y je proměnlivá vzdálenost rakety od Země. Pro určení hodnoty součinu $M_z \cdot \kappa$ využijte znalosti zrychlení u povrchu Země (pro $y=0$ je $a=g$).

Výsledek (Hmax=1593 km).

1.5.9 Příklad 9

Na misku pružinových vah o hmotnosti **mM=100 g** s pružinou o tuhosti **k=15000 N.m⁻¹** dopadne závaží o hmotnosti **mZ=50 g**. Po nárazu závaží zůstane na misce (náraz je dokonale nepružný). Určete, o jakou vzdálenost poklesne pružina.
(Zde je nutno začít zákonem zachování hybnosti).



Výsledek: Průměr pružiny maximálně o vzdálenost **x=1,502 mm**.



1.5.10 Příklad 10

Automobil jedoucí po vodorovné silnici o hmotnosti $m=1280 \text{ kg}$ zvýšil svou rychlosť z $v_0=7,3 \text{ m.s}^{-1}$ na $v_1=63 \text{ km.h}^{-1}$ za čas $t=3 \text{ s}$. Jakou zrychlující sílu F musel vyvinout motor a jakou dráhu auto během zrychlování urazilo.



Výsledky $F=4352 \text{ N}$, $s=37,2 \text{ m}$

1.5.11 Příklad 11

Malá ebenová koule o objemu $V=2 \text{ litry}$ dopadla na hladinu moře rychlostí $v_0=50 \text{ m.s}^{-1}$. Odporová síla vody je úměrná rychlosti podle vztahu $F=k.v$, $k=4.\text{kg.s}^{-1}$.

Nakreslete síly působící na kouli pod hladinou vody.

Určete: Jakou rychlosť bude mít koule, když se nacházejí v hloubce $h=20 \text{ m}$.

Určete: Čas, za který se koule ponoří do hloubky $h=20 \text{ m}$.

Pozn. hustota ebenu a vody je stejná $\rho=1000 \text{ kg.m}^{-3}$ a tedy vztlaková síla je rovná tíze.

(bez výsledku)



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Kinematika a dynamika těles

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA A DYNAMIKA TĚLES.....	3
1.1	Kinematika a Dynamika těles.....	4
1.2	Rovinné pohyby	4
1.2.1	Kinematika rovinného posuvného pohybu	5
1.2.2	Dynamika Posuvného pohybu.....	7
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 KINEMATIKA A DYNAMIKA TĚLES



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Rovinné pohyby.

Kinematika posuvného pohybu.

Dynamika posuvného pohybu.



MOTIVACE:

Pohyb těles je poměrně složitý, ale existují případy, kdy se tělesa pohybují určitými speciálními typy pohybu. Popsat dynamiku jednotlivých typů pohybů je možno tak, že se postupuje od jednodušších typů po složitější. Dynamiku složitějších typů pohybů pak lze popsat pomocí těchto jednodušších typů.



CÍL:

Rozdělení pohybů.

Kinematika a dynamika posuvného pohybu



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 KINEMATIKA A DYNAMIKA TĚLES

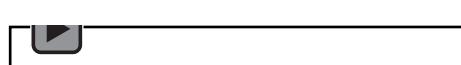
V první fázi jsme se seznámili s popisem dynamiky bodu, v dalších částech se budeme zabývat tělesy, a soustavami těles. Vztahy, které popisují dynamiku těles, vychází ze znalosti dynamiky bodu. Nové veličiny většinou souvisí s tím, jak je rozložena hmotnost tělesa.

Co je pro nás těleso.

Každá těleso se skládá z nekonečného množství bodů a většina vztahů bude odvozena pomocí integrálního počtu, zejména pomocí dvojních a trojných integrálů. Pokud ovšem je Vaším cílem jen znalost výsledných vztahů není jejich znalost nutná.

Pro zjednodušení popisu lze pohyby těles rozdělit a zabývat se každým typem pohybu zvlášť. Vždy bude nejprve vysvětlena kinematika a pak dynamika daného typu pohybu.

Audio 1.1 Další zjednodušující předpoklady



Rovinné pohyby:

Posuvný (translační) pohyb, který může mít až dva stupně volnosti.

Rotační pohyb, který má jeden stupeň volnosti.

Obecný rovinný, který může mít až tři stupně volnosti.

Prostorové pohyby:

Posuvný (translační) pohyb, který může mít až tři stupně volnosti.

Sférický pohyb, který může mít až tři stupně volnosti.

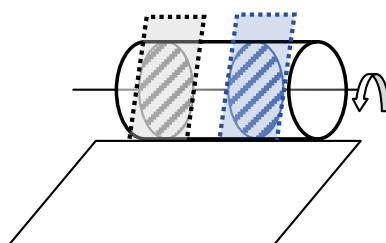
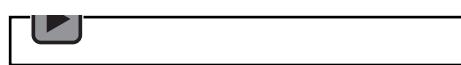
Šroubový pohyb, který může mít až dva stupně volnosti.

Obecný prostorový pohyb, který může mít až šest stupňů volnosti.

1.2 ROVINNÉ POHYBY

Rovinné pohyby tělesa neznamenají, že těleso nemůže mít objem, ale jen to, že **trajektorie všech bodů trvale zůstávají v navzájem rovnoběžných rovinách**. Například obecný rovinný pohyb vykonává válec, který se valí po rovině. Rovinné pohyby vykonávají také například všechny členy klasického klikového mechanismu (píst koná posuvný pohyb, klika koná rotační pohyb a ojnice obecný rovinný pohyb).

Audio 1.2 Rovinné pohyby.



Tutor

Při počtu vektorů posuvného pohybu
Kořenový pohyb tělesa, při
kterém trajektorie všech bodů
trvale zůstávají v mezičísle
mezi dvěma křivkami

Chránič

INFO

START

1.2.1 Kinematika rovinného posuvného pohybu

Definice: Je takový rovinný pohyb, kde **dvě různé různoběžné přímky trvale zachovávají svůj směr**. Tento pohyb má až dva stupně volnosti.

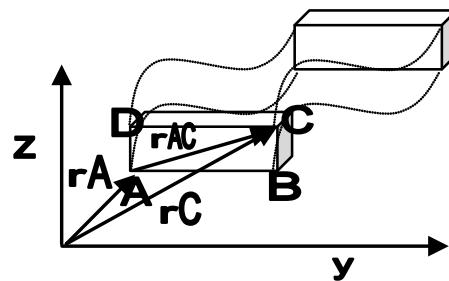
Audio 1.3 Kinematika rovinného posuvného pohybu.

Důsledky: Jestliže dvě různé přímky trvale zachovávají svůj směr, pak jej zachovávají všechny přímky tělesa. Trajektorie všech bodů jsou shodné vzájemně posunuté křivky a rychlosti a zrychlení všech bodů jsou v jednom okamžiku stejné.

Audio 1.4 Důsledky kinematiky rovinného posuvného pohybu.

Důkaz: Polohový vektor bodu C lze vyjádřit jako součet polohového vektoru bodu A a polohového vektoru bodu C vůči bodu A. Protože vzdálenost (tuhé těleso) ani směr (definice) bodu C vůči A se nemění, jedná se o konstantu, o kterou jsou trajektorie posunuty. Rychlosti a zrychlení získáme derivacemi podle času. Derivace konstanty je vždy nulová, proto jsou rychlosti a zrychlení bodu A a C stejné. To platí pro jakýkoliv bod.





$$\vec{r}C = \vec{r}A + \vec{r}CA$$

$$\dot{\vec{r}}C = \dot{\vec{r}}A + \dot{\vec{r}}CA$$

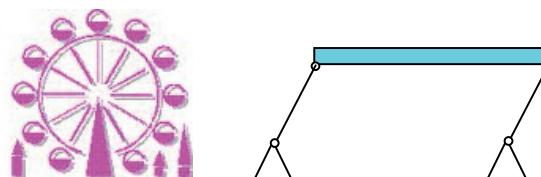
$$\vec{v}C = \vec{v}A + 0$$

$$\vec{v}C = \vec{v}A$$

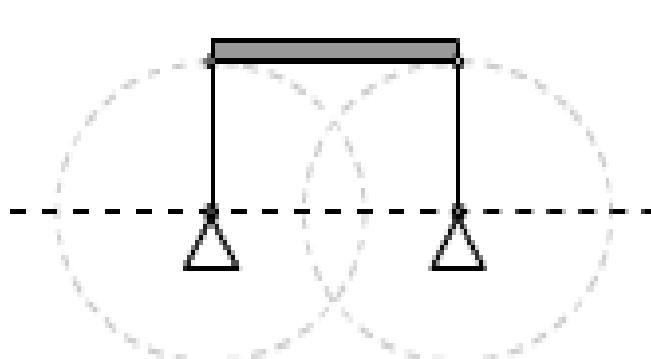
$$\dot{\vec{v}}C = \dot{\vec{v}}A$$

$$\vec{a}C = \vec{a}A$$

Příklady posuvných pohybů:



Posuvný pohyb není jen pohyb po přímce, vykonávají jej například také vozíčky ruského kola, či paralelogram.





Tutoria

 Paralelogram
 Chráničový dvojkolový
 vozík, ve kterém se vede
 kolové dvojkolové pohyby k
 posuvným pohybům

Výukový materiál





1.2.2 Dynamika Posuvného pohybu

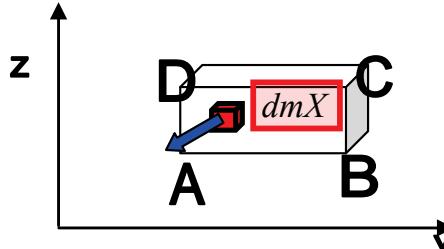
Hlavní úvahou zde je, že všechny body tělesa mají ve stejném okamžiku stejná zrychlení.

$$\vec{a}C = \vec{a}A = \vec{a}X = \vec{a}$$

$$d\vec{F}X = dm \cdot \vec{a}X$$



Pohybová rovnice



$$\int d\vec{F}X = \int_m dmX \cdot \vec{a} = \vec{a}X \cdot \int_m dmX = \vec{a} \cdot m$$

$$\vec{F}_V = \sum \vec{F}$$

$$\vec{F}_V = m \cdot \vec{a}$$

Výsledná síla F_V je součtem všech sil na těleso působících.

Výsledná síla musí mít stejný moment jako složky. Následující úpravu (krácení) lze provést jen, je-li zrychlení stejné pro všechny body tělesa, rV je polohový vektor působiště výsledné síly a rT je polohový vektor těžiště.

$$\begin{aligned} \vec{r}V \times F &= \int_m \vec{r}_i \times (dm \cdot \vec{a}X) \\ \vec{r}V = \frac{\int_m \vec{r}_i \times (dm \cdot \vec{a}X)}{(m \cdot \vec{a}X)} &= \frac{\vec{a}X \cdot \int_m \vec{r}_i \cdot (dm)}{(m \cdot \vec{a}X)} = \frac{\int_m \vec{r}_i \cdot (dm)}{m} = \vec{r}T \\ \vec{r}V \times F &= \int_m \vec{r}_i \times (dm \cdot \vec{a}X) \\ \vec{r}V = \frac{\int_m \vec{r}_i \times (dm \cdot \vec{a}X)}{(m \cdot \vec{a}X)} &= \frac{\vec{a}X \cdot \int_m \vec{r}_i \cdot (dm)}{(m \cdot \vec{a}X)} = \frac{\int_m \vec{r}_i \cdot (dm)}{m} = \vec{r}T \end{aligned}$$

To znamená, že nositelka výsledné síly musí procházet těžištěm, jinak by se těleso kromě zrychlování také roztáčelo se zrychlením. Pokud budeme počítat moment k těžišti, musí být roven nule.

$$\sum \vec{M}_T = 0$$

M_T označuje moment počítaný k těžišti. Pro rovinný posuvný pohyb lze tyto rovnice rozepsat do tří skalárních složek. Výsledná síla F_V je součtem všech sil na těleso působících.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum \vec{M}_T = 0$$

D'Alambertův princip

Při řešení pomocí D'Alambertova principu se zavede setrvačná síla. Velikost směr a orientaci D'Alambertovy (setrvačné) síly určíme z rovnice:

$$\vec{D} = -m \cdot \vec{a}$$

Její nositelka pak prochází těžištěm. Pak je možno napsat rovnice pseudorovnováhy:

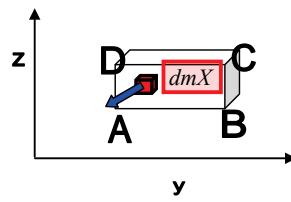
$$\sum \vec{F} + \vec{D} = \vec{0}$$

Zde je součet všech momentů nulový k libovolnému bodu.

$$\sum \vec{M}_{(\sum \vec{F} + \vec{D})} = \vec{0}$$

Obecně v prostoru pro osu x kolmou k rovině pohybu:





$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum F_y + D_y = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum F_z + D_z = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Kinetická energie posuvného pohybu.

(rychlosť všech bodov je u posuvného pohybu stejná)

$$dE_k = \frac{1}{2} \cdot dm_i \cdot v_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \int_m dm$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \int_m dm$$

Tato energie se vypočte stejně jako u pohybu hmotného bodu.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Kinematika rotačního pohybu včetně geometrie hmot

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA ROTAČNÍHO POHYBY VČETNĚ GEOMETRIE HMOT	3
1.1	Kinematika rotačního pohyby včetně geometrie hmot	4
1.1.1	Dynamika rotačního pohybu.....	4
1.1.2	Transformační vztahy.....	8
1.2	Příklady k procvičení	11
1.2.1	Příklad 1.....	11
1.2.2	Příklad 2.....	12
1.2.3	Příklad 3.....	12
1.2.4	Příklad 4.....	12
1.2.5	Příklad 5.....	12
1.2.6	Příklad 6.....	12
1.2.7	Příklad 7.....	13
1.2.8	Příklad 8.....	14
1.2.9	Příklad 9.....	15
1.2.10	Příklad 10.....	17
1.2.11	Příklad 11.....	18
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	19



1 KINEMATIKA ROTAČNÍHO POHYBY VČETNĚ GEOMETRIE HMOT



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinematika rotačního pohybu.

Dynamika rotačního pohybu včetně geometrie hmot.

Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Rotační pohyb vykonává mnoho těles i strojních součástí (ozubená kola, hřídele,...). Je-li například hřídel uložena "nakřivo" vznikají při rotaci různé přídavné síly a silové momenty, které mohou snižovat životnost zařízení. Porozumění dějům odehrávajících se při rotaci zvýší všeobecné znalosti konstruktéra.



CÍL:

Kinematika a dynamika rotačního pohybu.

Geometrie hmot.



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

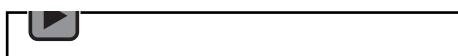
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 KINEMATIKA ROTAČNÍHO POHYBU VČETNĚ GEOMETRIE HMOT

Definice: Jedna přímka tělesa zůstává trvale v klidu.

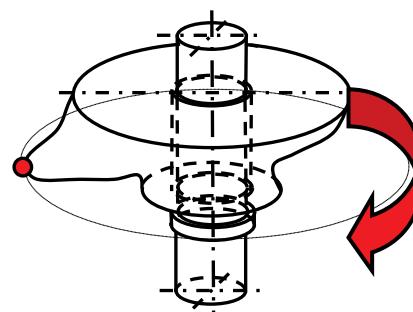
Tato přímka se nazývá osa rotace. Tento pohyb má jeden stupeň volnosti.

 **Audio 1.1 Kinematika rotačního pohybu.**



Důsledky: Trajektorie všech bodů jsou kružnice. Každý rotační pohyb je rovinný, protože se těleso nemůže pohybovat v axiálním směru.

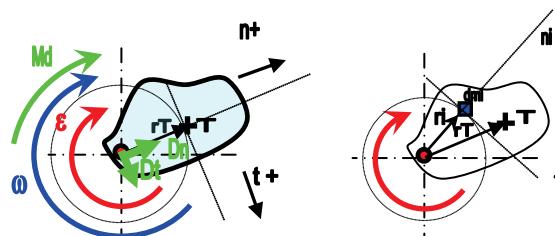
Úhlová dráha, úhlová rychlosť a úhlové zrychlení jsou pro všechny body v daném okamžiku stejné. Jestliže se každý bod pohybuje po kružnici, pak je kinematika shodná s pohybem bodu po kružnici, kde poloměr R je dán nejmenší vzdáleností vyšetřovaného bodu od osy rotace.



1.1.1 Dynamika rotačního pohybu

(rovinný případ).

V první části pro zjednodušení předpokládejme, že veškerý materiál tělesa leží v jediné rovině a nezajímá nás tloušťka. Pro odvození použijeme D'Alambertův princip. Lze využít toho, že úhlová rychlosť i úhlové zrychlení jsou pro všechny body tělesa stejné a znalosti polohy těžiště r_T .



$$r_T = \frac{\int dm_i \cdot r_i}{m} = \frac{\int dm_i \cdot r_i}{m}$$

$$dDn = -dm_i \cdot a_n$$

$$dDt = -dm_i \cdot a_t$$

$$dMD = -dm_i \cdot a_t \cdot r_i$$

$$dDn = dm_i \cdot \omega^2 \cdot r_i$$

$$dDt = -dm_i \cdot \varepsilon \cdot r_i$$

$$dMD = -dm_i \cdot \varepsilon \cdot r_i \cdot r_i$$

$$Dn = \omega^2 \cdot \int_m r_i \cdot dm_i$$

$$Dt = -\varepsilon \cdot \int_m r_i \cdot dm_i$$

$$MD = -\varepsilon \cdot \int_m r_i^2 \cdot dm_i \quad J = \int_m r_i^2 \cdot dm_i$$

$$Dn = \omega^2 \cdot r_T \cdot m$$

$$Dt = -\varepsilon \cdot r_T \cdot m$$

$$MD = -\varepsilon \cdot J$$



Nová veličina J (někdy se značí I) se nazývá o kvadratický osový moment setrvačnosti hmoty a udává jak je hmota rozložena vzhledem k ose rotace. Pro základní tělesa ji naleznete v tabulkách. Pokud ji budete chtít vypočítat k posunutým rovnoběžným osám pak lze použít Steinerovu větu.

$$J_x = J_T + m \cdot e^2$$

$$\sum F_n + D_n = 0$$

$$\sum F_t + D_t = 0$$

$$\sum M + MD = 0$$

Kde J_T je osový kvadratický moment setrvačnosti hmoty k ose procházející těžištěm a J_x je osový moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s touto osou a e je vzdálenost os. Zavedeme-li setrvačné síly (D_n , D_t do osy rotace a setrvačný moment MD), pak platí rovnice pseudorovnováhy například ve směru normály tečny a momentová rovnice k jakémukoliv bodu. Moment setrvačnosti J je počítán moment k ose rotace. Při výpočtu je nutno dát pozor na znaménka.

Rovnice pseudorovnováhy jsou obdobou rovnic rovnováhy ve statice pro rovinné úlohy.

Kinetická energie rotačního pohybu:

$$dE_k = \frac{1}{2} \cdot dm_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot dm_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2$$

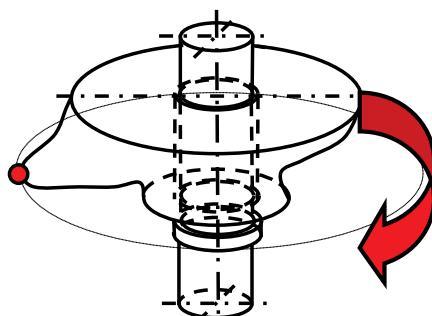
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \int_m dm_i \cdot r_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

1.1.1.1 Dynamika rotačního pohybu-prostorový případ

Určitě jste se setkali s tím, že kolo (auta, bicyklu,...) házelo. Příčinou jsou prostorové síly a momenty u rotačního pohybu. Rotační pohyb je sice rovinný pohyb, ale síly, které způsobuje, jsou obecně prostorové. Čili kromě předchozích rovnic přibudou ještě další tři rovnice (dvě momentové a silová ve směru osy rotace).

Rovnice odvodíme pomocí D'Alambertova principu na tyči, které rotuje okolo osy x, ale je k ose rotace postavena šikmo. Na obrázku je ve třech k sobě kolmých pohledech. Vybereme si element hmoty dm_i .

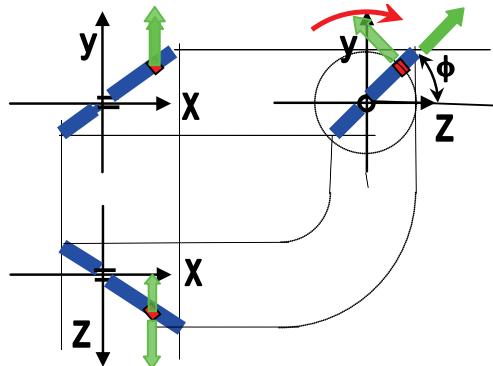


$$dD_n = dm_i \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{z^2 + y^2}$$

$$dD_t = dm_i \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{z^2 + y^2}$$



Začneme setrvačními silovými momenty k osám y a z (k ose rotace x je stejný jako v rovinném případě, kde rTx je vzdálenost těžiště od osy x). U dDt je znaménko zahrnuto otočením orientace v nákresu. Úhlová rychlosť a zrychlení jsou pro celé těleso v jednom okamžiku konstanty a je možno je vytknout před integrály.



Términ

Dynamika rotačního pohybu

Tělo rotuje okolo osy x, současně je rotace vidět ve všech řech průmětech. Na těle je element hmoty dm (žluté), ve kterém jsou zakresleny elementární zrychlení sily dDt a dDm. Pohyby ve všech průmětech se dělají současně.

Ovládání

START

Info

INFO

K ose z

$$dMDz = dDn \cdot \sin(\varphi) \cdot x + dDt \cdot \cos(\varphi) \cdot x$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

Dosadíme-li za goniometrické funkce a elementy sil dostaneme setrvačný moment k ose z



$$\begin{aligned}
 dMDz &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{z^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \cdot x + dm_i \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{z^2 + y^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} \cdot x \\
 dMDz &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot y \cdot x + dm_i \cdot \varepsilon \cdot z \cdot x \\
 MDz &= \omega^2 \cdot \int y \cdot x \cdot dm_i + \varepsilon \cdot \int z \cdot x \cdot dm_i
 \end{aligned}$$

Zavedeme-li substituce, kde Dxy označuje deviační moment setrvačnosti hmoty k ose z. (Podobně Dxz a Dyz)

$$\begin{aligned}
 Dxy &= Dyx = \int x \cdot y \cdot dm_i \\
 Dxz &= Dzx = \int x \cdot z \cdot dm_i
 \end{aligned}$$

pak setrvačný moment k ose z má velikost:

$$MDz = \omega^2 \cdot Dxy + \varepsilon \cdot Dxz$$

Podobně k ose y

$$\begin{aligned}
 dMDy &= -dDn \cdot \cos(\varphi) \cdot x + dDt \cdot \sin(\varphi) \cdot x \\
 dMDy &= -\omega^2 \cdot dm \cdot z \cdot x + \varepsilon \cdot dm \cdot y \cdot x \\
 MDy &= -\omega^2 \cdot \int dm \cdot z \cdot x + \varepsilon \cdot \int dm \cdot y \cdot x \\
 MDy &= -\omega^2 \cdot Dxz + \varepsilon \cdot Dxy
 \end{aligned}$$

1.1.1.2 Setrvačné síly ve směrech os

Ve směru osy x nepůsobí žádná setrvačná síla. Dále může pro síly použít buď tečný a normálový směr a výsledky jsou stejně jako u rovinného případu nebo určíme složky ve směrech os y a z.

$$\begin{aligned}
 dDz &= Dn_i \cdot \cos(\varphi) - Dt_i \cdot \sin(\varphi) \\
 \cos(\varphi) &= \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} \\
 \sin(\varphi) &= \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \\
 dDn &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{z^2 + y^2} \\
 dDt &= dm_i \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{z^2 + y^2} \\
 dDz &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{z_i^2 + y_i^2} \cdot \cos(\varphi) - dm_i \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{z_i^2 + y_i^2} \cdot \sin(\varphi) \\
 dDz &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot z_i - dm_i \cdot \varepsilon \cdot y_i
 \end{aligned}$$

Po integraci a použití znalosti o těžišti.

$$Dz = m \cdot \omega^2 \cdot z_T - dm \cdot \varepsilon \cdot y_T$$

Podobně pro osu y lze odvodit:

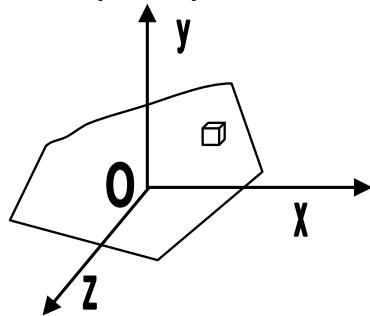
$$\begin{aligned}
 dDy &= dm_i \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{z_i^2 + y_i^2} \cdot \sin(\varphi) + dm_i \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{z_i^2 + y_i^2} \cdot \cos(\varphi) \\
 Dy &= m \cdot \omega^2 \cdot y_T + m \cdot \varepsilon \cdot z
 \end{aligned}$$



Geometrie hmot

U rotačního pohybu jsme se setkali s momenty setrvačnosti hmoty, které souvisí s rozmístěním hmoty vůči souřadnicovým osám. Pro výpočet těchto veličin u tuhých těles je výhodné zavést tyto veličiny tak, aby nesouvisely s osou rotace, ale přímo s tělesem. Z nich pak lze transformací vypočít jejich hodnoty k libovolně natočeným a posunutým osám, aniž by bylo nutno je počítat pokaždé znova. Pro obvyklá tělesa je pak možno hodnoty momentů setrvačnosti najít v tabulkách či vypočít pomocí programů.

Uvažujme kartézský souřadnicový systém (O, x, y, z) – spojený s tělesem. Pro jednoduchost z totožníme bod O s těžištěm tělesa. Kvadratické osové momenty setrvačnosti k osám souřadnicového systému jsou definovány vztahy:



$$\begin{aligned} J_x &= \int_m r T_x^2 \cdot dm = \int_m (y^2 + z^2) \cdot dm \\ J_y &= \int_m r T_y^2 \cdot dm = \int_m (x^2 + z^2) \cdot dm \\ J_z &= \int_m r T_z^2 \cdot dm = \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm \end{aligned}$$

Deviační momenty setrvačnosti jsou definovány

$$\begin{aligned} D_{xy} &= D_{yx} = \int_m x \cdot y \cdot dm \\ D_{xz} &= D_{zy} = \int_m x \cdot z \cdot dm \\ D_{yz} &= D_{zy} = \int_m y \cdot z \cdot dm \end{aligned}$$

Často se všechny momenty vyjadřují maticí setrvačnosti **I**

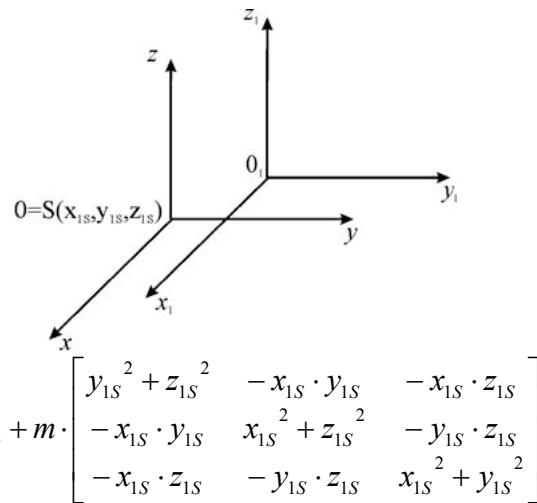
$$I = \begin{bmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & J_z \end{bmatrix}$$

1.1.2 Transformační vztahy

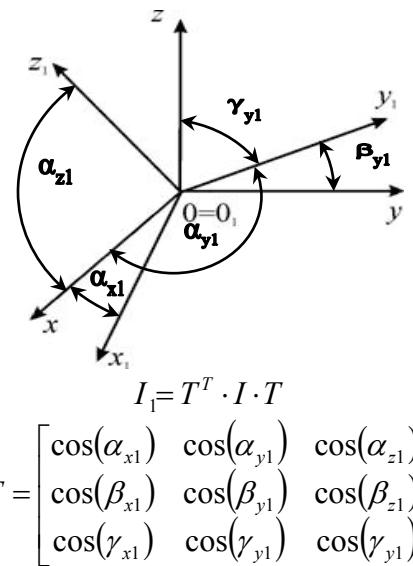
K posunutým osám:

Známe-li matici setrvačnosti I k osám x, y, z procházejícím těžištěm O (osové momenty jsou minimální), pak lze pro momenty setrvačnosti k posunutým osám x₁, y₁; z₁ odvodit Steinerovu větu v prostoru. Počátek O má v souřadném systému x_{1S}; y_{1S}; z_{1S}.





Pro momenty setrvačnosti k pootočeným osám, lze odvodit vztah:



V transformační matici jsou α_{x1} ; α_{y1} ; α_{z1} označeny úhly, které svírají jednotlivé nové osy x1; y1; z1 s původní osou x, podobně β_{x1} ; β_{y1} ; β_{z1} s osou y a γ_{x1} ; γ_{y1} ; γ_{z1} s osou z. T^T znamená transponovanou matici T.

Například pro natočenou osu x1 lze z předchozí rovnice:

$$I_{x1} = I_x \cos^2(\alpha_{x1}) + I_y \cos^2(\beta_{x1}) + I_z \cos^2(\gamma_{x1}) - 2D_{xy} \cos(\alpha_{x1}) \cos(\alpha_{y1}) - 2D_{xz} \cos(\alpha_{x1}) \cos(\alpha_{z1}) - 2D_{yz} \cos(\alpha_{y1}) \cos(\alpha_{z1})$$

Pravděpodobně Vám předcházející vztah připomíná Mohrovy kružnice známé z pružnosti. Matematicky se jedná opravdu o stejně rovnice a je možno také využít tenzorový počet.

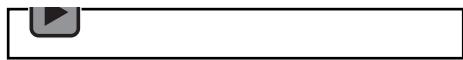
To znamená, jsou-li známy tyto momenty k nějakému souřadnému systému spojenému s tělesem, pak je možno využít předcházejících rovnic k určení momentů k libovolnému jinému kartézskému souřadnému systému.

U tělesa lze souřadný systém vždy natočit tak, aby deviační momenty setrvačnosti byly nulové. Těmto osám se říká hlavní osy setrvačnosti. Je-li počátek souřadného systému totožný s těžištěm, (správněji středem hmotnosti) říká se těmto osám hlavní centrální osy setrvačnosti. Obecně určení těchto os vede na řešení kubické rovnice, ale často lze využít různých symetrií (kulou, krychle,...) či je lze najít v tabulkách.





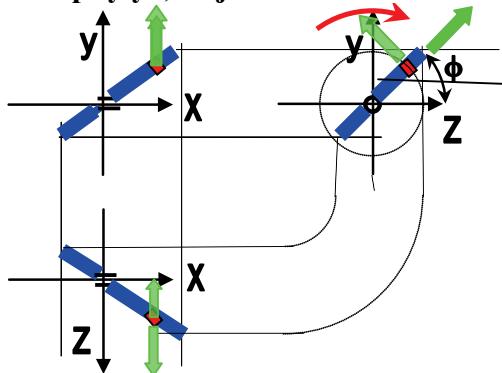
Audio 1.2



Pro tělesa složená z částí, jejichž momenty setrvačnosti k jednotlivým osám známe je výsledný moment setrvačnosti dán jejich součtem k těmto osám. Například pro moment k ose x J_x platí:

$$J_x = \sum_{i=1}^N J_{x_i}$$

Shrnutí setrvačných účinků rotačního pohybu (těleso se otáčí okolo osy x kladné ε je úhlové zrychlení je ve směru šipky y_T ; z_T jsou vzdálenosti těžišť od osy rotace; m).



$$Dx = 0$$

$$Dy = m \cdot \omega^2 \cdot y_T + m \cdot \varepsilon \cdot z_T$$

$$Dz = m \cdot \omega^2 \cdot z_T - dm \cdot \varepsilon \cdot y_T$$

$$MDx = -\varepsilon \cdot J_x$$

$$MDy = -\omega^2 \cdot Dxz + \varepsilon \cdot Dxy$$

$$MDz = \omega^2 \cdot Dxy + \varepsilon \cdot Dxz$$

Po přidání těchto setrvačných účinků k tělesu musí platit rovnice pseudorovnováhy:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_x + MDx = 0$$

$$\sum F_y + Dy = 0 \quad \sum M_y + MDy = 0$$

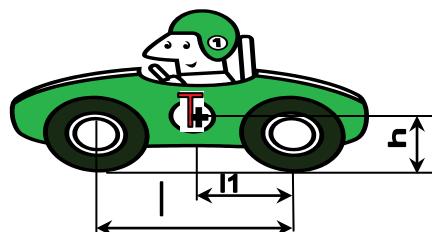
$$\sum F_z + Dz = 0 \quad \sum M_z + MDz = 0$$



1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.2.1 Příklad 1

Osobní vozidlo o hmotnosti **mA=800 kg** jede rychlostí **v0=60 km.h⁻¹**. V daném místě začne brzdit a jeho rychlosť začne s konstantním zpožděním v čase lineárně klesat, přičemž vozidlo má zastavit na dráze **L=48 m**. Z důvodu poruchy hlavních brzd však brzdí pouze ruční brzdou na zadních kolech.



Určete velikost potřebného zpoždění, aby zastavilo na dané dráze.

Určete, zda nedojde k prokluzu zadních kol, je-li koeficient tření mezi koly a vozovkou **f0=0,65**.

Dojde-li k prokluzu, určete velikost dosaženého zpomalení a výslednou brzdnou dráhu je-li koeficient tření při proklouznutí **f=0,55**.

Určete též velikost potřebného brzdícího momentu na nápravě zadních kol **Md**, je-li jejich průměr **d=320 mm**.

V řešení výslovňě uveďte, zda dojde k prokluzu.

Rozvor náprav je **l=3,4 m**, těžiště vozidla se nachází ve vzdálenosti **l1=2 m** před zadní nápravou, ve výšce **h=1 m** nad úrovní vozovky.

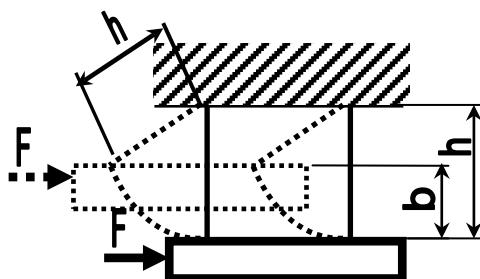
Výsledky:(potřebné zrychlení ($a_p=2,894 \text{ m.s}^{-2}$; dojde k prokluzu je tedy nutno počítat dále s f a nikoliv f_0 ; maximálně dosažitelné zrychlení je $a_{max}=1,912 \text{ m.s}^{-2}$; minimální dráha, na které je možno zastavit je $s=72,65 \text{ m}$; je-li po 48 m překážka, narazí do ní auto po intenzivním brzdění rychlostí $v_n=34,95 \text{ km/h}$;

Velikost brzdícího momentu na zadní nápravě (obě kola dohromady) je **M=244,7 N.m**.



1.2.2 Příklad 2

Při dobývání hradu se používalo beranidlo, což byla kláda zavěšená pomocí lan ke konstrukci. Kláda se nejprve zvedla a pak byla roztačována proti dveřím. Určete, kolik bylo zapotřebí vojáků, aby byla kláda o hmotnosti $m=100 \text{ kg}$ roztačena na rychlosť $v=10 \text{ m s}^{-1}$ ve své nejnižší poloze (pasivní odpory zanedbejte). Kláda se pohybuje jednak díky své tíze a také díky roztačování vojáky. Původní poloha je dána tečkovanou čarou a rozměry ($h=1.6 \text{ m}$ a $b=0.9 \text{ m}$). Délka lana h se nemění. Jeden voják vyvine sílu $F=300 \text{ N}$ ve vodorovném směru. Síla F je součtem sil všech vojáků. Předpokládejte, že se ve vodorovném směru jedná o konstantní sílu. Určete také síly v lanech.



Výsledky 10 vojáků, síla v lanech v dolní poloze $S_{lana}=3615 \text{ N}$.

1.2.3 Příklad 3

Vypočtěte hmotový moment J setrvačnosti hřídele k ose otáčení, jestliže je jeho pohybová energie $W_k=690 \text{ J}$ a jeho otáčky jsou $n=410 \text{ min}^{-1}$

Výsledek $J=0,749 \text{ kg.m}^2$.

1.2.4 Příklad 4

Na hřídeli o tenkém průměru je upevněn ocelový kotouč o průměru $D=2680 \text{ mm}$, šírky $b=86 \text{ mm}$. jeho otáčky jsou $n=218 \text{ min}^{-1}$ jak velký brzdící moment M_b musí působit na kotouč, aby se zastavil po čtyřech otáčkách.

Výsledek $M_b=-35220 \text{ N.m}$.

1.2.5 Příklad 5

Kotouč, jehož osa rotační symetrie má svislý směr má hmotnost $m=218 \text{ kg}$ a průměr $D=1,7 \text{ m}$. Jeho otáčky jsou $n_0=1850 \text{ min}^{-1}$, **Jakých otáček** n dosáhne kotouč, jestliže na něj začne působit stálý moment $M=850 \text{ N.m}$ po dobu $t=14 \text{ s}$?

Momentem působíme:

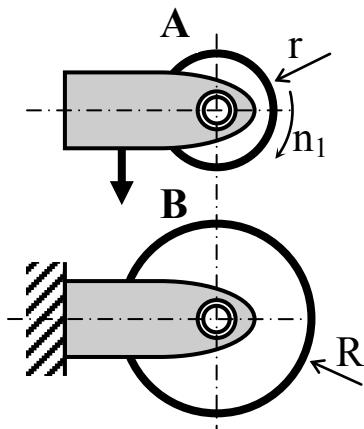
- Ve směru otáčení (**Výsledek $n_1=3293 \text{ ot.min}^{-1}$**)
- Proti směru otáčení (**Výsledek $n_2=407,0 \text{ ot.min}^{-1}$**).

1.2.6 Příklad 6

Disk o hmotnosti m_B a poloměru r_B je volně (bez pasivních odporů) uložen v kloubu B a je v klidu. Disk A o hmotnosti m_A a poloměru r_A je rovněž volně uložen v posuvném kloubu A nad diskem B. Disk A je roztočen na počáteční úhlovou rychlosť ω_{A0} a po té položen na disk B (je k němu přitlačován pouze vlastní tíhou). Rotace disku A je třením mezi disky brzděna, zatímco disk B je urychlován. Koeficient tření mezi disky je f . **Určete** úhlové zpoždění ϵ_A disku A a úhlové zrychlení ϵ_B disku B. **Určete**, za jaký čas t dojde k vyrovnaní obvodových



rychlostí obou disků a jakou úhlovou rychlostí ω_{Ak} resp. ω_{Bk} se v tom okamžiku budou oba disky otáčet. Moment setrvačnosti disku je $J=1/2.(m.r^2)$.



$$mA = 2,6 \text{ kg}$$

$$rA = 7,5 \text{ cm}$$

$$mB = 4,5 \text{ kg}$$

$$\omega_{A0} = 92 \text{ s}^{-1}$$

$$f = 0,05$$

$$rB = 9 \text{ cm}$$

$$\omega_{B0} = 0 \text{ s}^{-1}$$

Výsledky:

$$\varepsilon_A = 13,08 \text{ s}^{-2}$$

$$\varepsilon_B = 6,296 \text{ s}^{-2}$$

$$t = 4,459 \text{ s}$$

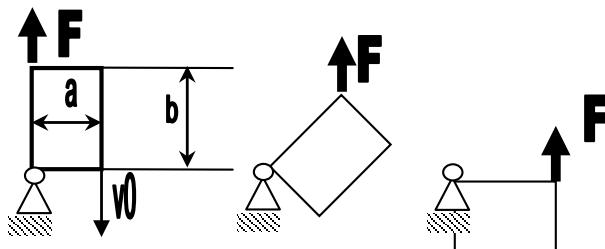
$$\omega_{Ak} = 33,69 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{Bk} = 28,08 \text{ s}$$

$$v_{\text{obvodová}} = 2,527 \text{ m.s}^{-1}$$

1.2.7 Příklad 7

Homogenní těleso tvaru kvádru o hmotnosti m a rozměrech a ; b (třetí rozměr nás nezajímá) je kloubově uloženo. Jeho delší strana má na počátku svislou polohu, pravý dolní roh se pohybuje počáteční rychlosť v_0 . Na levý horní roh působí svisle konstantní síla F , určete její velikost potřebnou k tomu, aby se těleso zastavilo po pootočení o 90 stupňů (obrázek).



$$a = 110 \text{ mm}$$

$$b = 190 \text{ mm}$$

$$m = 3,9 \text{ kg}$$

$$v_0 = 1,8 \text{ m.s}^{-1}$$

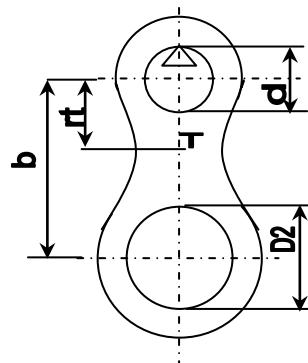


Nápoředa: Moment setrvačnosti kvádru k těžišti je $1/12.m.(a^2+b^2)$.

Výsledek F=74,34 N.

1.2.8 Příklad 8

Ojnice klikového mechanismu má hmotnost m, funkční délka ojnice je b (vzdálenost středů ložiskových těles A a B viz obrázek). Těžiště ojnice T leží na její podélné ose ve vzdálenosti r_T od středu A. Moment setrvačnosti ojnice bude zjištěn experimentálně z doby kyvu. Ojnice byla zavěšena v bodě Z na obvodu horního ložiskového tělesa s průměrem d. Byla změřena doba kyvu (perioda) T (při kývání s velmi malým úhlem výkyvu).



Určete moment setrvačnosti ojnice I_Z k závěsnému bodu Z, dále moment setrvačnosti k těžišti It a moment setrvačnost I_B ke středu dolního ložiskového tělesa B.

$$m_O = 65 \text{ kg}$$

$$b = 320 \text{ mm}$$

$$r_T = 190 \text{ mm}$$

$$d = 85 \text{ mm}$$

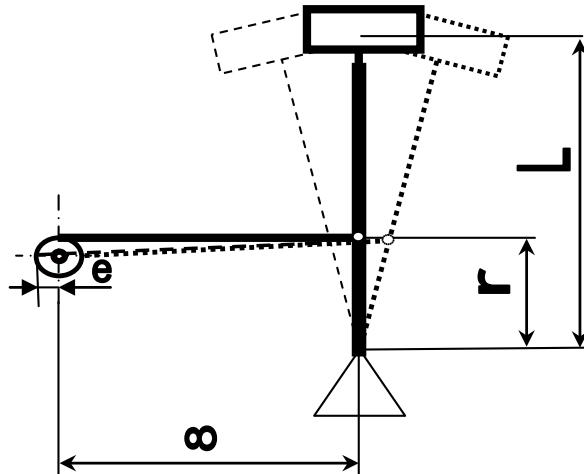
$$T = 1,2 \text{ s}$$

Výsledky $I_Z = 5,406 \text{ kg.m}^2$; $I_T = 1,892 \text{ kg.m}^2$ $I_B = 2,991 \text{ kg.m}^2$.



1.2.9 Příklad 9

Vahadlo je tvořeno homogenní tyčí délky L o hmotnosti mT a břemenem o hmotnosti mB, jehož hmota je koncentrována v malém objemu na konci tyče. Vahadlo koná kývavý pohyb okolo svislé střední polohy (v rozsahu velmi malého úhlu na obě strany). Pohyb je vyvolán rotací excentru o excentricitě e a na vahadlo se přenáší vzpěrou. Vzdálenost připojení vzpěry od osy rotace je r. Délka vzpěry je mnohonokrát větší, než excentricita excentru (tzn., že vzpěru lze s velmi malou chybou považovat za neustále vodorovnou). Hmotnost vzpěry je zanedbatelná. Excentr rotuje konstantními otáčkami ne.



Určete: Silové poměry dané setrvačnými účinky v závislosti na úhlu natočení excentru ϕ . Určete závislost osové síly osové síly ve vzpěře S na úhlu natočení excentru a její maximální hodnotu Smax. Vodorovnou a svislou složku Rx a Ry složku reakce v kloubu uložení vahadla vůči rámu, jakož i výslednou reakci R. Určete hnací moment excentru MH a jeho maximální hodnotu MHmax.

hmotnost kladiva **mB=5,8 kg**;

hmotnost tyče **mT=1,5 kg**;

konstantní otáčky excentru **ne=1200 min⁻¹**

L=690 mm

e=8 mm

r=170 mm



The simulation shows a mechanical system consisting of a horizontal beam pivoted at its left end. A rectangular mass hangs from the right end of the beam. A circular counterweight is attached to the beam at an angle from the pivot. The beam rotates clockwise, causing the counterweight to swing outwards. The background features a dashed elliptical path centered on the pivot. On the right side of the interface, there is a vertical sidebar with several sections:

- Tvorba**: Contains the text "Dynamika rotačního pohybu".
- Obrázek excentru s excentricitou**: Contains the text "a vyvážuje pohyb vahadla. K obvodu excentru je připojena vzpěra, kterou se pohyb excentru přenáší na vahadlo".
- Ovládání**: Contains a "START" button.
- Info**: Contains a "INFO" button.

A large play button icon is located in the bottom-left corner of the main simulation area.

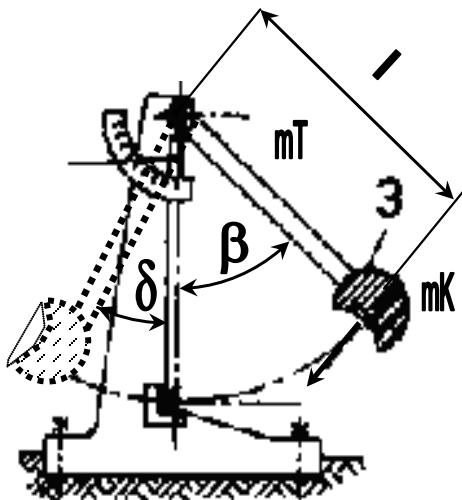
Některé výsledky:

Vzdálenost těžiště od osy rotace $rt=619,1 \text{ mm}$;
Moment setrvačnosti k ose rotace $J=2,999 \text{ kg.m}^2$;
Maximální úhel vahadla $\psi_{\max}=2,696^\circ$;
Maximální úhlová rychlosť vahadla $\omega_{\max}=5,914 \cdot s^{-1}$
Maximální úhlové zrychlení vahadla $\epsilon_{\max}=743,1 \cdot s^{-2}$;
Maximální síla ve vzpěře $S_{\max}=1311 \text{ N}$,
Maximální hnací moment excentru $M_{h\max}=52,45 \text{ N.m}$.



1.2.10 Příklad 10

Při určování vrubové houževnatosti se používá **Charpyho kladivo**. Charpyho kladivo se skládá z Tyče délky $l=1 \text{ m}$ o hmotnosti $mT=4 \text{ kg}$ a vlastního kladiva o hmotnosti $mK=10 \text{ kg}$. V nejnižší poloze je přerážena destička. Na počátku pohybu je kladivo v klidu a je v poloze dané úlem $\beta=60^\circ$. Po přeražení destičky vystoupí kladivo tak, že jeho poloha bude dána úhlem $\delta=20^\circ$. (nezanedbejte rotaci tyče).



$$\begin{aligned} l &= 1 \text{ m} \\ mT &= 4 \text{ kg} \\ mK &= 10 \text{ kg} \\ \beta &= 60^\circ \\ \delta &= 20^\circ \end{aligned}$$

Určete:

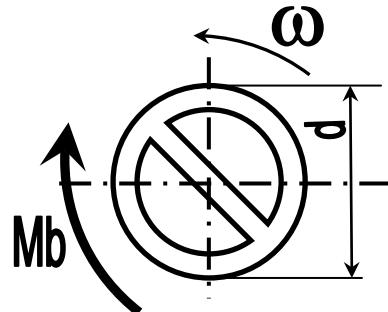
- 1) Vzdálenost společného těžiště tyče a kladiva od osy rotace. (Výsledek $rt=0,8571 \text{ m}$).
- 2) Jakou rychlosť mělo kladivo před přeražením vzorku. (Výsledek $v1=3,222 \text{ m.s}^{-1}$).
- 3) Jaká práce byla spotřebována na přeražení vzorku. (Výsledek $W=51,74 \text{ J}$).
- 4) Jakou rychlosť mělo kladivo těsně po přeražení vzorku. (Výsledek $v2=1,119 \text{ m.s}^{-1}$)

Ná pověda: **Moment** setrvačnosti kladiva včetně tyče k ose rotace je $J=\frac{1}{3}mT.l^2+mK.l^2$ (uvažujte rotační pohyb kladiva).



1.2.11 říklad 11

Otočné dveře u vstupu do budovy se otáčejí konstantní úhlovou rychlosí tak, že vykonají jednu celou otáčku za čas $T=25 \text{ s}$. Průměr dveří je $d=4 \text{ m}$. Dveře mají moment setrvačnosti $J=500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. V případě že do dveří někdo vejde později, spustí brzdu, která má zastavit dveře tak, aby se bod na obvodu posunul maximálně o délku $l=10 \text{ cm}$. Určete jakým konstantním brzdným momentem $M_b=?$ musí být dveře brzděny.



$$\begin{aligned} T &= 25 \text{ s}, \\ d &= 4 \text{ m}, \\ J &= 500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ l &= 10 \text{ cm} \\ M_b &=? \end{aligned}$$

Výsledek $M_b = -315, \text{ N}\cdot\text{m}$

Rady: Pokoušejte se příklady řešit různými způsoby a porovnejte obtížnosti.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Kinematika obecného rovinného pohybu

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA OBECNÉHO ROVINNÉHO POHYBU	3
1.1	Kinematika obecného rovinného pohybu.....	4
1.1.1	Pólová konstrukce.....	4
1.1.2	Základní rozklad	6
1.1.3	Obecný rozklad	10
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	14



1 KINEMATIKA OBECNÉHO ROVINNÉHO POHYBU



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinematika obecného rovinného pohybu.
Pólová konstrukce.
Základní rozklad.
Obecný rozklad.



MOTIVACE:

Kola aut jedoucího rovně, klika klikového mechanismu a mnoho dalších těles vykonávají obecný rovinný pohyb. Znát kinematiku obecného rovinného pohybu znamená vědět, jak se hýbe každý bod tělesa. V této části se jedná také o přípravu pro kapitolu dynamika obecného rovinného pohybu.



CÍL:

Kinematika obecného rovinného pohybu. (řešení pomocí pólové konstrukce, řešení pomocí rozkladů pohybu).



1.1 KINEMATIKA OBECNÉHO ROVINNÉHO POHYBU

Obecný rovinný pohyb (O. R. P.): Je rovinný pohyb, který není ani posuvný ani rotační. Tento pohyb má až tři stupně volnosti.

Kinematiku O. R. P. lze řešit několika způsoby:

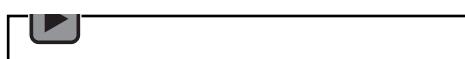
- 1) Pólovou konstrukcí, kterou lze řešit jen rychlosti.
- 2) Rozklady pohybu na jednodušší typy pohybů.
 - Základním rozkladem, kdy obecný rovinný pohyb rozložíme na unášivý pohyb posuvný a relativní rotaci.
 - Obecným rozkladem, kdy obecný rovinný pohyb rozložíme na unášivý pohyb rotační a relativní pohyb rotační nebo i posuvný.
- 3) Analytickou metodou.

1.1.1 Pólová konstrukce

Hlavní myšlenka je taková, že z pólu pohybu π lze vidět rychlosti všech bodů pod stejným zorným úhlem ϵ . Pól pohybu je takové místo, které má v daném okamžiku nulovou rychlosť, leží v průsečíku normál k trajektoriím bodů tělesa a nemusí být přímo na tělese. Při odvalování tělesa po podložce bez prokluzování je také bodem dotyku tělesa s podložkou. Vypadá to jako by se těleso v daném okamžiku otáčelo okolo okamžitého středu otáčení, ale poloha tohoto středu se mění. Pro nalezení pólu pohybu musíme znát buď normály k trajektoriím dvou různých bodů, nebo víme, že se jedná o odvalování a pak je to bod vzájemného dotyku. Pól má v daném okamžiku vždy nulovou rychlosť.

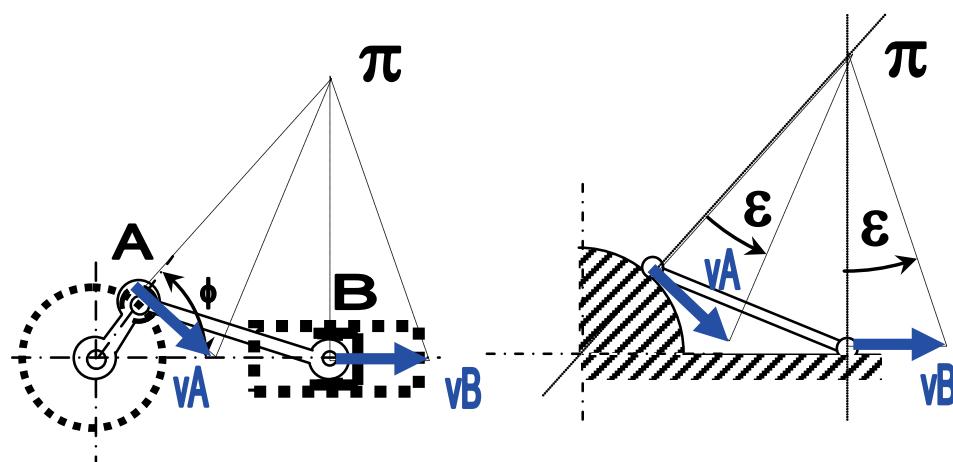


Audio 1.1 Pólová konstrukce.

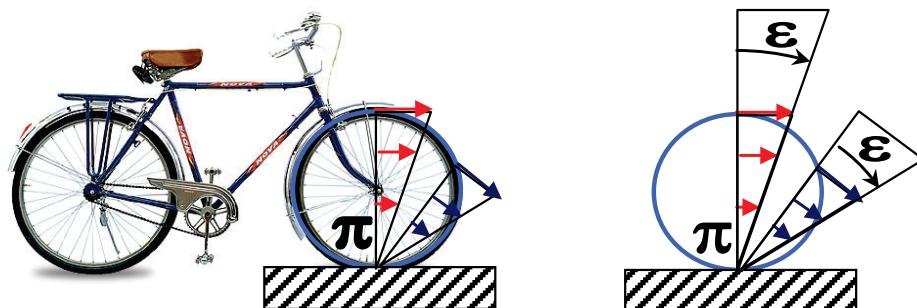


Příklady pólových konstrukcí (jen rychlosti!!).

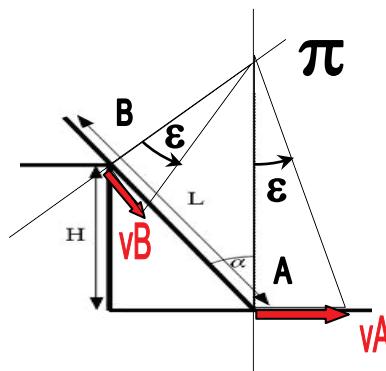
Všimněte si, že z bodu π (pólu pohybu) jsou vidět rychlosti pod stejným zorným úhlem ϵ . Ojnice klikového mechanismu:



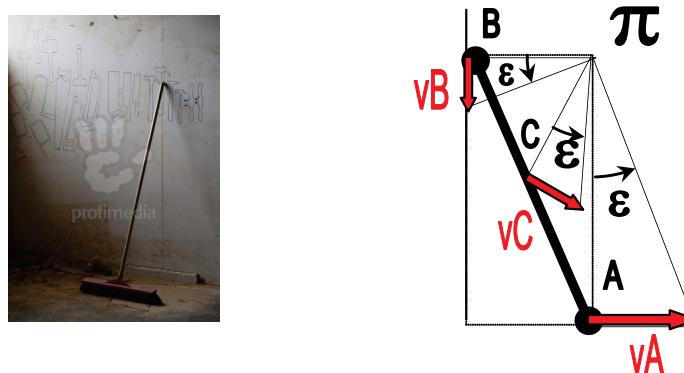
Jízdní kolo (s polem rychlostí):



Část žebříku přečnívající přes okraj:



Smeták opřený o zeď (mohlo by se jednat i o žebřík opřený o stěnu):



Pro určení rychlosti kteréhokoliv bodu stačí znát polohu pólu pohybu, vzdálenosti mezi body a polem a rychlosť jednoho z bodů, který není totožný s pólem pohybu. Z poměru tangent lze pak vyjádřit například poměry rychlosťí pro body A, B, X a jejich vzdálenosti od pólu na normálách $|\pi A|$; $|\pi B|$; $|\pi X|$. Tento poměr je roven úhlové rychlosťi ω vůči základnímu prostoru. Směr rychlosťí je pak kolmý k normálám a jejich orientace je pak dána relativním otáčením okolo pólu buď ve směru či proti směru hodinových ručiček.



$$\frac{vA}{|\pi A|} = \frac{vB}{|\pi B|} = \frac{vX}{|\pi X|} = \operatorname{tg}(\varepsilon) = \omega$$

1.1.1.1 Postup řešení půlovou konstrukcí:

- 1) Určíme pól pohybu (leží v průsečíku normál k trajektoriím, u odvalování se jedná o bod dotyku).
- 2) Známe rychlosť jednoho bodu tělesa mimo pól pohybu.
- 3) Určíme vzdálenosti mezi bodem se známou rychlosťí a pólem a mezi vyšetřovaným bodem a pólem.
- 4) Určíme rychlosť vyšetřovaného bodu.

Rozklady pohybu.

Při řešení O. R. P. pomocí rozkladu se rozkládá obecný rovinný pohyb na dva jednodušší rovinné pohyby: unášivý pohyb a relativní pohyb. V případě základního rozkladu je unášivý pohyb posuvný a relativní pohyb rotační a v případě obecného rozkladu je unášivý pohyb rotační. Pro určení zrychlení vyšetřovaného bodu je nutno znát střed křivosti jeho trajektorie, což v některých případech vyžaduje znalosti Euler-Savaryho věty a znalosti kinematické geometrie, která v tomto materiálu nebude probrána. Pokud jsou trajektorie a střed její křivosti vyšetřovaného bodu známy pak je řešení pomocí rozkladu pohybu jednodušší.

1.1.2 Základní rozklad

Unášivým pohybem je pohyb posuvný referenčního bodu a relativní rotace okolo referenčního bodu. Využívá se toho, že u posuvného pohybu mají všechny body ve stejném okamžiku stejné rychlosťi i zrychlení.



Audio 1.2 Další zjednodušující předpoklady



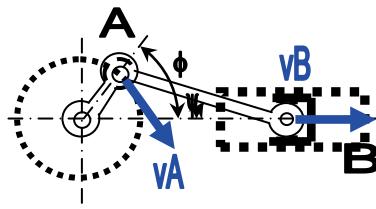
O. R. P. = unášivý pohyb posuvný +relativní rotace

Výsledná rychlosť vyšetřovaného bodu $v_{výs}$ je vektorovým součtem unášivé rychlosťi referenčního dobu v_{un} a relativní rychlosť vyšetřovaného bodu vůči referenčnímu bodu v_{rel} .

$$\vec{v}_{výs} = \vec{v}_{un} + \vec{v}_{rel}$$

Podobný vztah platí i pro zrychlení. Výsledné zrychlení vyšetřovaného bodu $a_{výs}$ je vektorovým součtem unášivého zrychlení referenčního dobu a_{un} , a relativního zrychlení vyšetřovaného bodu vůči referenčnímu bodu a_{rel} . Obvykle u zrychlení známe tečné a normálové složky zrychlení a_t a a_n to znamená, že se ve vztahu objeví až šest složek zrychlení. Každá ze složek je dána nejen velikostí, ale i směrem.

$$\begin{aligned}\vec{a}_{výs} &= \vec{a}_{un} + \vec{a}_{rel} \\ \vec{a}_{výs_t} + \vec{a}_{výs_n} &= \vec{a}_{un_t} + \vec{a}_{un_n} + \vec{a}_{rel_t} + \vec{a}_{rel_n}\end{aligned}$$



Nejlépe je rozklad možno pochopit na příkladu. *V tomto příkladu nás nemusí zajímat, že se jedná o mechanismus, sledujeme-li jen pohyb ojnice, která se pohybuje obecným rovinným pohybem. Pohyb bodu A je dán zadaným pohybem kliky.*

Příklad

Je dána úhlová rychlosť kliky ω (orientace proti směru hodinových ručiček), úhlové zrychlení kliky ϵ orientace ve směru hodinových ručiček, poloměr kliky r , délka ojnice l , úhel natočení kliky φ . Určete rychlosť a zrychlení pístu v B, aB v dané poloze kliky. V tomto případě se ojnice pohybuje O. R. P. rychlosť a zrychlení jejího bodu A lze snadno vypočít a o bodu B (pístu) víme, že jeho rychlosť a zrychlení má vodorovný směr.

Určení rychlostí (za referenční bod byl zvolen bod A-spojení kliky a ojnice)

Rychlosť bodu referenčního A ojnice:

Klika vykonává rotační pohyb a bod A se pohybuje po kružnici o poloměru r úhlovou rychlosť ω .



Velikost rychlosti v_A .

$v_A = \omega \cdot r$ směr rychlosti v_A je dán úhlem natočení kliky ϕ .



Relativní rychlosť v_{AB} je rychlosť bodu B vůči bodu A. Tato rychlosť je kolmá k ojnici a její velikost zatím neznáme. Úhel ψ lze vypočítat např. ze vztahu $r \sin(\phi) = l \sin(\psi)$.



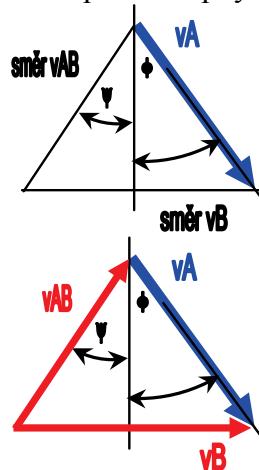
Výsledná rychlosť je rychlosť bodu B. Tato rychlosť má v našem případě směr vodorovný a její velikost zatím neznáme.



Musí platit rovnice:

$$\vec{v}_{vys} = \vec{v}_{un} + \vec{v}_{rel}$$

Tuto rovnici lze vyjádřit obrázkem, kde doplníme šipky tak, aby odpovídaly rovnici.



Ve složkách:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

vodorovně:

$$|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| \cdot \sin(\phi) + |\vec{v}_{BA}| \cdot \sin(\psi)$$

svisle:

$$0 = -|\vec{v}_A| \cdot \cos(\phi) + |\vec{v}_{BA}| \cdot \cos(\psi)$$

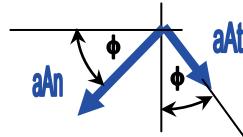
Jedná se o dvě lineární rovnice o dvou neznámých. V těchto rovnicích jsou neznámé velikosti rychlostí v_B a v_{AB} , které snadno vypočteme. Vyjde-li rychlosť záporně pak má opačnou orientaci než na obrázku.



1.1.2.1 Zrychlení

Zrychlení bodu A kliky:

Klika vykonává rotační pohyb a pro bod A můžeme určit dvě složky zrychlení (tečnou a_{At} a normálovou a_{An}).



Zrychlení referenčního bodu A

Velikost tečného zrychlení $a_{At} = \epsilon \cdot r$

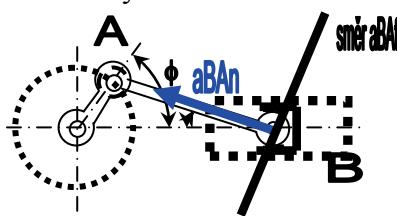
Velikost normálového zrychlení $a_{An} = \omega^2 \cdot r$

Směry složek zrychlení bodu A jsou vidět na obrázku.

Relativní zrychlení bodu B vůči bodu A:

$$a_{BA_n} = \frac{v_B A}{l}$$

Velikost normálové složky relativního zrychlení.



U tečné složky relativního zrychlení známe jen směr.

Zrychlení bodu B:

Normálová složka je nulová, protože bod B se pohybuje po přímce (nekonečný poloměr).

$$a_{Bn}=0$$

$$a_{BA_n} = \frac{v_B}{\infty} = 0$$

Tečná složka zrychlení bodu B má v našem případě směr vodorovný a její velikost zatím neznáme.

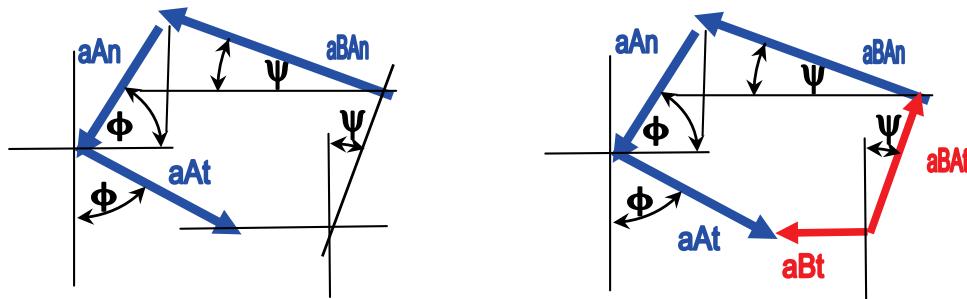
Rovnici:

$$\vec{a}_{výs} = \vec{a}_{un} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{výs_t} + \vec{a}_{výs_n} = \vec{a}_{unt} + \vec{a}_{unn} + \vec{a}_{rel_n} + \vec{a}_{rel_t}$$



lze vyjádřit obrázkem:



Ve složkách:

$$|-\vec{a}B| = |\vec{a}At| \cdot \sin(\phi) + |\vec{a}BAt| \cdot \sin(\psi) - |\vec{a}BAn| \cdot \cos(\psi) - |\vec{a}An| \cdot \cos(\phi)$$

$$0 = -|\vec{a}At| \cdot \cos(\phi) + |\vec{a}BAt| \cdot \cos(\psi) + |\vec{a}BAn| \cdot \sin(\psi) - |\vec{a}An| \cdot \sin(\phi)$$

Z těchto rovnic opět vypočteme velikosti neznámých složek aBAt a především aBt, které je v našem případě rovno celkovému zrychlení aB.

1.1.3 Obecný rozklad

Obecný rozklad se od základního liší tím, že unášivý pohyb je rotační. V důsledku toho se ve výpočtu objeví tzv. Coriolisovo zrychlení. Toto zrychlení si můžete představit například tak, že po otáčející se (konstantní otáčky) staré gramofonové desce leze brouk konstantní rychlostí vůči desce. Jeho celková rychlosť se zvyšuje s tím, jak se blíží okraji desky. Pokud jeho rychlosť roste, pak díky nějakému zrychlení.



Po odvození bychom dostali složku zrychlení, které se nazývá Coriolisovo a je jej možno vypočítat obecně jako:

$$\vec{a}c = 2 \cdot \vec{\omega}_u \times \vec{v}_{rel}$$

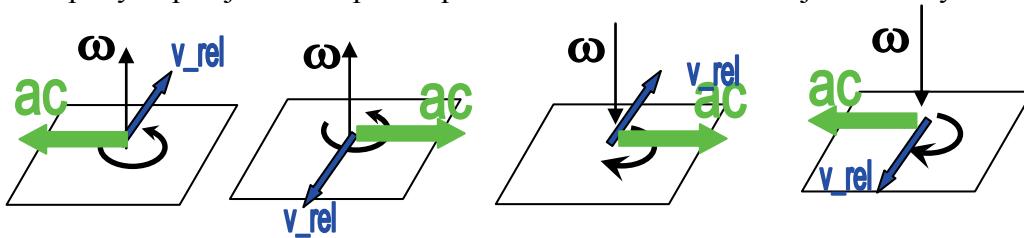
kde:

ω_u - je unášivá úhlová rychlosť

v_{rel} - je relativní rychlosť



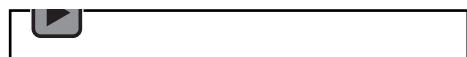
Jedná se o vektorový součin dvou vektorových veličin, jehož výsledek je vždy kolmý k oběma vektorům a pravotočivý. Při rovinných pohybech je vektor úhlové rychlosti kolmý k relativnímu pohybu pak je možno použít pro určení orientace následující obrázky.



Odvození lze najít v učebnicích např. [2] **Kinematika Brát V, Rosenberg J. Jáč V.** V prostoru je třeba více brát do úvahy unášivou úhlovou rychlosť a relativnú rychlosť akožto vektory.

Obecný rozklad pohybu rozkládá obecný rovinný pohyb na unášivý pohyb rotační a relativní pohyb (rotační nebo posuvný).

Audio 1.3 Další zjednodušující předpoklady



O. R. P. = unášivý pohyb rotační +relativní pohyb (rotace nebo posuv).

Výsledná rychlosť vyšetřovaného bodu $v_{výs}$ je vektorovým součtem unášivé rychlosťi a relativní rychlosťi.

$$\vec{v}_{výs} = \vec{v}_{un} + \vec{v}_{rel}$$

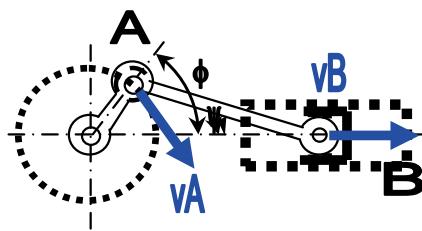
Výsledné zrychlení vyšetřovaného bodu $a_{výs}$ je vektorovým součtem unášivého zrychlení relativního zrychlení a_{rel} a Coriolisova zrychlení a_{cor} . Obvykle u zrychlení známe tečné a normálové složky zrychlení a_t a_n to znamená, že se ve vztahu objeví až sedm složek zrychlení. Každá ze složek má nejen velikost, ale i svůj směr.

$$\vec{a}_{výs} = \vec{a}_{un} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_{výs_t} + \vec{a}_{výs_n} = \vec{a}_{unt} + \vec{a}_{unn} + \vec{a}_{rel_n} + \vec{a}_{rel_t} + \vec{a}_{cor}$$

Nejlépe je to možno pochopit na příkladu (stejný jako u základního rozkladu):

Příklad



Je dána úhlová rychlosť klyky ω (orientace proti směru hodinových ručiček), úhlové zrychlení klyky ϵ (orientace ve směru hodinových ručiček), poloměr klyky r , délka ojnice l , úhel natočení klyky ϕ . Určete rychlosť a zrychlení pístu v_B , a_B v dané poloze klyky.



Řešení:

Tutoria
Kinematika obecného rovinného pohybu

Obsah

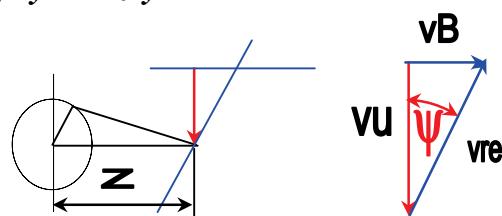
Úvod

Stav

Mov

Musíme uvažovat s rychlostmi a zrychleními pístu.

1.1.3.1 RYCHLOSTI mají tyto složky:



- 1) **Unášivá rychlosť pístu:** Zde známe smér i orientaci i velikost $v = z \cdot \omega$
 z je vzdálosť mezi pístom a osou kľíky.
- 2) **Relativná rychlosť pístu:** Zde známe smér (je kolmý na ojnicu).
- 3) **Výsledná rychlosť pístu:** Zde známe její smér (je vodorovný).

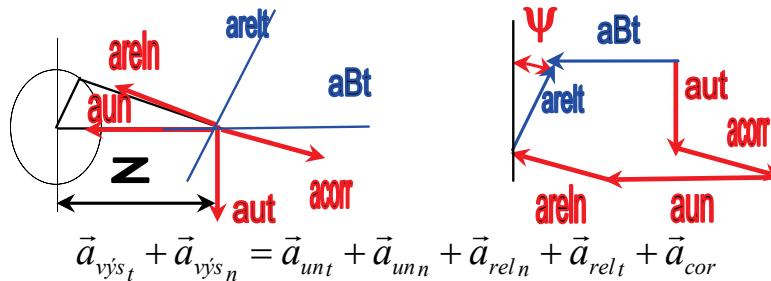
Pro numerické je nutná znalosť základní trigonometrie.

1.1.3.2 ZRYCHLENÍ má tyto složky:

- 1) **Unášivé normálové zrychlení pístu:** Zde známe smér orientaci i velikost $a_{un} = z \cdot \omega^2$.
- 2) **Unášivé tečné zrychlení pístu:** Zde známe smér orientaci i velikost $a_{ut} = z \cdot \varepsilon$.
- 3) **Relativná normálové zrychlení pístu:** Zde známe smér, orientaci i velikost $a_{relm} = v_{rel}^2 / l$.



- 4) **Relativní tečné zrychlení pístu:** Zde známe směr (je kolmý na ojnicí).
- 5) **Zrychlení Coriolisovo:** Zde známe směr (kolmo k vrel, orientaci podle ω a vrel) velikost $a_{cor}=2.b.v_{rel}$.
- 6) **Výsledné normálové zrychlení pístu:** Zde je nulové (čili známe směr velikost i orientaci).
- 7) **Výsledné tečné zrychlení pístu:** Zde známe směr (zde vodorovný).



Pro numerické řešení je nutná znalost základní trigonometrie. Lze určit velikosti relativního tečného zrychlení a zrychlení pístu (je totožné s tečným zrychlením pístu).



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Analytická metoda

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	ANALYTICKÁ METODA	3
1.1	Analytická metoda	4
1.1.1	Příklady k procvičení.....	6
1.2	Dynamika obecného rovinného pohybu	7
1.2.1	Příklady k procvičení.....	8
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 ANALYTICKÁ METODA



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Analytické metoda.

Příklady k procvičení.

Dynamika obecného rovinného pohybu.

Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Analytická metoda pro řešení kinematiky je možno použít nejen u obecného rovinného pohybu. Obecné principy této metody platí pro jakékoliv těleso či mechanismu bez ohledu na počet dimenzí prostoru.

Dynamika obecného rovinného pohybu je značně usnadněná znalostí dynamiky posuvného a rotačního pohybu. Znáte-li dynamiku obecného rovinného pohybu, můžete spočítat například, za jak dlouho sjede válec z kopce.



CÍL:

Analytické řešení kinematiky obecného rovinného pohybu.

Dynamika obecného rovinného pohybu (základní rozklad).

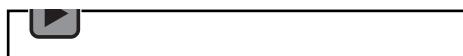


1.1 ANALYTICKÁ METODA

Analytické řešení obecného rovinného pohybu je založeno na geometrických vztazích a na definici rychlosti a zrychlení. Nejprve je nutno nalézt úlohu polohy a pak nalézt pomocí časových derivací hledané rychlosti a zrychlení. Pro sestavení úlohy polohy jsou nutné znalosti geometrie. Sestavit úlohu polohy je možno více způsoby. Jednomu způsobu se říká vektorová metoda, jinému trigonometrická. Při časových derivacích je vždy nutno si dobře uvědomit, které z derivovaných veličin (délka a úhlů) se s časem mění. Je také nutno brát v úvahu, že kladná derivace je ve směru narůstající souřadnice ať už délkové či úhlové. Pomocí analytické metody lze řešit jakýkoliv pohyb ať už v rovině nebo prostoru.



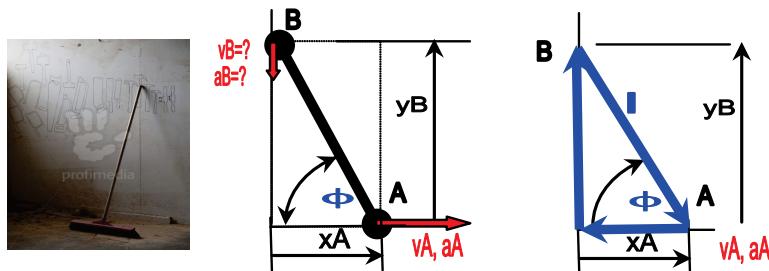
Audio 1.1 Analytická metoda.



Postup lze vysvětlit na příkladu:

Příklad

Tyč je opřena o roh zdi a sesouvá se, jsou dány délka tyče l , vzdálenost x_A a rychlosť a zrychlení bodu A. Určete rychlosť a zrychlení bodu B. J



- a) Sestavení úlohy polohy vektorovou metodou znamená, že vytvoříme řetězec vektorů, jehož součet je v našem příkladu roven nule. Tuto rovnici rozepíšeme do složek (v rovině do dvou).

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{x}_A + \vec{y}_A + \vec{l} \\ 0 &= -x_A + l \cdot \sin(\phi) \\ 0 &= y_B - l \cdot \cos(\phi)\end{aligned}$$

Z těchto obecně nelineárních rovnic vypočteme y_B a úhel ϕ . V dalším kroku je výhodné provést časové derivace těchto rovnic. Je vždy nutno si uvědomit co v rovnicích se s časem mění! Zde se mění vzdálenost x_A její první derivací podle času je pak rychlosť bodu A v_A a druhou derivací je zrychlení bodu A a_A ; vzdálenost y_B její první derivací podle času je pak rychlosť bodu B v_B a druhou derivací je zrychlení bodu B a_B ; úhel ϕ jeho první derivací podle času je pak úhlová rychlosť ω tyče a druhou derivací je úhlové zrychlení tyče ϵ . Délka tyče se nemění. Kladná znaménka jsou ve směru narůstajících souřadnic to je x_A doprava; y_B vzhůru; ϕ ve směru hodinových ručiček.

Pro rychlosť a zrychlení pak platí:

$$\begin{array}{lll}\dot{x}_A = v_A & \dot{y}_B = v_B & \dot{\phi} = \omega \\ \ddot{x}_A = \ddot{v}_A = a_A & \ddot{y}_B = \ddot{v}_B = a_B & \ddot{\phi} = \ddot{\omega} = \epsilon\end{array}$$



rychlosti

$$\begin{aligned} 0 &= -vA + l \cdot \cos(\phi) \cdot \omega \\ 0 &= vB + l \cdot \sin(\phi) \cdot \omega \end{aligned}$$

Toto jsou lineární rovnice a lze z nich vypočítat vB a ω . Do následujících rovnic je nutno dosazovat i se znaménky.

Pro zrychlení:

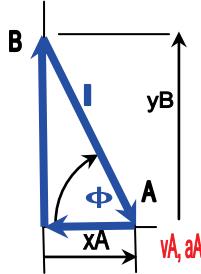
$$\begin{aligned} 0 &= -aA - l \cdot \sin(\phi) \cdot \omega^2 + l \cdot \cos(\phi) \cdot \varepsilon \\ 0 &= aB + l \cdot \cos(\phi) \cdot \omega^2 + l \cdot \sin(\phi) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Toto jsou opět lineární rovnice a lze z nich vypočítat aB a ε .

Analytické řešení lze použít pro téměř jakýkoliv pohyb a není omezen jen na obecný roviný pohyb.

Další možností je použití **trigonometrické metody** pro sestavení úlohy polohy. Tato metoda používá různé trigonometrické vztahy (goniometrické funkce, poměry v trojúhelnících, Pythagorovu větu, Euklidovy věty.....).

V našem případě je možno s výhodou použít Pythagorovu větu.



Z úlohy polohy lze určit yB :

$$xA^2 + yB^2 = l^2$$

U úlohy polohy je výhodnější dávat přednost mocninám před odmocninami, goniometrickým funkcím před cyklometrickými; součinům před podíly atd. jinak jsou derivace složitější.

Po derivaci podle času lze určit vB

$$2 \cdot xA \cdot vA + 2 \cdot yB \cdot vB = 0$$

Po další derivaci podle času lze určit aB . (Před derivací lze zkrátit dvěma)

$$vA \cdot vA + xA \cdot aA + vB \cdot vB + yB \cdot aB = 0$$

Je-li úloha polohy sestavena trigonometrickou metodou, mohou být úlohy snadnější, ale neexistuje pravidlo pro její použití a je nutno vycházet ze zkušeností a odhadu kdy je vhodnější ji použít.

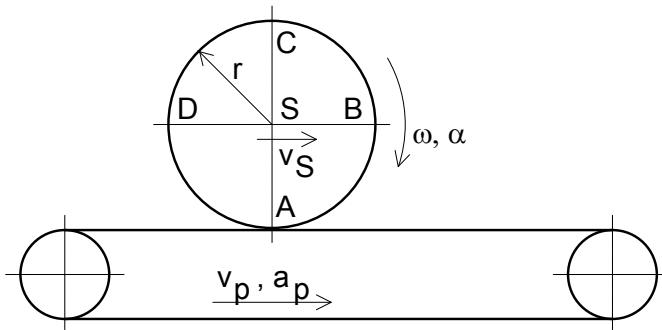


1.1.1 Příklady k procvičení

1.1.1.1 Příklad 1

Dopravní pás se rozjíždí rychlostí v_p a se zrychlením a_p naznačeným směrem (spodní větev doprava, horní doleva). Po pásu se valí (bez prokluzu) válcovité těleso o poloměru r tak, že jeho střed S se pohybuje konstantní rychlostí v_S (absolutně vůči nehybnému prostoru).

Určete úhlovou rychlosť ω a úhlové zrychlení α relativní rotace válce okolo středu S. Určete rychlosť a zrychlení (absolutní) bodů A, B, C a D na obvodu válce. Jejich velikosti a směry.



$$v_p = 0.5 \text{ m/s}$$

$$a_p = 20 \text{ m/s}^2$$

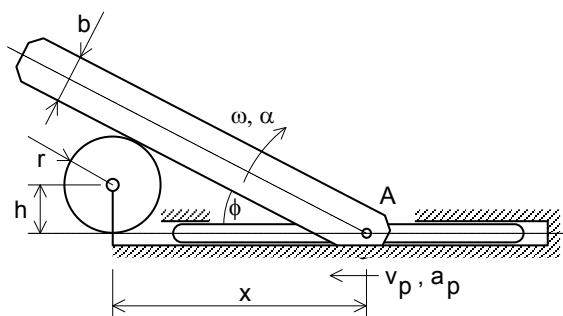
$$r = 3 \text{ cm}$$

$$v_S = 1.2 \text{ m/s}$$

1.1.1.2 Příklad 2

Vodorovná posuvka se pohybuje rychlostí v_p se zrychlením a_p doleva. V bodě A je k posuvce kloubově vázán trámec šířky b , který se dále opírá o kladku o poloměru r . Výška středu kladky nad osou posuvu bodu A je h .

Určete úhlovou rychlosť ω a úhlové zrychlení α , s nímž se zvětšuje úhel sklonu trámce od posuvky ϕ . Řešte v poloze, kdy kloub A je ve vzdálenosti x od svislé osy kladky.



$$b = 8.5 \text{ cm}$$

$$r = 8.5 \text{ cm}$$

$$h = 8.5 \text{ cm}$$

$$v_p = 3.5 \text{ m/s}$$

$$a_p = 6 \text{ m/s}^2$$

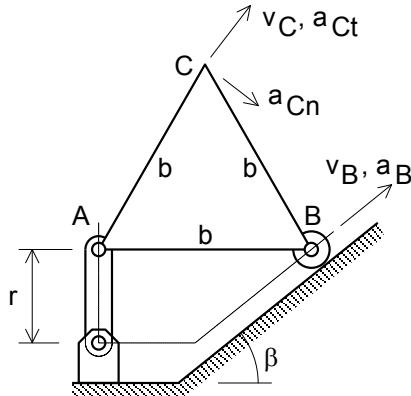
$$x = 44.5 \text{ cm}$$



1.1.1.3 Příklad 3

Těleso tvaru rovnostranného trojúhelníka **ABC** o délce všech stran **b**, je v poloze s podstavou **AB** vodorovnou. Ve vrcholu **A** je trojúhelník podepřen svislou vzpěrou délky **r**, vrchol **B** je veden přímočaře pod úhlem **β** rychlostí **v_B** se zrychlením **a_B**.

Určete rychlosť **v_C** vrcholu **C** a rovněž jeho zrychlení **a_{Ct}**, jeho tečnou (a_{Ct}) a normálovou (a_{Cn}) složku. Určete úhel **δ**, který svírá rychlosť **v_C**, a úhel **φ**, který svírá zrychlení **a_C** s vodorovným směrem.



$$b = 3.4 \text{ cm}$$

$$r = 1.5 \text{ cm}$$

$$\beta = 38^\circ$$

$$v_B = 2 \text{ m/s}$$

$$a_B = 5 \text{ m/s}^2$$

Výsledky nejsou uvedeny, příklady je možno spočítat více způsoby vzájemně je srovnat. U výpočtu pomocí rozkladů je nutno určovat středy křivosti trajektorií, a návod pro jejich určení v tomto materiálu není.

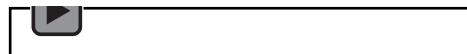
1.2 DYNAMIKA OBECNÉHO ROVINNÉHO POHYBU

Dynamiku O. R. P. lze výhodně řešit pomocí základního rozkladu, kde referenčním bodem je těžiště. Pro jiný referenční bod je řešení obtížnější, protože silové a momentové pohybové rovnice jsou spolu svázány. Odvození vyplývá z předcházejících kapitol.

Rozložíme-li O. R. P. na unášivý pohyb posuvný s referenčním bodem v těžišti T, které má zrychlení a_T (složky a_{Ty}; a_{Tz}), a relativní osa rotace je osa x, která je kolmá k rovinám tvořeným trajektoriemi bodů a prochází těžištěm, pak platí:



Audio 1.2 Dynamika obecného rovinného pohybu.



$$\sum \vec{F} = m \cdot a_T$$

$$\sum F_y = m \cdot a_{Ty}$$

$$\sum F_z = m \cdot a_{Tz}$$

Pro relativní rotační pohyb platí D'Alambertův princip (orientace os viz kapitola rotační pohyb x je osou rotace).

$$Dx = 0$$



$$\begin{aligned}
 Dy &= m \cdot \omega^2 \cdot y_T + m \cdot \varepsilon \cdot z \\
 Dz &= m \cdot \omega^2 \cdot z_T - dm \cdot \varepsilon \cdot y_T \\
 MDx &= -\varepsilon \cdot Jx \\
 MDy &= -\omega^2 \cdot Dxz + \varepsilon \cdot Dxy \\
 MDz &= \omega^2 \cdot Dxy + \varepsilon \cdot Dxz
 \end{aligned}$$

Pro rozklad k těžišti platí že $yT=0$; $zT=0$ a tedy silové setrvačné účinky $Dx=Dy=Dz=0$ v důsledku rotace jsou nulové, pak platí.

$$\begin{array}{ll}
 \sum F_x = 0 & \sum M_x + MD_y = 0 \\
 \sum F_y = m \cdot a_{Ty} & \sum M_y + MD_y = 0 \\
 \sum F_z = m \cdot a_{Tz} & \sum M_z + MD_z = 0
 \end{array}$$

Pokud řešíme pouze vztah mezi silami a zrychleními pak nás zajímají jen rovnice:

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= m \cdot a_{Ty} \\
 \sum F_z &= m \cdot a_{Tz} \\
 \sum M_x &= \varepsilon \cdot J_x
 \end{aligned}$$

Kinetická energie O. R. P.

Pro kinetickou energii O. R. P. platí Königova věta. Kinetickou energii tělesa pohybujícího se O. R. P. lze určit jako součet kinetické energie posuvného pohybu tělesa s těžištěm pohybujícím se rychlostí v_T a kinetické energie rotace okolo těžiště úhlovou rychlosť ω .

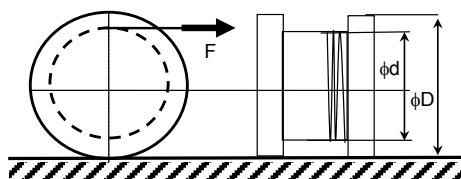
$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_T^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{Tx} \cdot \omega^2$$

1.2.1 Příklady k procvičení

1.2.1.1 Příklad 1

Cívka (viz obrázek ve dvou pohledech) o hmotnosti m a momentu setrvačnosti I_s ke středu cívky, na které je navinuto lano, leží na vodorovné podložce.

Určete maximální sílu F takovou, aby se cívka odvalovala (to je nenastal prokluz mezi cívkou a podložkou). Určete, jaké bude mít střed válečku v tomto případě zrychlení. Koeficient tření mezi podložkou a cívkou je f .



$$I_s = 12,5 \text{ kg m}^2$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$f = 0,2 \quad d = 400 \text{ mm}$$

$$D = 1000 \text{ mm}$$

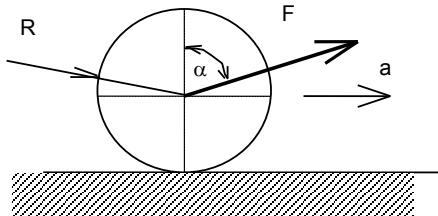
Výsledky:

$$F_{max} = 2942 \text{ N}, \quad a_s = 27,46 \text{ m.s}^{-2}$$



1.2.1.2 Příklad 2

Určete sílu F , která působí pod úhlem α takovou, aby se válec o poloměru R_v a hmotnosti m_v odvaloval po podložce tak, aby jeho střed měl zrychlení a_v . 2) Určete minimální koeficient tření, takový, aby mezi válcem a rovinou nenastal prokluz (moment setrvačnosti válce k jeho středu je $(m \cdot r^2)/2$).



$$\alpha = 70^\circ$$

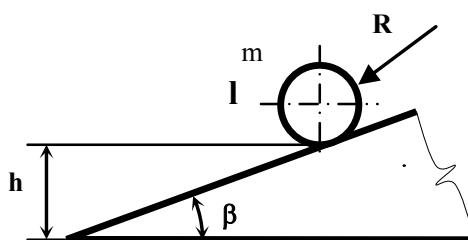
$$\begin{aligned} m_v &= 5 \text{ kg} \\ R_v &= 200 \text{ mm} \\ a_v &= 1 \text{ m.s}^{-2} \end{aligned}$$

Výsledky:

$$\begin{aligned} F &= 34,6 \text{ N} \\ f_{\min} &= 0,056. \end{aligned}$$

1.2.1.3 Příklad 3

Válec o hmotnosti m a poloměru R se **odvaluje** po nakloněné rovině se sklonem daným úhlem β . Moment setrvačnosti ke středu tohoto válce lze vypočítat jako $I=1/2.m.R^2$.



Určete:

- 1) Jakým pohybem se pohybuje válec.
- 2) Zakreslete také síly mezi válcem a rovinou
- 3) Jaké zrychlení bude mít jeho střed
- 4) Jaký čas uplyne, než sjede z nakloněné roviny (počáteční rychlosť byla nulová)

$$m=100 \text{ kg}$$

$$R=400 \text{ mm}$$

$$h=1000 \text{ mm}$$

$$\beta=20^\circ$$

(bez výsledku)



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Kinematika a dynamika prostorových pohybů

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ.....	3
1.1	Kinematika a dynamika prostorových pohybů	4
1.1.1	Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu.....	4
1.1.2	Kinematika a dynamika Šroubového pohybu	5
1.1.3	Kinematika sférického pohybu	7
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinematika a dynamika prostorových pohybů.

Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu.

Kinematika a dynamika šroubového pohybu.

Kinematika sférického pohybu.



MOTIVACE:

Prostorový posuvný pohyb se příliš neliší od rovinného posuvného pohybu. Jeho uvedení pak slouží pro přípravu k části, která se zabývá obecným prostorovým pohybem.

Matice na šroubu či dveře při vyndávání z pantů vykonávají pohyb, kterému se říká šroubový. V této kapitole se řeší jak kinematika, tak dynamika těchto pohybů.

Se sférickým pohybem se lze setkat u Rubikova kostky, sférického kloubu či například u některých pouťových atrakcí. První část kinematiky popisuje vztah mezi natočenými a úhlovými rychlostmi pomocí rovnic, které se nazývají Eulerovy kinematické rovnice.

Tato kapitola také slouží jako příprava pro kinematiku a dynamiku obecného prostorového pohybu.



CÍL:

Kinematika a dynamika prostorového posuvného a šroubového pohybu.

Kinematika sférického pohybu. (Eulerovy kinematické rovnice)



1.1 KINEMATIKA A DYNAMIKA PROSTOROVÝCH POHYBŮ

V této části nebudou odvozovány dynamické rovnice pro jednotlivé typy pohybů, ale všechna odvození lze provést ze znalostí dynamiky bodu, geometrie hmot a integrálního počtu.

Rozdělení prostorových pohybů:

- a) Posuvný
- b) Šroubový
- c) Sférický
- d) Obecný prostorový

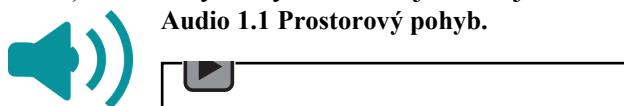
1.1.1 Kinematika a dynamika posuvného prostorového pohybu

Definice: Je takový pohyb, kde dvě mimoběžné nebo přímky trvale zachovávají svůj směr. Tento pohyb má až tři stupně volnosti. Podobně jako u rovinného posuvného pohybu lze odvodit kinematiku a dynamiku posuvného prostorového pohybu.

Kinematika

- 1) Trajektorie všech bodů jsou shodné vzájemně posunuté prostorové křivky.
- 2) Všechny body tělesa mají ve stejném okamžiku shodné rychlosti a zrychlení.

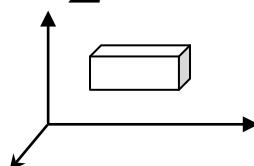
Audio 1.1 Prostorový pohyb.



Dynamika

Pro dynamiku posuvného pohybu v prostoru se zrychlením a (ax ; ay ; az) platí:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m \cdot a_x \\ \sum F_y &= m \cdot a_y \\ \sum F_z &= m \cdot a_z \\ \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$



Moment se počítá k těžišti. Jiná možnost je zavedení D'Alambertových sil do těžiště a pak lze momenty počítat k libovolnému bodu.

Kinetická energie posuvného pohybu tělesa o hmotnosti m a rychlostí v v prostoru má hodnotu:

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

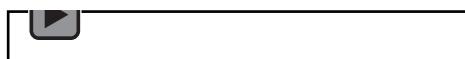


1.1.2 Kinematika a dynamika Šroubového pohybu

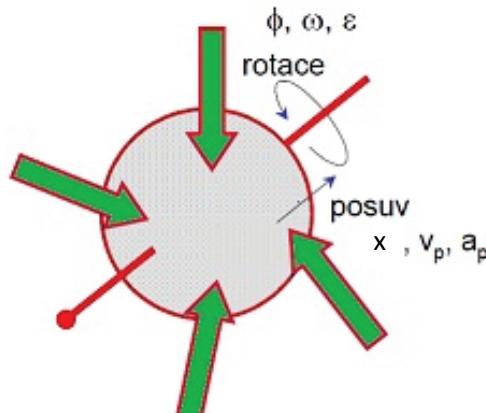
Definice: Vzniká složením otáčení kolem osy o a posunutím ve směru osy o. Souřadný systém lze natočit tak, aby osa rotace byla totožná se souřadnicí x kartézského souřadného systému.



Audio 1.2 Šroubový pohyb.



Tento pohyb má až dva stupně volnosti.



Kinematika je dána složením obou pohybů posuvu ve směru osy a rotace.

Rotace:

$$\omega = \dot{\phi}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$$

R Je vzdálenost bodu od osy

s=R·phi Složka dráhy na obvodu

v0=R·omega Složka rychlosti kolmá k posuvu

a_n=-R·omega^2 Složka zrychlení, která je kolmá k ose o a touto osou prochází

a_t=R·epsilon Složka zrychlení, která je kolmá k ose o a ke složce zrychlení a_n.

Posuv má složky

$$x \\ vp = \dot{x} \\ ap = \ddot{v}_p = \ddot{x}$$

Celková velikost rychlosti

$$v = \sqrt{vp^2 + vO^2}$$

Celkové velikost zrychlení:

$$v = \sqrt{ap^2 + a_n^2 + a_t^2}$$

Dynamika

Pro dynamiku šroubového pohybu s osou otáčení totožnou s osou x platí Kombinace pohybových rovnic a D'Alambertova principu. Platí pro pravotočivou souřadnou soustavu.

$$Dy = m \cdot \omega^2 \cdot y_T + m \cdot \varepsilon \cdot z_T$$

$$Dz = m \cdot \omega^2 \cdot z_T - dm \cdot \varepsilon \cdot y_T$$



$$MDy = -\omega^2 \cdot Dxz + \varepsilon \cdot Dxy$$

$$MDz = \omega^2 \cdot Dxy + \varepsilon \cdot Dxz$$

$$\sum Fx = m \cdot ax$$

$$\sum Fy + Dy = 0$$

$$\sum Fz + Dz = 0$$

$$\sum Mx = \varepsilon \cdot Jx$$

$$\sum My + MDy = 0$$

$$\sum Mz + MDz = 0$$

Kinetická energie

Je dána součtem kinetické energie rotace a posuvu (pro osu pohybu totožnou s osou x).

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot vp^2 + \frac{1}{2} \cdot J_x \cdot \omega^2$$



1.1.3 Kinematika sférického pohybu

Definice: Jeden bod tělesa je neustále v klidu.

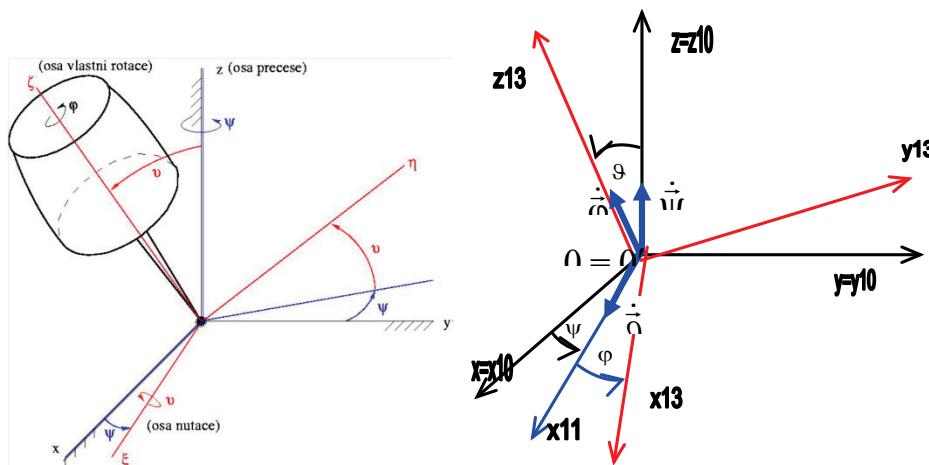
Tomuto bodu se říká střed sférického pohybu. Pohyb může mít až tři stupně volnosti.

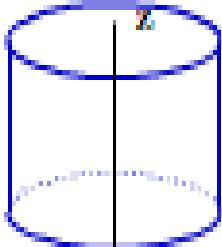
Základem kinematiky je znalost úhlové rychlosti, kterou je možno vždy rozložit do složek a to buď v souřadném systému základního prostoru (x ; y ; z). Nebo v souřadném systému spojeným s tělesem (x_1 ; y_1 ; z_1). Vztahy mezi úhly popisujícími polohu a složkami úhlové rychlosti lze vyjádřit pomocí Eulerových kinematických rovnic.

Audio 1.3 Sférický pohyb.



Eulerovy kinematické rovnice





Tisk
Kinematika sférického pohybu

Animace se skladá ze čtyř okruhů v axonometrii

Dynamika
START

Modifikace
INFO



Pro popis polohy rotace tuhého používáme EULEROVY úhly:
 ψ úhel precese, ϑ úhel nutace ϕ úhel rotace.

Střed sférického pohybu je 0 společný počátek soustavy S0 (0; x; y; z) spojené se základním prostorem a soustavy S1(0,x1;y1;z1), **pevně spojené s rotujícím tělesem**. Z S0 do S1 můžeme přejít složením **tří elementárních** otočení v následujícím pořadí:

- Natočení okolo osy z o úhel ψ . Osa z10 zůstane na místě a osy x10 a y10 se přesunou do nových poloh x11, y11. Poloze x11 se říká uzlová přímka. Úhlová rychlosť díky tomuto natočení je derivací úhlu ψ a má jen složku ve směru osy z.

$$\dot{\psi}_x = 0$$

$$\dot{\psi}_y = 0$$

$$\dot{\psi}_z = \dot{\psi}$$

- Natočení okolo uzlové přímky i o úhel ϑ , osy z10 a y11 se přemístí do nových poloh y12 a z13. Složky úhlové rychlosti související s tímto natočením jsou:

$$\dot{\vartheta}_x = \dot{\vartheta} \cdot \cos(\psi)$$

$$\dot{\vartheta}_y = \dot{\vartheta} \cdot \cos(\psi)$$

$$\dot{\vartheta}_z = 0$$

- Při dalším natočení okolo nové osy z13 o úhel ϕ osy x11 a y11 se přemístí do nových poloh x13 a y13. Složky úhlové rychlosti související s tímto natočením jsou:

$$\dot{\phi}_x = \dot{\phi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\psi)$$

$$\dot{\phi}_y = -\dot{\phi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\psi)$$

$$\dot{\phi}_z = \dot{\phi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Výsledné složky úhlové rychlosti jsou pak dány příslušnými součty. Těmto rovnicím se říká

Eulerovy kinematické rovnice.

$$\alpha x = \dot{\vartheta} \cdot \cos(\psi) + \dot{\phi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\psi)$$

$$\alpha y = \dot{\vartheta} \cdot \sin(\psi) - \dot{\phi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\psi)$$

$$\alpha z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Podobně lze získat i složky úhlové rychlosti v novém souřadném systému (x1; y1; z1)

$$\alpha x_1 = \dot{\psi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\phi) + \dot{\vartheta} \cdot \cos(\phi)$$

$$\alpha y_1 = \dot{\psi} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\phi) - \dot{\vartheta} \cdot \sin(\phi)$$

$$\alpha z_1 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos(\vartheta)$$

Pro úhlové zrychlení platí:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

$$\varepsilon x = \dot{\alpha} x$$

$$\varepsilon y = \dot{\alpha} y$$

$$\varepsilon z = \dot{\alpha} z$$

Podobný vztah lze použít i pro souřadný systém spojený s tělesem.



Pro **rychlosť** bodu A s polohovým vektorem \mathbf{r}_A (x_A, y_A, z_A) pak platí vztah:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix}$$

Pro **zrychlení** bodu A s polohovým vektorem \mathbf{r}_A (x_A, y_A, z_A) pak platí

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ vx & vy & vz \end{vmatrix}$$

Podobné vztahy lze použít i pro souřadný systém spojený s tělesem.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Dynamika sférického pohybu

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	DYNAMIKA SFÉRICKÉHO POHYBU.....	3
1.1	Dynamika sférického pohybu.....	4
1.1.1	Natočení souřadného systému tak aby jeho osy byly hlavními osami setrvačnosti..	5
1.2	Kinematika a dynamika obecného prostorového pohybu-O. P. P.....	7
1.2.1	Dynamika obecného prostorového pohybu.....	7
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	9



1 DYNAMIKA SFÉRICKÉHO POHYBU



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Dynamika sférického pohybu.

Kinematika a dynamika obecného prostorového pohybu-O. P. P.



MOTIVACE:

Nejobecnější pohyb jaký může těleso konat je obecný prostorový pohyb. Všechny předchozí typy pohybů jsou jen určitými zvláštními případy, ale i tak mají samostatné významy. V této části už vztahy nejsou odvozovány, ale jen vypsány. Pořád se jedná o vztahy mezi kinematickými veličinami a druhý Newtonův zákon doplněné o geometrii hmot. Porozumění obecnému prostorovému pohybu znamená porozumění veškeré Newtonovské dynamice tuhých těles.



CÍL:

Dynamika sférického pohybu.

Kinematika a dynamika obecného prostorového pohybu.



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

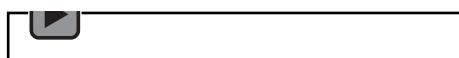
CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 DYNAMIKA SFÉRICKÉHO POHYBU

Podobně jako u rotačního pohybu lze vybrat element hmoty a integrací odvodit pohybové rovnice pro těleso pomocí integrálního počtu. Zde je uveden jen výsledek pro souřadný systém, který je totožný s **hlavními osami setrvačnosti**. Vždy však lze souřadný systém posunout do středu sférického pohybu a natočit tak, aby jeho osy byly hlavními osami setrvačnosti (pozor obecně ne hlavními centrálními osami setrvačnosti).



Audio 1.1 Dynamika sférického pohybu.



$$\sum M_x = J_x H \cdot \varepsilon_x + (J_z H - J_y H) \cdot \omega_y \cdot \omega_z$$

$$\sum M_y = J_y H \cdot \varepsilon_y + (J_x H - J_z H) \cdot \omega_x \cdot \omega_z$$

$$\sum M_z = J_z H \cdot \varepsilon_z + (J_y H - J_x H) \cdot \omega_y \cdot \omega_x$$

Aby bylo možno předchozí rovnice použít, je třeba najít polohy těchto os. Po přepočtení pomocí Steinerovy věty k počátku sférického pohybu je nutno ještě najít úhly, které osy (xH; yH; ZH) svírají s původními osami x, y, z.

Kinetická energie k okamžité ose otáčení o a J_o je moment setrvačnosti k této ose.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J_o \cdot \omega^2$$

Lze j rozepsat do směru hlavních os

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J_x H \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} \cdot J_y H \cdot \omega_y^2 + \frac{1}{2} \cdot J_z H \cdot \omega_z^2$$

Obecně maticovou rovnicí, kde I je matice setrvačnosti a ω vektor úhlové rychlosti vyjádřený ve složkách k příslušným osám.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \omega^T I \cdot \omega$$



1.1.1 Natočení souřadného systému tak aby jeho osy byly hlavními osami setrvačnosti

Matice setrvačnosti k hlavním osám setrvačnosti (xH ; yH ; zH) je značena IH a obecná k osám (x ; y ; z) je I . Oba souřadné systémy mají společný počátek.

$$IH = \begin{vmatrix} JxH & 0 & 0 \\ 0 & JyH & 0 \\ 0 & 0 & JzH \end{vmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} Jx & -Dxy & -Dxz \\ -Dxy & Jy & -Dyz \\ -Dxz & -Dyz & Jz \end{bmatrix}$$

Pro směrové kosiny úhlů, které svírají osy x , y , z s obecnou osou o zavedeme substituce $u=\cos(\alpha)$; $v=\cos(\beta)$; $w=\cos(\gamma)$ přičemž musí platit $u^2+v^2+w^2=1$.

Odvození pak vede na soustavu lineárních rovnic, která nemá mít triviální řešení (u ; v ; w nemohou být všechny současně rovny nule).

$$(Jx - \lambda) \cdot u - D_{xy} \cdot v - D_{xz} \cdot w = 0$$

$$-D_{xy} \cdot u + (Jy - \lambda) \cdot v - D_{xy} \cdot w = 0$$

$$-D_{xz} \cdot u - D_{yz} \cdot v + (Jz - \lambda) \cdot w = 0$$

Z podmínky netriviálnosti řešení musí být následující determinant roven nule.

$$\begin{vmatrix} Jx - \lambda & -Dxy & -Dxz \\ -Dxy & Jy - \lambda & -Dyz \\ -Dxz & -Dyz & Jz - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Vyjádření determinantu vede na kubickou rovnici pro λ .

$$\lambda^3 + a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

kde:

$$a = -(Jx + Jy + Jz)$$

$$b = Jx \cdot Jy + Jy \cdot Jz + Jx \cdot Jz - (Dxy)^2 - (Dxz)^2 - (Dyz)^2$$

$$c = -[Jx \cdot Jy \cdot Jz - Jx \cdot (Dyz)^2 - Jy \cdot (Dxz)^2 - Jz \cdot (Dxy)^2 - 2 \cdot (Dxy)^2 \cdot (Dxz)^2 \cdot (Dyz)^2]$$

Tato rovnice má tři kořeny λ_1 , λ_2 , λ_3 . Tyto kořeny mohou být buď reálné různé pak $JxH \neq JyH \neq JzH$ a existují tři na sebe kolmé hlavní osy setrvačnosti. Je-li jeden kořen dvojnásobný a třetí se liší $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ ($JxH = JyH \neq JzH$), pak jednu osu lze určit jednoznačně a všechny, které jsou na ni a vzájemně na sebe kolmé jsou hlavními osami setrvačnosti), nebo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ($JxH = JyH = JzH$) pak jakékoli tři na sebe kolmé osy hlavními osami setrvačnosti. Je tedy možná existence více systémů hlavních os setrvačnosti. Například u homogenní koule je každý ortogonální systém os (osy jsou vzájemně na sebe kolmé) s počátkem ve středu koule systémem hlavních centrálních os setrvačnosti.

Polohu os určíme pomocí směrových kosinů ze dvou rovnic z dříve uvedené soustavy rovnic, kde za λ dosadíme postupně příslušné kořeny kubické rovnice λ_1 , λ_2 , λ_3 (rovnice jsou lineárně závislé) a použijeme vtah $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

$$(Jx - \lambda) \cdot u - D_{xy} \cdot v - D_{xz} \cdot w = 0$$

$$-D_{xy} \cdot u + (Jy - \lambda) \cdot v - D_{xy} \cdot w = 0$$

$$-D_{xz} \cdot u - D_{yz} \cdot v + (Jz - \lambda) \cdot w = 0$$

Získáme směrové kosiny u_1 , v_1 , w_1 (pro $\lambda = \lambda_1$); u_2 , v_2 , w_2 (pro $\lambda = \lambda_2$); u_3 , v_3 , w_3 (pro $\lambda = \lambda_3$)

Pak transformační matice TH má tvar:



$$\begin{vmatrix} u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \\ w1 & w2 & w3 \end{vmatrix} = TH$$

Pro získání momentů setrvačnosti k hlavním osám je třeba provést transformaci a matice IH musí být diagonální.

$$IH = TH^T \cdot I \cdot TH$$

Rekapitulace dynamiky sférického pohybu, v systému tvořeném hlavními osami setrvačnosti x, y, z (v předchozích odstavcích jsou označeny indexy H stejně jako osové momenty setrvačnosti) s počátkem ve středu sférického pohybu.

(Pro pravotočivou souřadnou soustavu os):

$$\sum Mx = Jx \cdot \varepsilon x + (Jz - Jy) \cdot \omega y \cdot \omega z$$

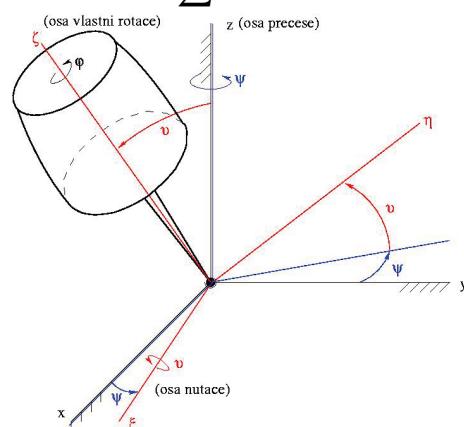
$$\sum My = Jy \cdot \varepsilon y + (Jx - Jz) \cdot \omega x \cdot \omega z$$

$$\sum Mz = Jz \cdot \varepsilon z + (Jy - Jx) \cdot \omega y \cdot \omega x$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\sum Fz = 0$$

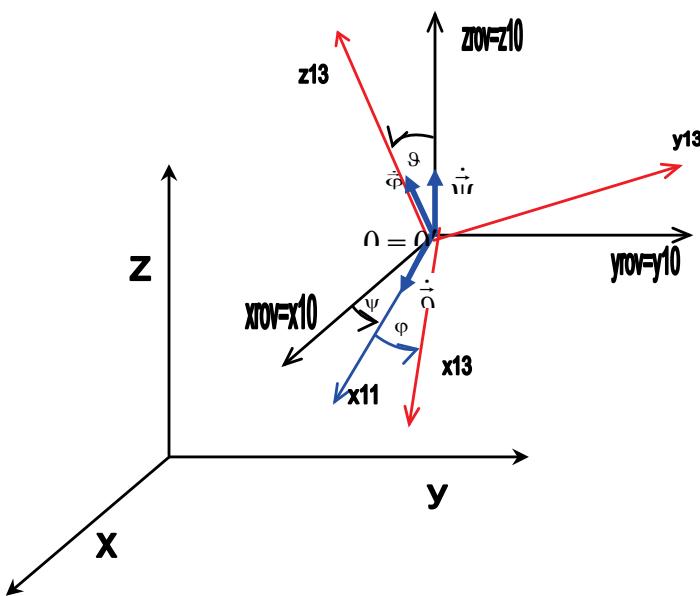
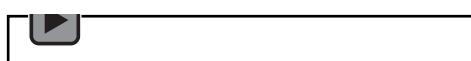


1.2 KINEMATIKA A DYNAMIKA OBECNÉHO PROSTOROVÉHO POHYBU-O. P. P.

O. P. P. je nejobecnějším pohybem tělesa v E3. Za předpokladu, že pohyb není omezen vazbami, pro popis polohy v daném čase potřebujeme šest nezávislých souřadnic, nejčastěji tři délkové a tři úhlové. ($x=x(t)$; $y=y(t)$ $z=z(t)$; $\alpha=\alpha(t)$; $\beta=\beta(t)$; $\gamma=\gamma(t)$). Při řešení kinematiky lze provést základní rozklad pohybu k referenčnímu bodu O na unášivý pohyb posuvný bodu O a relativní sférický pohyb bodu L vůči bodu O, který je středem relativního sférického pohybu. Pro rychlosti a zrychlení libovolného bodu L platí obdobné vztahy jako u základního rozkladu obecného rovinného pohybu.



Audio 1.2 Obecný prostorový pohyb.



$$\vec{v}_{výs-L} = \vec{v}_{unO-O} + \vec{v}_{rel-LO}$$

$$\vec{a}_{výs-L} = \vec{a}_{unO-O} + \vec{a}_{rel-LO}$$

Tyto vektorové rovnice lze rozložit do složek ve třech na sebe kolmých směrech. Obdobně jako do dvou kolmých směrů u základního rozkladu v případě obecného rovinného pohybu. Existují ještě další možnosti řešení kinematiky O. P. P. (analytické řešení; nahrazení okamžitým šroubovým pohybem-jen pro řešení rychlostí;...) zde ovšem nejsou uvedeny.

1.2.1 Dynamika obecného prostorového pohybu

Pro řešení dynamiky O. P. P. provedeme základní rozklad k referenčnímu bodu O, který je totožný s těžištěm. Osy y_{rov} , y_{rov} , z_{rov} jsou hlavními centrálními osami tělesa a jsou rovnoběžné s osami x, y, z. (vždy lze souřadný systém základního prostoru natočit tak, aby jeho osy byly v daném okamžiku rovnoběžné s hlavními centrálními osami tělesa, viz předchozí kapitola).

$$\sum Mx_{rov} = Jx_{rov} \cdot \varepsilon x + (Jz_{rov} - Jy_{rov}) \cdot \omega y \cdot \omega z$$

$$\sum Fx = m \cdot ax$$

$$\sum My_{rov} = Jy_{rov} \cdot \varepsilon y + (Jx_{rov} - Jz_{rov}) \cdot \omega x \cdot \omega z$$

$$\sum Fy = m \cdot ay$$

$$\sum Mz_{rov} = Jz_{rov} \cdot \varepsilon z + (Jy_{rov} - Jx_{rov}) \cdot \omega y \cdot \omega x$$

$$\sum Fz = m \cdot az$$



Kinetická energie je podobně jako u obecného rovinného pohybu součtem kinetické energie posuvného pohybu těžiště a sférického pohybu okolo těžiště. Moment setrvačnosti k okamžité ose otáčení při relativním sférickém pohybu je Jo . I je matice setrvačnosti.

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m \cdot vT^2 + \frac{1}{2} \cdot Jo \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot vT^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot I \cdot \vec{\omega}$$



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Mechanismy

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	MECHANISMY	3
1.1	Základní pojmy.....	4
1.2	Příklady mechanismů s proměnným převodem	4
1.3	Kinematika mechanismů s konstantním převodem.	6
1.3.1	Některé příklady mechanismů s konstantním převodem.....	6
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	10



1 MECHANISMY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Mechanismy.

Základní pojmy.

Kinematika mechanismů s konstantním převodem.



MOTIVACE:

Ve strojích i přístrojí se lze setkat s mechanismy nejrůznějšího charakteru. Přes velkou různorodost mají společné principy to je, že slouží k transformaci pohybu či přenosu sil. Pro základní domluvu je nejprve nutno seznámit se ze základními pojmy.

Určitě jste se setkali s jízdním kolem, či klasickou převodovkou automobilu. Tyto mechanismy patří k mechanismům s konstantním převodem. Pokud Vás zajímá, jakou vzdálenost na kole ujedete, jestliže například 10krát šlápnete do pedálů, je nutno vyřešit kinematiku tohoto mechanismu s konstantním převodem



CÍL:

Mechanismy-základní pojmy.

Kinematika mechanismů s konstantním převodem.



1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Mechanismus: je soustava (alespoň dvou) těles spojených vazbami, která má alespoň jeden stupeň volnosti. Mechanismy slouží k transformaci pohybu.

Člen mechanismu: je jedno těleso, které nemění svůj tvar.

Rám: je člen mechanismu pevně spojený se Zemí (základním prostorem).

Kinematická dvojice: je dvojice členů, spojených vazbou.

Souřadnice vazby: je souřadnice, určující vzájemnou polohu členů dvojice vůči sobě navzájem.

Vstupní a výstupní člen: jsou členy na začátku a konci řetězce členů mechanismu.

Počet stupňů volnosti: je počet možných nezávislých pohybů, které mechanismus může vykonávat.

Souřadnice mechanismu: je jedna nebo více nezávislých souřadnic (podle počtu stupňů volnosti), určujících polohu mechanismu.

Kinematické schéma: je v maximální možné míře zjednodušený náčrt mechanismu, kde pro vazby se používají značky známé ze statiky. (kloubová vazba; posuvný kloub;...).

Mechanismy rovinné: všechny členy konají rovinné pohyby v navzájem rovnoběžných rovinách.

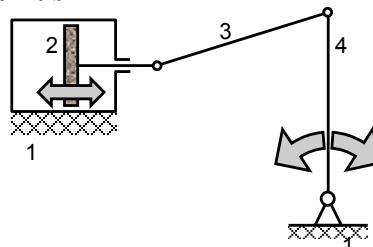
Mechanismy prostorové: alespoň jeden člen koná prostorový pohyb nebo členy konají rovinné pohyby v různoběžných rovinách.

Okamžitá poloha mechanismu: je jednoznačně určena tolka nezávislými souřadnicemi, kolik stupňů volnosti mechanismus má.

Rozdělení mechanismů podle charakteru převodu: mechanismy s konstantním převodem; mechanismy s proměnným převodem.

1.2 PŘÍKLADY MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM

Excentrický klikový mechanismus

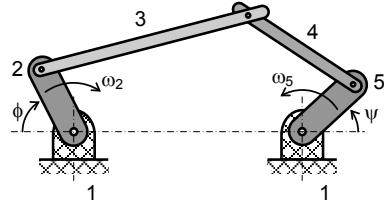


Excentrický klikový mechanismus

Rovinný mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s proměnným převodem,
se čtyřmi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



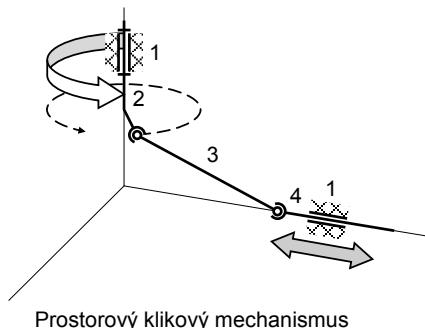
Čtyřkloubový mechanismus



Mechanismus se dvěma stupni volnosti

Rovinný mechanismus,
se dvěma stupni volnosti,
s proměnným převodem,
s pěti členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).

Prostorový klikový mechanismus

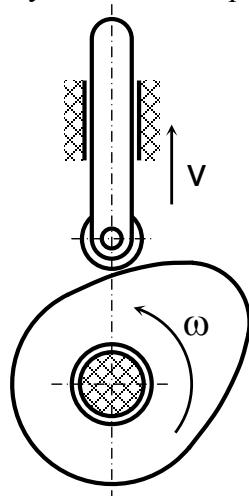


Prostorový klikový mechanismus

Prostorový mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s proměnným převodem,
se čtyřmi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).

Vačkový mechanismus

Rovinný mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s proměnným převodem,
se třemi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).

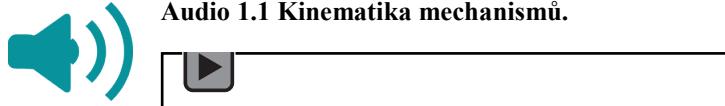


1.3 KINEMATIKA MECHANISMŮ S KONSTANTNÍM PŘEVODEM

Kinematiku mechanismů lze řešit některým z předchozích způsobů (pólovou konstrukcí, rozklady, analyticky;...). Jedním z hlavních úkolů kinematiky mechanismů je nalezení vztahu mezi zobecněnou souřadnicí (délkovou nebo úhlovou) vstupního členu a výstupního členu. Příkladem takové závislosti je závislost mezi délkou, o kterou se posune píst a úhlem o který se otočí klika klikového mechanismu. Této závislosti se říká zdvihová závislost. Dále lze nalézt závislost mezi zobecněnou rychlostí (rychlostí či úhlovou rychlostí) vstupního a výstupního členu, které se říká převod či obdobnou závislostí mezi zobecněnými zrychleními (zrychlení nebo úhlové zrychlení) vstupního a výstupního členu.

Pro mechanismy s konstantním převodem jsou poměry mezi předchozími vstupními a výstupními souřadnicemi, rychlostmi a zrychlením nezávislé na souřadnici vstupního členu a tyto poměry jsou stejné.

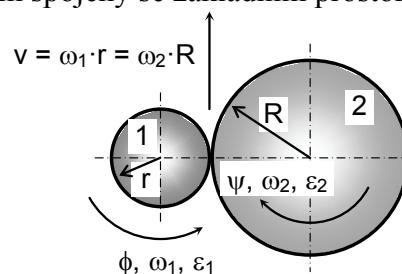
Audio 1.1 Kinematika mechanismů.



1.3.1 Některé příklady mechanismů s konstantním převodem

Soukolí s čelními koly

rovinný mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s konstantním převodem,
se třemi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



Kinematika:

Obě kola mají stejné obvodové dráhy $s_1=s_2$ tedy $\phi \cdot r = \psi \cdot R$ (ϕ, ψ jsou úhlové dráhy).

Obě kola mají stejné obvodové rychlosti $v_1=v_2$ tedy $\omega_1 \cdot r = \omega_2 \cdot R$.

Obě kola mají stejná zrychlení atd. tedy $\epsilon_1 \cdot r = \epsilon_2 \cdot R$.

Převod P je v tomto případě dán poměrem poloměrů. (obě kola se otáčejí opačným směrem proto je záporný).

tedy:

$$\psi = P \cdot \phi$$

$$\omega_2 = P \cdot \omega_1$$

$$\epsilon_2 = P \cdot \epsilon_1$$

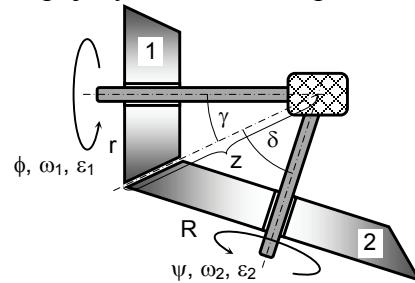
$$P = \frac{-r}{R}$$

Soukolí s kuželovými koly

Prostorový mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,



s konstantním převodem,
se třemi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



Kinematika: Obě kola mají stejné obvodové dráhy (tloušťku kol zanedbáme)
 $s_1=s_2$ tedy $\phi \cdot r = \psi \cdot R$; kde $r=z \cdot \sin(\gamma)$ a $R=z \cdot \sin(\delta)$.

Převod:

$$P = \frac{-r}{R} = \frac{-z \cdot \sin(\gamma)}{z \cdot \sin(\delta)} = \frac{-\sin(\gamma)}{\sin(\delta)}$$

Pro nejčastější případ kdy $\gamma+\delta=90^\circ$ je převod $P = -\tan(\gamma)$

Pro poměry mezi úhlovými drahami, rychlostmi a zrychleními platí (orientace je vidět na obrázku).

$$\psi = P \cdot \phi$$

$$\omega_2 = P \cdot \omega_1$$

$$\epsilon_2 = P \cdot \epsilon_1$$

Planetové soukolí

Rovinný mechanismus.

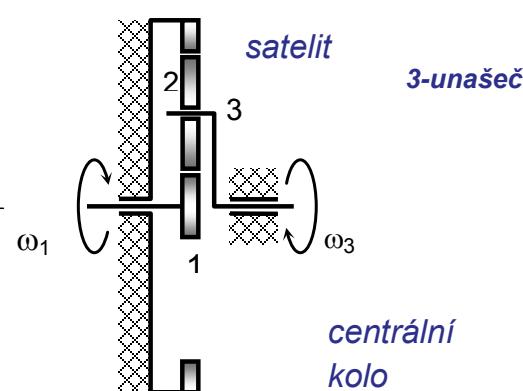
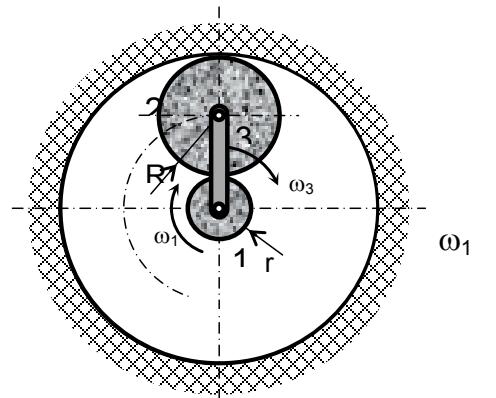
s jedním (nebo dvěma) stupni volnosti podle uspořádání.

s konstantním převodem.

s počtem členů podle uspořádání (je-li či není některý člen blokován-v nákrese je blokováno korunové kolo).

planetové soukolí

korunové kolo



Kinematika: Zde záleží, co je vstupním a výstupním členem. V tomto případě je uveden vztah mezi úhlovou rychlosí centrálního kola s poloměrem r a unašeče při zablokovaném korunovém kole. Zde se centrální kolo a unašeč dotýkají a v místě vzájemného dotyku mají



stejnou rychlosť. Satelit o polomere R v tomto pripadu vykonáva obecný rovinný pohyb. Bod na satelitu, ktorý sa dotýka korunového kola, má v danom okamžiku nulovú rychlosť a je pôlem jeho pohybu. Stred satelitu spojený s unašečom má tedy polovičnú rychlosť než bod vzájomného dotyku satelitu a centrálneho kola. Odtud lze určiť prenos P.

$$\frac{\omega_1 \cdot r}{2} = (r + R) \cdot \omega_3$$

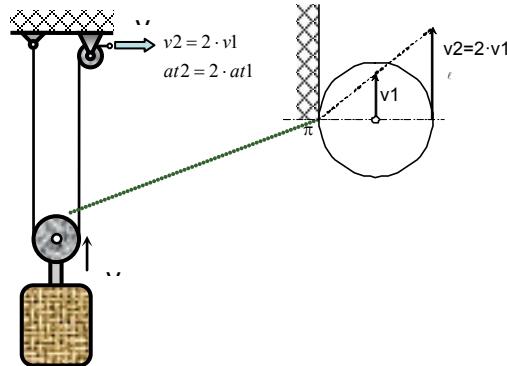
$$\omega_3 = \frac{r}{2 \cdot (r + R)} \cdot \omega_1$$

$$P = \frac{r}{2 \cdot (r + R)}$$

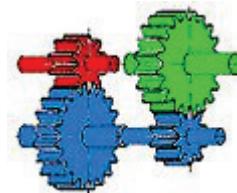


Kladkostroj:

Kinematika: Zde volná kladka vykonává O. R. P a řešení pomocí půlové konstrukce je vidět z obrázku. Je-li výstupní rychlosť v_2 pak převod $P=2$.

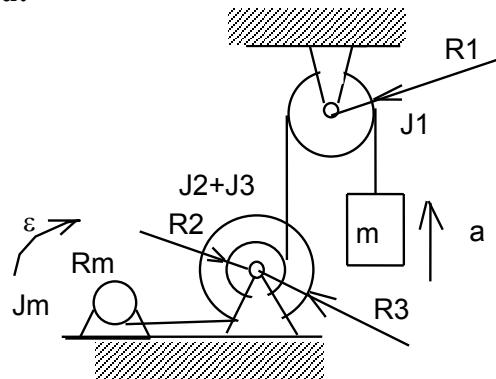


V případě **složeného převodu** je výsledný převod roven součinu jednotlivých převodů. Pro n převodů platí. $P=P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \dots \cdot P_n$.



V tomto případě mají kola, která jsou na stejně hřídeli stejnou úhlovou rychlosť a kola, která zabírají spolu stejnou obvodovou rychlosť. Převod nemusí být vždy bezrozměrnou veličinou, ale může mít i jednotku m nebo m^{-1} . často se při převodech zapomíná uvést orientaci výsledné veličiny. Nezapomínejte, že jak u rychlosťí, tak u zrychlení se jedná o veličiny vektorové.

Příklad složeného převodu:



$$P = \frac{R_2 \cdot R_m}{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_1} = \frac{R_2 \cdot R_m}{R_3}$$

pak

$$a = P \cdot \varepsilon$$

-kde a je zrychlení břemene a ε úhlové zrychlení motoru s kotoučem o poloměru R_m . Orientace je vidět z obrázku.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Dynamika rovinných mechanismů s konstantním převodem

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DYNAMIKA ROVINNÝCH MECHANISMŮ S KONSTANTNÍM PŘEVODEM ...	3
1.1 Dynamika rovinných mechanismů s konstantním převodem.....	4
1.1.1 Dynamika rovinných mechanismů s konstantním převodem s jedním stupněm volnosti (metoda redukce).	5
1.2 Příklady k procvičení.....	8
1.2.1 Příklad 1.....	8
1.2.2 Příklad 2.....	9
1.2.3 Příklad 3.....	9
1.2.4 Příklad 4.....	10
1.2.5 Příklad 5.....	11
1.2.6 Příklad 6.....	11
1.2.7 Příklad 7.....	12
1.2.8 Příklad 8.....	12
2 POUŽITÁ LITERATURA.....	13



1 DYNAMIKA ROVINNÝCH MECHANISMŮ S KONSTANTNÍM PŘEVODEM



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Dynamika mechanismů s konstantním převodem.

Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

U mechanismů s konstantními převody (převodovky, kladkostroje, jízdní kola...) se nemusíme zajímat jen, jak se pohybují, ale i proč se pohybují. Určování vztahů mezi silami, momenty sil a pohybem je hlavním úkolem této části.



CÍL:

Dynamika mechanismů s konstantním převodem (metoda redukce, metoda uvolňování).



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 DYNAMIKA ROVINNÝCH MECHANISMŮ S KONSTANTNÍM PŘEVODEM

V tomto materiálu budou uvedeny dvě metody pro řešení dynamiky mechanismů a to metoda redukce a metoda uvolňování. Metoda uvolňování je známa ze statiky. Nejprve je třeba ověřit, že daná soustav je mechanismus (počet stupňů volnosti musí být alespoň 1).

Metoda uvolňování spočívá v uvolnění všech těles z vazeb a nahrazením vazeb příslušnými silovými účinky (silami či momenty sil).

Pak pro jednotlivá tělesa (členy mechanismu) napíšeme pohybové rovnice podle typu pohybu, který daný člen vykonává. Soustavu rovnic podle potřeby doplníme o vztahy z kinematiky, statiky, geometrie,... atd. Zbytek je otázkou matematiky.



Audio 1.1 Dynamika rovinných mechanismů.



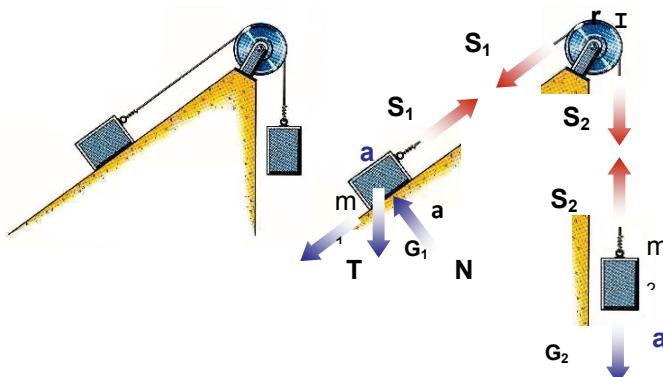
Obecně se může jednat o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic druhého rádu, která nemusí mít exaktní řešení, ale lze ji řešit jen numericky.

Příklad

Určete, s jakým zrychlením se budou pohybovat tělesa, jsou-li na počátku v klidu.

V tomto případě uvolníme lano mezi tělesem m_1 a kladkou, které přenáší sílu S_1 , a lano mezi kladkou a tělesem m_2 přenášející sílu S_2 . Vnější síly jsou obě tíhy G_1 ; G_2 normálová reakce podložky N a třecí síla T .

Druhým krokem je sestavení pohybových rovnic jednotlivých těles - členů mechanismu. V pohybových rovnicích jsou kromě vnějších sil i vnitřní - vazbové síly (nebo momenty).



Pohybové rovnice pro jednotlivé členy:

Těleso m_1 :

$$m_1 \cdot a = S_1 - G_1 \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$

Kladka:

$$I \cdot \varepsilon = S_2 \cdot r - S_1 \cdot r$$



Těleso m_2 :

$$m_2 \cdot a = G_2 - S_2$$

Doplňme o kinematické závislosti

$$a = \varepsilon \cdot r$$

a vztah pro smykové tření (známý ze statiky)

$$T = N \cdot f$$

Řešením soustavy rovnic pak získáme pak nejen zrychlení, ale i síly S_1 ; S_2 ; N a T .

$$a = \frac{G_2 - G_1 \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right)}$$

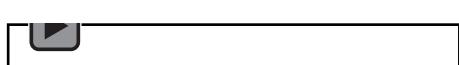
Princip je stejný pro všechny mechanismy jen pohybové rovnice, či pseudostatické rovnice pomocí D'Alambertova principu budou odpovídat příslušným pohybům. Podobně lze řešit i mechanismy s proměnným převodem.

1.1.1 Dynamika rovinných mechanismů s konstantním převodem s jedním stupněm volnosti (metoda redukce)

Metoda redukce spočívá v převedení soustavy těles na jediné redukované těleso pohybující se posuvným nebo rotačním pohybem, jehož setrvačné vlastnosti (hmotnost m nebo moment setrvačnosti J) odpovídají setrvačným vlastnostem původní soustavy a v převedení sil a momentů sil na jedinou odpovídající sílu či moment síly. Pro snadný výpočet obojího lze jednomu z členů přiřadit určitou virtuální rychlosť a pak určit rychlosti všech ostatních členů.



Audio 1.2 Dynamika rovinných mechanismů.



Určení setrvačných vlastností vychází z úvahy, že náhradní těleso má stejnou kinetickou energii jako původní soustava. Cílem je určit redukovanou hmotnost m_{red} nebo redukovaný moment setrvačnosti J_{red} . V případě, že mechanismus obsahuje L členů vykonávajících posuvný pohyb; M členů vykonávajících rotační pohyb a N členů vykonávajících obecný rovinný pohyb pak lze kinetikou energii vypočít ze vztahu:

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^L m_i \cdot v_i^2 + \sum_{j=1}^M J_j \cdot \omega_j^2 + \sum_{k=1}^N (m_k \cdot v T_k^2 + J_k \cdot \omega_k^2) \right)$$

Redukovanou hmotnost či moment setrvačnosti pak lze vypočít z následujících rovnic, v_{red} či ω_{red} jsou rychlosti členu, na který redukujeme.

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v_{red}^2$$

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot J_{red} \cdot \omega_{red}^2$$

Rychlosti jsou virtuální a v rovnicích vystupují vždy ve formě poměrů, takže na zvolené rychlosti nezáleží, často se v předchozích rovnicích používají převody.

Obdobně lze určit redukovanou sílu z principu virtuálních výkonů sil a momentů, které by konaly stejnou práci při virtuální pohybu mechanismu. Zde je nutno brát ohled na to jaký úhel svírá síla se směrem virtuálního pohybu.



$$\vec{F}_{RED} \cdot \vec{v}_{red} = \sum_{l=1}^O \vec{F}_l \cdot \vec{v}_l + \sum_{m=1}^P \vec{M}_m \cdot \vec{\omega}_m$$

Jakmile byly určeny hodnoty redukovaných veličin (J_{red} , M_{red} nebo m_{red} ; F_{red}) platí pohybová rovnice pro redukovaný člen. Zrychlení je pak totožné se zrychlením příslušného člena, na který redukujeme.

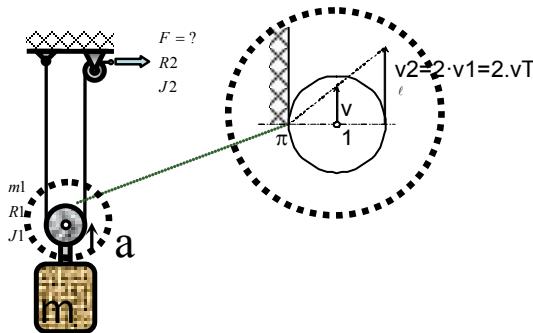
$$F_{RED} = m_{red} \cdot a$$

$$M_{RED} = J_{red} \cdot \varepsilon$$

Tato metoda má výhodu, že se počítá jen s jedinou rovnicí (pro mechanismy s jedním stupněm volnosti). Nevýhodou je, že nelze zjistit síly a momenty ve vnitřních vazbách. Obě metody je možno kombinovat.

1.1.1.1 Příklad

Určete potřebnou sílu F , aby bylo břemeno o hmotnosti mT vytahováno se zrychlením a . Poloměr volné kladky je R_1 a její moment setrvačnosti k těžišti, které leží v geometrickém středu je J_1 a její hmotnost je m_1 . Poloměr pevné kladky je R_2 její moment setrvačnosti J_2 a její hmotnost v případě zanedbání pasivních odporů nehraje roli.



Řešení: Jedná se o kladkostroj s jedním stupněm volnosti. Těleso vykonává posuvný pohyb rychlostí v , pevná kladka rotační pohyb úhlovou rychlostí ω_2 a volná kladka obecný rovinný pohyb (v_1, ω_1).

V případě redukce na těleso platí:

a) Redukce setrvačních účinků:

$$\frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^L m_i \cdot v_i^2 + \sum_{j=1}^M J_j \cdot \omega_j^2 + \sum_{k=1}^N (m_k \cdot v T_k^2 + J_k \cdot \omega_k^2) \right)$$

$$m_{red} \cdot v T^2 = mT \cdot v T^2 + J_2 \cdot \omega_2^2 + (m_1 \cdot v_1^2 + J_1 \cdot \omega_1^2)$$

Z kinematiky platí

$$v_1 = vT$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{vT}{R_1}$$

$$\omega_2 = \frac{v_1 \cdot 2}{R_2} = \frac{vT \cdot 2}{R_2}$$

$$v_2 = 2v_1$$



po dosazení

$$m_{red} \cdot vT^2 = mT \cdot vT^2 + J2 \cdot \left(\frac{vT \cdot 2}{R2} \right)^2 + \left(m1 \cdot vT^2 + J1 \cdot \left(\frac{vT}{R} \right)^2 \right)$$

$$m_{red} = mT + J2 \cdot \left(\frac{2}{R2} \right)^2 + \left(m1 + J1 \cdot \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right)$$

- b) Redukce pracovních sil. Síly, které konají práci, jsou síla F , tíha břemene a tíha volné kladky. Žádný moment v zadaném příkladu nevykovává práci. Při redukci pracovních sil je nutno dát pozor na vzájemné orientace sil a rychlostí, lze využít pravidlo o velikosti skalárního součinu dvou vektorů. Výsledek je roven součinu velikostí obou vektorů a kosinu úhlu, který svírají. Mají-li vektory \mathbf{F} a \mathbf{v} nebo \mathbf{M} a $\boldsymbol{\omega}$ stejný směr a opačnou orientaci je úhel roven 180° a stačí přidat jen znaménko minus.

$$\vec{F}_{RED} \cdot \vec{v} = \sum_{l=1}^O \vec{F}_l \cdot \vec{v}_l + \sum_{m=1}^P \vec{M}_m \cdot \vec{v}_m$$

$$\vec{F}_{RED} \cdot \vec{v}T = -mT \cdot g \cdot vT - m1 \cdot g \cdot v1 \cdot + F \cdot v2$$

$$\vec{F}_{RED} \cdot \vec{v}T = -mT \cdot g \cdot vT - m1 \cdot g \cdot vT \cdot + F \cdot 2 \cdot vT$$

$$\vec{F}_{RED} = -mT \cdot g - m1 \cdot g + F \cdot 2$$

Dosadíme do pohybové rovnice pro redukovaný člen $F_{RED}=m_{red} \cdot a$, kde a je zrychlení břemene neboť na "něj" redukujeme.

$$-mT \cdot g - m1 \cdot g + F \cdot 2 = \left[m + J2 \cdot \left(\frac{2}{R2} \right)^2 + \left(m1 + J1 \cdot \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right) \right] \cdot a$$

Z této rovnice lze velmi snadno vypočítat sílu F .

Podobně při redukci na člen, který se pohybuje rotačním pohybem se stejným zrychlením jako pevná kladka (redukce na pevnou kladku) bychom dostali.

$$J_{red} = mT \cdot \left(\frac{R2}{2} \right)^2 + J2 \cdot \left(m1 \cdot \left(\frac{R2}{2} \right)^2 + J1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

$$M_{red} = -mT \cdot g \cdot \frac{R2}{2} - m1 \cdot g \cdot \frac{R2}{2} + F \cdot R2$$

Pohybová rovnice pak má tvar $\mathbf{M}_{RED} = \mathbf{J}_{red} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$. Je ovšem zadáno zrychlení břemena pak je nutno doplnit rovnice o vztah z kinematiky.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{2 \cdot a}{R2}$$

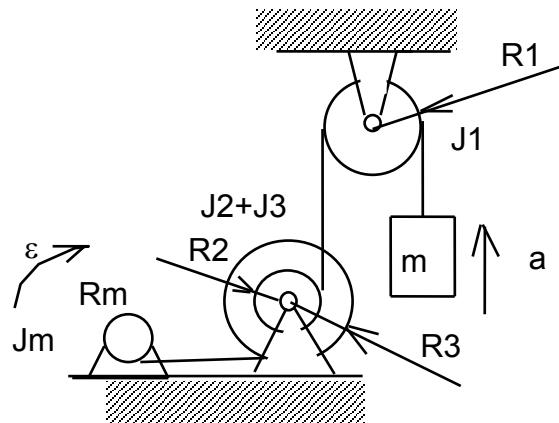
Všimněte si, že ve výsledných vztazích **u mechanismů s konstantními převody** se žádné rychlosti nevystupují. Je také možno si určitou velikost rychlosti kteréhokoliv člena zvolit (např. $v=1 \text{ m.s}^{-1}$) a rychlosti či úhlové rychlosti ostatních členů vypočítat. Na velikost zvolené rychlosti nezáleží, neboť se vždy zkrátí.



1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.2.1 Příklad 1

Motor s kotoučem o poloměru R_m vytahuje břemeno přes převod tvořený koly o poloměrech R_2 a R_3 a kladku o poloměru R_1 viz obrázek. Určete, jaké otáčky musí mít motor, aby se těleso o hmotnosti m pohybovalo směrem vzhůru rychlostí v . (ostatních údajů v obrázku si nevšímejte)



$$R_m = 50 \text{ mm}$$

$$R_2 = 100 \text{ mm}$$

$$R_3 = 300 \text{ mm}$$

$$R_1 = 100 \text{ mm}$$

$$v = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

(výsledek $n = 1146.\text{min}^{-1}$).

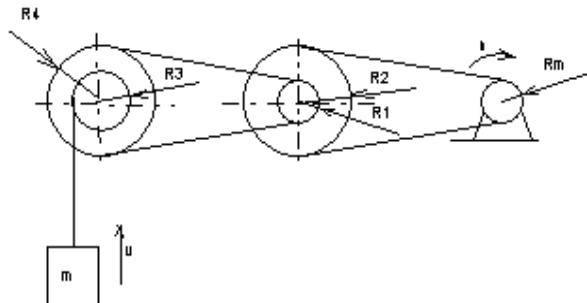
Dynamika (předchozí obrázek)

Motor o poloměru R_m a momentu setrvačnosti $J_m = 0,5 \text{ kg.m}^2$ vytahuje břemeno přes převod tvořený koly o poloměrech R_2 a R_3 a celkovém momentu setrvačnosti $J_2+J_3=3 \text{ kg.m}^2$ a kladku o poloměru R_1 a momentu setrvačnosti $J_1=1 \text{ kg.m}^2$ viz obrázek. Určete, jaký moment musí vyvinout motor, aby se těleso o hmotnosti $m=500 \text{ kg}$ pohybovalo směrem vzhůru se zrychlením $a=2.\text{m.s}^{-2}$. Pasivní odpory jsou zanedbatelné. (Výsledek $M=171,7 \text{ N.m}$).



1.2.2 Příklad 2

Motor se otáčí konstantními otáčkami n , určete jakou rychlosť (pouze rychlosť) bude zvedáno břemeno přes převody, viz obrázek. Poloměr motoru je R_m ; poloměry jednotlivých kol jsou R_1, R_2, R_3, R_4 .



$$R_m = 60 \text{ mm}$$

$$R_1 = 50 \text{ mm}$$

$$R_2 = 100 \text{ mm}$$

$$R_3 = 60 \text{ mm}$$

$$R_4 = 100 \text{ mm}$$

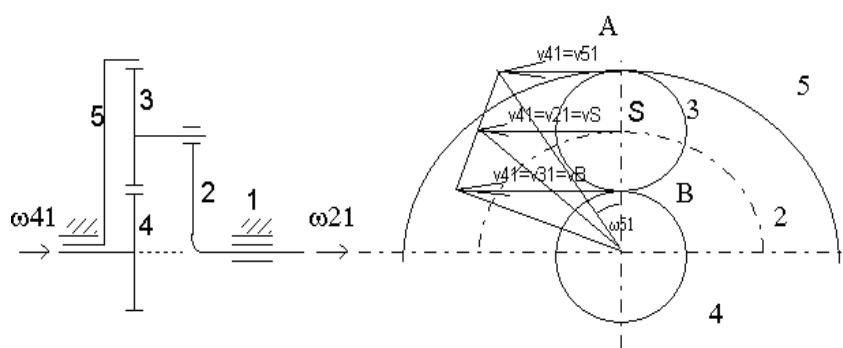
$$n = 0,833 \text{ s}^{-1}$$

$$(n = 50 \text{ min}^{-1})$$

Výsledek rychlosť břemene $v_B = 0,094 \text{ m.s}^{-1}$.

1.2.3 Příklad 3

Unašeč planetového soukolí se otáčí úhlovou rychlosť ω_{21} a kolo 4 rychlosť ω_{41} . Jakou rychlosť a v jakém smyslu se otáčí kolo 5 (ω_{51}). Jako návodě využijte obrázku bokorysu s vykreslenými rychlosťmi. (neuvážujte popis v_{41} v A a S). Řešte také se zablokováným korunovým kolem 5 a určete ω_{41} (úhlová rychlosť centrálního kola), kterou považujte v tomto případě za neznámou, když ω_{21} zůstane stejná. $\omega_{41}=8\text{rad.s}^{-1}$; $\omega_{21}=2 \text{ rad.s}^{-1}$; $r_4=0,2 \text{ m}$; $r_5=0,5 \text{ m}$.



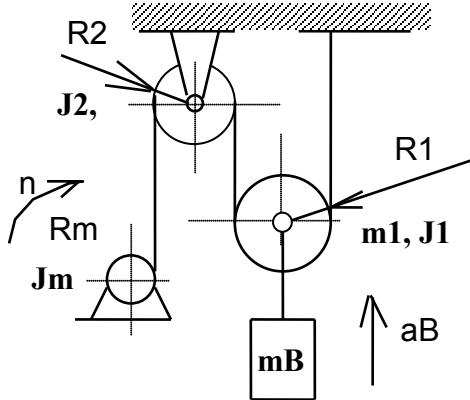
Výsledky: Úhlová rychlosť kola 5 je $\omega_{51}=-6\text{s}^{-1}$. (tzn. opačně než kolo 4); při zablokování korunovém kole a stejné úhlové rychlosti unašeče

$$\omega_{21}=2\text{s}^{-1}, \text{ je } \omega_{41}=-7\text{s}^{-1}$$



1.2.4 Příklad 4

Těleso o hmotnosti m_B je zvedáno pomocí kladkostroje. Zrychlení tělesa je a_B . Hmotnost volné kladky o poloměru R_1 je m_1 a její moment setrvačnosti ke středu je J_1 . Moment setrvačnosti pevné kladky o poloměru R_2 je J_2 . Moment setrvačnosti motoru včetně kola o poloměru R_m , na které je navíjeno lano, je J_m .



Určete potřebný hnací moment na motoru, který vyvodí toto zrychlení.

$$a_B = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

$$m_B = 500 \text{ kg}$$

$$m_1 = 20 \text{ kg}$$

$$J_1 = 0,4 \text{ kg.m}^2$$

$$R_1 = 100 \text{ mm}$$

$$J_2 = 0,8 \text{ kg.m}^2$$

$$R_2 = 150 \text{ mm}$$

$$J_m = 0,4 \text{ kg.m}^2$$

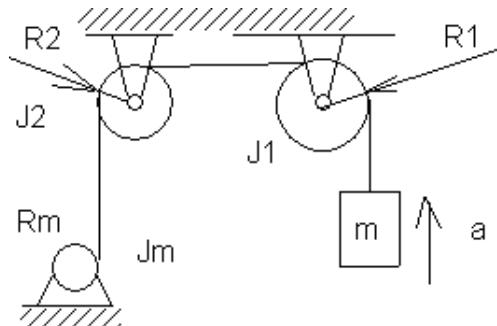
$$R_m = 50 \text{ mm}$$

Výsledek $M_h = 194,60 \text{ N.m.}$



1.2.5 Příklad 5

Určete moment, který musí působit na motoru ke kterému je připojen kotouč o poloměru R_m (celkový moment setrvačnosti kotouče a motoru je J_m) při zvedání břemene se zrychlením a , přes dvě kladky o poloměrech R_1 a R_2 s momenty setrvačnosti J_1 a J_2 . Hmotnost tělesa je m_t .

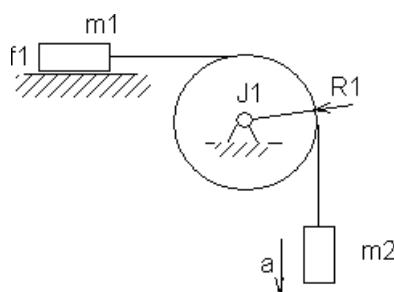


$$\begin{aligned} m_t &:= 50 \cdot \text{kg} \\ a_t &:= 1.5 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2} \\ J_m &:= 0.5 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ J_1 &:= 2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ R_1 &:= 100 \cdot \text{mm} \\ R_m &:= 60 \cdot \text{mm} \\ J_2 &:= 1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ R_2 &:= 80 \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

Výsledek $M_h=78,48 \text{ N.m.}$

1.2.6 Příklad 6

Určete zrychlení, s jakým se bude pohybovat těleso o hmotnostech m_2 v dané soustavě (obr). Působí-li na těleso s hmotností m_2 tíhová síla. Moment setrvačnosti kladky o poloměru R_1 je J_1 . Koeficient tření mezi tělesem o hmotnosti m_1 a podložkou je f_1 .



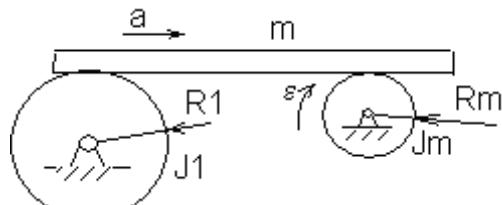
$$\begin{aligned} R_1 &:= 100 \cdot \text{mm} \\ m_1 &:= 10 \cdot \text{kg} \\ m_2 &:= 20 \cdot \text{kg} \\ J_1 &:= 0.1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ f_1 &:= 0.2 \end{aligned}$$

Výsledek $a_2=4,413 \text{ m.s}^{-2}$



1.2.7 Příklad 7

Po dvou kotoučích se posouvá těleso o hmotnosti m se zrychlením a (kotouč o poloměru R_m je spojen s motorem). Určete, jaký moment musí působit na motoru. Moment setrvačnosti motoru včetně připojeného kotouče o poloměru R_m je J_m , moment setrvačnosti druhého kotouče o poloměru R_1 je J_1 . Mezi kotouči a tělesem nenastává prokluz. (Představte si je jako ozubená kola a ozubenou tyč). Napište, jaké pohyby vykonávají kotouče a těleso.



$$R_1 := 200 \cdot \text{mm}$$

$$J_1 := 4 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$a := 1.5 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$$

$$R_m := 100 \cdot \text{mm}$$

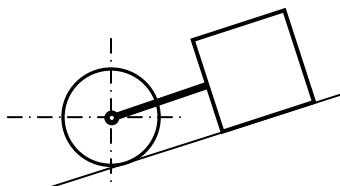
$$J_m := 1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m := 100 \cdot \text{kg}$$

Výsledek $M_h=45 \text{ N.m.}$

1.2.8 Příklad 8

Válec o hmotnosti m_a a poloměru r se valí bez prokluzu po nakloněné rovině, skloněně od vodorovného směru o úhel β . Válec je ve svém středu spojen s lankem s břemenem o hmotnosti m_b , které se rovněž smýká po nakloněné rovině. Koeficient tření mezi břemenem a podložkou je f .



Určete společné zrychlení středu válce a břemene a. Lanko je rovnoběžné s nakloněnou rovinou. Moment setrvačnosti válce je $I_v = 1/2 \cdot m \cdot r^2$, valivé tření je zanedbatelné.

$$m_a := 23 \cdot \text{kg}$$

$$r := 12 \cdot \text{cm}$$

$$m_b := 30 \cdot \text{kg}$$

$$f := 0.2$$

$$\beta := 25 \cdot \text{deg}$$

Výsledek $a=2,579 \text{ m.s}^{-2}$.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Kinematika mechanismů s proměnným převodem

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	KINEMATIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM	3
1.1	Kinematika mechanismů s proměnným převodem	4
1.1.1	Vektorová metoda:.....	5
1.1.2	Příklad.....	8
1.1.3	Příklad.....	10
1.2	Příklady k procvičení	11
1.2.1	Příklad 1.....	11
1.2.2	Příklad 2.....	11
1.2.3	Příklad 3.....	12
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	13



1 KINEMATIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Kinematika mechanismů s proměnným převodem.

Odvození zdvihové závislosti vektorovou metodou.

Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Píst klikového mechanismu se přemístí o určitou délku, jak se pohne klika? Nelze říci, že potočením kliky o úhel 2α se píst posune o určitou délku, protože tento poměr konstantní, ale záleží na okamžité poloze. Podobné problémy je možno řešit různými způsoby, v tomto materiálu je zvoleno analytické řešení.



CÍL:

Kinematika mechanismů s proměnným převodem.



MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

CZ.1.07/2.2.00/15.0463

1.1 KINEMATIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM

Pro řešení kinematiky mechanismů s proměnným převodem bude v tomto materiálu uvedena jen analytická metoda. Řešení jinými metodami pro rovinné mechanismy bylo probráno v kapitole o obecném rovinném pohybu na příkladu řešení pohybu ojnice. Výhoda analytického řešení je jeho univerzální použitelnost i pro prostorové mechanismy s více stupni volnosti. V kinematice i dynamice těchto mechanismů hrají významnou roli tři převodové funkce, které se nazývají zdvihofá závislost, převod a derivace převodu.

Zdvihofá závislost je vztah mezi vstupní souřadnicí $q_{vstupní}$ a výstupní souřadnicí $q_{výstupní}$ mechanismu (každá z nich může být úhlová nebo délková souřadnice). Jejimi časovými derivacemi lze vyřešit rychlosti a zrychlení jednotlivých členů.

$$q_{výstupní} = f(q_{vstupní})$$

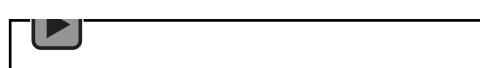
Převod P lze získat derivací zdvihofé závislosti podle vstupní souřadnice a je to poměr zobecněné výstupní a vstupní rychlosti $\frac{dq}{dt}$ (rychlosti mohou být úhlové nebo klasické), zde jsou značeny jako časové derivace souřadnic q .

$$P = \frac{df(q_{vstupní})}{dq_{vstupní}}$$

$$\dot{q}_{výstupní} = P \cdot \dot{q}_{vstupní}$$

Derivace převodu derP je derivací převodu podle vstupní souřadnice.

Audio 1.1 Kinematika mechanismů s PP.



$$derP = \frac{dP}{dq_{vstupní}}$$

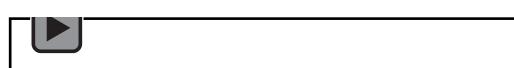
Pak výstupní zobecněné **zrychlení** lze vypočítat jako:

$$\ddot{q}_{výstupní} = derP \cdot \dot{q}_{vstupní}^2 + P \cdot \ddot{q}_{vstupní}$$

Odvození zdvihofé závislosti.

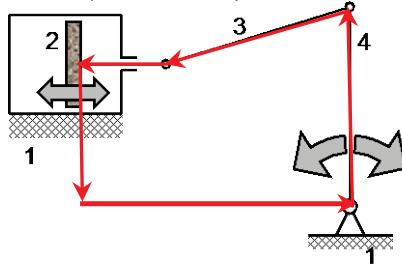
Odvodit zdvihofou závislost je možno podobně jako u analytického řešení obecného rovinného pohybu pomocí vektorové či trigonometrické metody. Členy mechanismu nahradíme vektory, které tvoří uzavřené řetězce (v případě roviny mnohoúhelníky) a můžeme sestavit úlohu polohy.

Audio 1.2 Zdvihofá závislost.

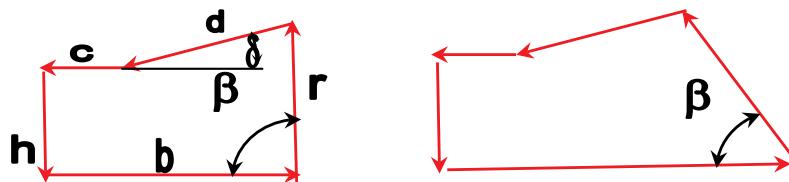


Jednoduché mechanismy (do čtyř členů) lze popsat jedním mnohoúhelníkem. U složených mechanismů je mnohoúhelníků více. Pro zjišťování rychlostí, či zrychlení jednotlivých členů není vždy nutno vyjádřit převodové funkce explicitně. Stačí i jejich časové derivace.



Příklad:**Excentrický klikový mechanismus (kinematika):**

Excentrický klikový mechanismus



Praktická rada: Při kreslení vektorů mechanismu v obecné poloze se snažte o to, aby úhly, které se v průběhu pohybu mění, nebyly rovny přesně 0° , 90° , 180° , 270° často se pak na to, že se mění a jejich derivace nejsou nulové zapomene, viz úhel β v předchozím obrázku.

1.1.1 Vektorová metoda

$$\vec{b} + \vec{r} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{h} = \vec{0}$$

Ve složkách:

$$\begin{aligned} b - r \cdot \cos(\beta) - d \cdot \cos(\delta) - c &= 0 \\ r \cdot \sin(\beta) - d \cdot \sin(\delta) + h &= 0 \end{aligned}$$

S časem se zde mění úhly β a δ a vzdálenost b . Úhel β narůstá ve směru hodinových ručiček, úhel δ proti směru hodinových ručiček a souřadnice b narůstá vlevo, což nám dává kladné směry i pro časové derivace. Časové derivace úhlů jsou úhlové rychlosti a časová derivace souřadnice b je rychlosť pístu vp. Druhé derivace podle času jsou pak úhlová zrychlení a zrychlení pístu ap.

$$\begin{aligned} \dot{b} &= vp \\ \ddot{b} &= v\dot{p} = ap \\ \dot{\beta} &= \omega_4 \\ \ddot{\beta} &= \dot{\omega}_4 = \varepsilon_4 \\ \dot{\delta} &= \omega_3 \\ \ddot{\delta} &= \dot{\omega}_3 = \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Z těchto rovnic je možno vyjádřit například vzdálenost b jako funkci úhlu β $b=f(\beta)$. Považujeme-li souřadnici β za vstupní a b za výstupní pak se jedná o zdvihovou závislost. Derivací zdvihové závislosti podle β získáme kinematický převod P a druhou derivací zdvihové závislosti podle β pak derivaci převodu.

$$P = \frac{df(\beta)}{d\beta}$$

$$derP = \frac{dP}{d\beta}$$



Rychlosť a zrychlení výstupního členu (pístu) lze vypočítat jako:

$$vp = P \cdot \omega 4$$

$$v\dot{p} = \frac{dP}{d\beta} \cdot \dot{\beta} \cdot \omega 4 + P \cdot \dot{\omega} 4$$

$$ap = derP \cdot \omega 4^2 + P \cdot \varepsilon 4$$

Často se používají přímo časové derivace úlohy polohy.

Pro rychlosti ve složkách platí:

$$vp + r \cdot \sin(\beta) \cdot \omega 4 + d \cdot \sin(\delta) \cdot \omega 3 = 0$$

$$r \cdot \cos(\beta) \cdot \omega 4 - d \cdot \cos(\delta) \cdot \omega 3 = 0$$

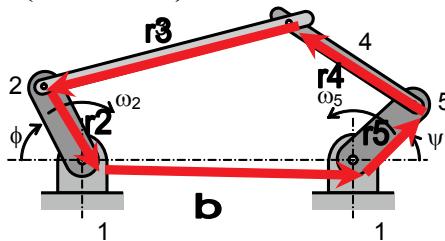
Pro zrychlení ve složkách platí:

$$ap + r \cdot (\cos(\beta) \cdot \omega 4^2 + \sin(\beta) \cdot \varepsilon 4) + d \cdot (\cos(\delta) \cdot \omega 3^2 + \sin(\delta) \cdot \varepsilon 3) = 0$$

$$r \cdot (-\sin(\beta) \cdot \omega 4^2 + \cos(\beta) \cdot \varepsilon 4) + d \cdot (\sin(\delta) \cdot \omega 3^2 - \cos(\delta) \cdot \varepsilon 3) = 0$$

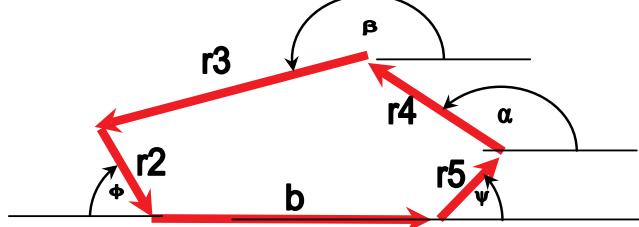
Rovnice jsou pro neznámé rychlosti a zrychlení soustavou lineárních rovnic a pro jejich řešení lze použít některou ze známých metod (dosazovací, Gaussovu eliminaci, Cramerovo pravidlo.....).

Čtyřkloubový mechanismus (kinematika)



Mechanismus se dvěma stupni volnosti

Rovinný mechanismus,
se dvěma stupni volnosti,
s proměnným převodem,
s pěti členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



Úloha polohy:

$$\vec{b} + \vec{r}5 + \vec{r}4 + \vec{r}3 + \vec{r}2 = \vec{0}$$

Ve složkách

$$r5 \cdot \cos(\psi) + r4 \cdot \cos(\alpha) + r3 \cdot \cos(\beta) + r2 \cdot \cos(\phi) + b = 0$$

$$r5 \cdot \sin(\psi) + r4 \cdot \sin(\alpha) + r3 \cdot \sin(\beta) - r2 \cdot \sin(\phi) = 0$$



S časem se mění jen všechny úhly, jejich první derivace podle času jsou úhlové rychlosti ω a druhé pak úhlová zrychlení ε . Kladné orientace lze vidět na obrázku.

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \omega_5 \\ \ddot{\psi} &= \dot{\omega}_5 = \varepsilon_5 \\ \dot{\alpha} &= \omega_4 \\ \ddot{\alpha} &= \dot{\omega}_4 = \varepsilon_4 \\ \dot{\beta} &= \omega_3 \\ \ddot{\beta} &= \dot{\omega}_3 = \varepsilon_3 \\ \dot{\phi} &= \omega_2 \\ \ddot{\phi} &= \dot{\omega}_2 = \varepsilon_2\end{aligned}$$

Pro **rychlosti** po derivaci složkových rovnic podle času tedy platí:

$$\begin{aligned}-r_5 \cdot \sin(\psi) \cdot \omega_5 - r_4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega_4 - r_3 \cdot \sin(\beta) \cdot \omega_3 - r_2 \cdot \sin(\phi) \cdot \omega_2 &= 0 \\ r_5 \cdot \cos(\psi) \cdot \omega_5 + r_4 \cdot \cos(\alpha) \cdot \omega_4 + r_3 \cdot \cos(\beta) \cdot \omega_3 - r_2 \cdot \cos(\phi) \cdot \omega_2 &= 0\end{aligned}$$

Podobně pro zrychlení:

$$\begin{aligned}-r_5 \cdot (\cos(\psi) \cdot \omega_5^2 + \sin(\psi) \cdot \varepsilon_5) - r_4 \cdot (\cos(\alpha) \cdot \omega_4^2 + \sin(\alpha) \cdot \varepsilon_4) - r_3 \cdot (\cos(\beta) \cdot \omega_3^2 + \sin(\beta) \cdot \varepsilon_3) - r_2 \cdot (\cos(\phi) \cdot \omega_2^2 + \sin(\phi) \cdot \varepsilon_2) &= 0 \\ r_5 \cdot (-\sin(\psi) \cdot \omega_5^2 + \cos(\psi) \cdot \varepsilon_5) + r_4 \cdot (-\sin(\alpha) \cdot \omega_4^2 + \cos(\alpha) \cdot \varepsilon_4) + r_3 \cdot (-\sin(\beta) \cdot \omega_3^2 + \cos(\beta) \cdot \varepsilon_3) - r_2 \cdot (-\sin(\phi) \cdot \omega_2^2 + \cos(\phi) \cdot \varepsilon_2) &= 0\end{aligned}$$

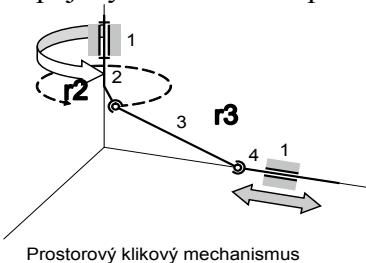
Při znalostech rychlostí a zrychlení dvou ze čtyř členů lze zbývající rychlosti a zrychlení snadno vypočítat. Pro neznámé rychlosti a zrychlení se jedná o dvě lineární rovnice o dvou neznámých.



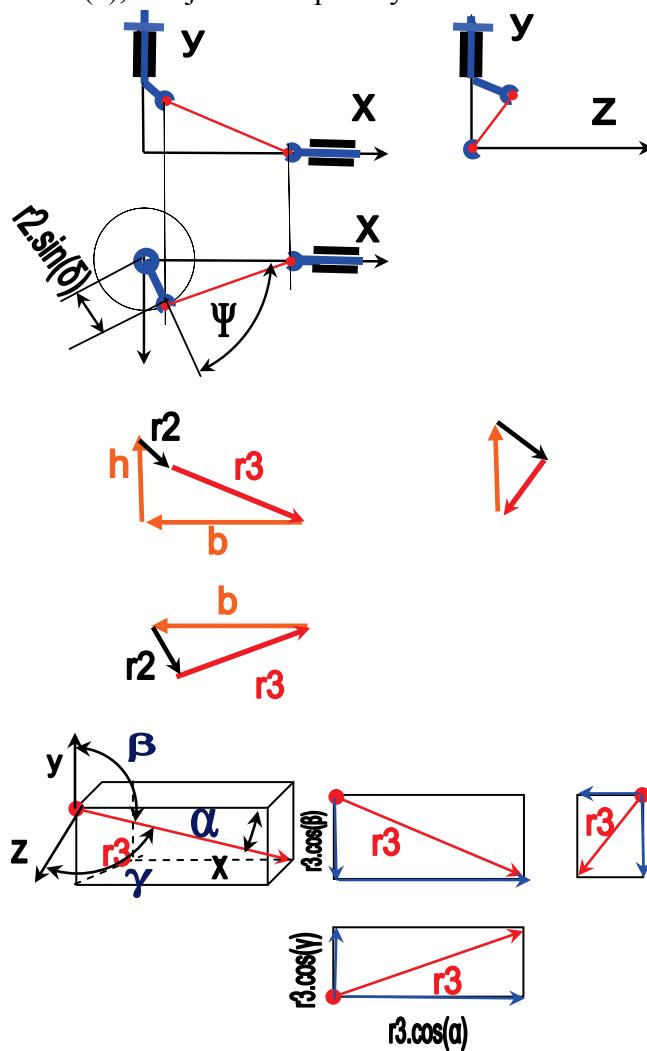
1.1.2 Příklad

Prostorový klikový mechanismus

prostorový mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s proměnným převodem,
se čtyřmi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



Stejný postup lze použít i pro mechanismy v prostoru jen úlohu polohy je vhodné rozložit do tří k sobě navzájem kolmých složek. Je nutno dávat si mnohem větší pozor na to které úhly a vzdálenosti se v čase mění, člen 2 je tvořen lomenou klikou a úhel zlomu označím β . V půdorysu je pak vidět $r_2 \sin(\delta)$, což je vidět v půdorysu.



Úhly, které svírá člen 3 o délce r_3 se souřadnicovými osami x, y a z označíme α , β a γ . Je nutno si uvědomit, že se jedná o prostorové úhly a na obrázcích jsou vidět jen jejich průměty.



Úloha polohy

$$\vec{b} + \vec{h} + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{0}$$

Se složkami je to trochu složitější, protože je zapotřebí složkové rovnice doplnit ještě o geometrický vztah mezi úhly. Znaménka jsou zahrnuta v úhlech.

$$-b + r_2 \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\psi) + r_3 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$h - r_2 \cdot \cos(\delta) + r_3 \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$r_2 \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\psi) + r_3 \cdot \cos(\gamma) = 0$$

Doplňková rovnice:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Existují i jiné možnosti sestavení úlohy polohy, ale vždy budeme hledat vztah mezi b a ψ . V těchto rovnicích se s časem mění úhly α , β , γ a ψ a vzdálenost b, úhel δ je konstantní. Uvedeny jsou jen rovnice pro výpočet rychlostí, které jsou opět při znalosti geometrie a bud' rychlosti pístu, nebo úhlové rychlosti členu 2, soustavou lineárních rovnic.

$$\dot{\psi} = \omega_2$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\omega}_2 = \varepsilon_2$$

$$\dot{\alpha} = \omega_\alpha$$

$$\ddot{\alpha} = \dot{\omega}_\alpha = \varepsilon_\alpha$$

$$\dot{\beta} = \omega_\beta$$

$$\ddot{\beta} = \dot{\omega}_\beta = \varepsilon_\beta$$

$$\dot{\gamma} = \omega_\gamma$$

$$\ddot{\gamma} = \dot{\omega}_\gamma = \varepsilon_\gamma$$

$$\dot{b} = v_p$$

$$\ddot{b} = \dot{v}_p = a_p$$

Rychlosti+ derivovaný vztah mezi úhly:

$$-v_p - r_2 \cdot \sin(\delta) \cdot \sin(\psi) \cdot \omega_2 - r_3 \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega_\alpha = 0$$

$$-r_3 \cdot \sin(\beta) \cdot \omega_\beta = 0$$

$$r_2 \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(\psi) \cdot \omega_2 - r_3 \cdot \sin(\gamma) \cdot \omega_\gamma = 0$$

$$2 \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega_\alpha + 2 \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \cdot \omega_\beta + 2 \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \cdot \omega_\gamma = 0$$

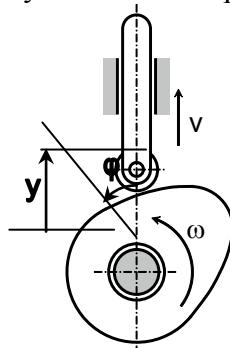
Pro určení zrychlení jsou nutné další derivace podle času, kde je nutno dávat si pozor na derivaci složených funkcí. I tak je vidět, že úhel β je konstantní a $\omega\beta=0$. Pro zjednodušení lze poslední rovnici upravit při znalostech pravidel o počítání s goniometrickými funkcemi $2\sin(a)\cos(a)=\sin(2a)$.



1.1.3 Příklad

Vačkový mechanismus (kinematika)

rovinný mechanismus,
s jedním stupněm volnosti,
s proměnným převodem,
se třemi členy (první člen je rám spojený se základním prostorem).



U vačky je zdvihová závislost daná závislostí mezi souřadnicí y a úhlem φ . Rychlosť a zrychlenie lze vypočítať pôvodou derivácií. Pôdopokladá sa, že vačka a výstupný člen sú v trvalom dotyku.

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi) \\ v &= \frac{f(\varphi)}{d\varphi} \cdot \omega \\ v &= P(\varphi) \cdot \omega \\ a &= \frac{P(\varphi)}{d\varphi} \cdot \omega^2 + P(\varphi) \cdot \varepsilon \\ a &= \text{der}P(\varphi) \cdot \omega^2 + P(\varphi) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

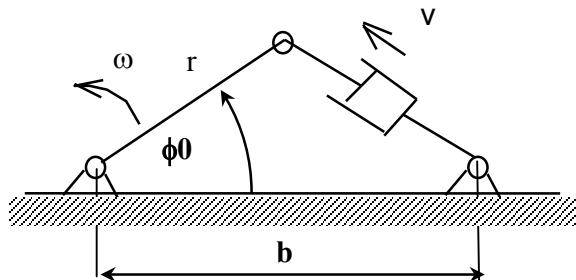
Pozn. Pokuste sa vypočítať tyto hodnoty, jedná-li se o kruhový excentr s excentricitou e .



1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.2.1 Příklad 1

U mechanismu na obrázku se z válce konstantní rychlosť vysunuje píst.



Určete: Úhlovou rychlosť ω a zrychlení ϵ_k kliky o poloměru r v okamžiku, kdy úhel ϕ má hodnotu ϕ_0 .

$$b=3 \text{ m}$$

$$r=1 \text{ m}$$

$$\phi_0=60^\circ$$

$$v=2 \text{ m.s}^{-1}$$

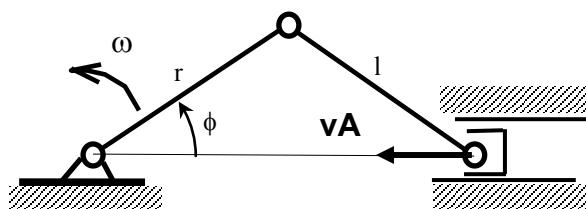
Výsledky:

$$\omega_k=2,037 \text{ s}^{-1}$$

$$\epsilon_k=-0,855 \text{ s}^{-2}$$

1.2.2 Příklad 2

Klikový mechanismus je tvořen klikou o délce r a ojnicí o délce l . Úhel, který svírá klika s osou pístu je ϕ . Klika se otáčí konstantními otáčkami n . Určete rychlosť a zrychlení pístu v_A a a_A .



$$r=120 \text{ mm}$$

$$l=300 \text{ mm}$$

$$\phi=60^\circ$$

$$n=1480 \text{ otáček za minutu}$$

Výsledky:

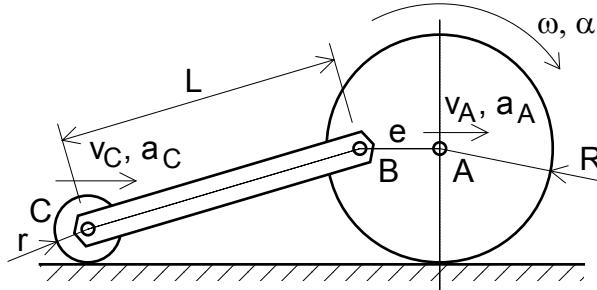
$$v_A=-19,54 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a_A=-868,6 \text{ m.s}^{-2}$$



1.2.3 Příklad 3

Válec o poloměru R se valí (bez prokluzu) po vodorovné podložce tak, že jeho střed A se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem s konstantním zrychlením a_A . V bodě B je k válci kloubově uchyceno táhlo délky L, na jehož konci (bod C) je kladička o poloměru r. Tato se rovněž valí po podložce. Rozteč středu válce A a kloubu tálka B je e. V počáteční poloze je kloub tálka B v nejnižší poloze svisle pod středem válce A, počáteční rychlosť válce v této poloze je nulová ($v_{A0}=0$).



Určete rychlosť v_A středu válce A, rychlosť v_C a zrychlení a_C bodu C na konci tálka po otočení válce o 90° (kloub B vlevo od středu válce A, viz obrázek), o 180° (kloub B svisle nad středem válce A), o 270° (kloub B vpravo od středu válce A) a konečně o 360° (kloub B opět svisle pod středem válce A).

$$R = 15 \text{ cm}$$

$$e = 10 \text{ cm}$$

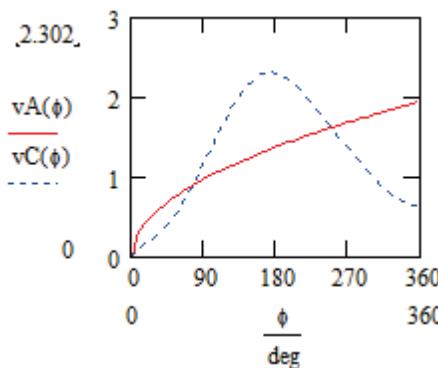
$$L = 45 \text{ cm}$$

$$r = 2 \text{ cm}$$

$$a_A = 2 \text{ m/s}^2$$

Výsledky:

$\phi := 0, 90 \cdot \text{deg}..360 \cdot \text{deg}$	
$\frac{\phi}{\text{deg}}$	$\frac{\psi(\phi)}{\text{deg}}$
0	3.823
90	16.791
180	30.738
270	16.791
360	3.823
	$\frac{v_A(\phi)}{\text{m.sec}^{-1}}$
0	0
90	0.971
180	1.373
270	1.681
360	1.942
	$\frac{v_C(\phi)}{\text{m.sec}^{-1}}$
0	0
90	1.166
180	2.288
270	1.343
360	0.647
	$\frac{a_C(\phi)}{\text{m.sec}^{-2}}$
0	0.667
90	7.652
180	-1.648
270	-7.786
360	1.786



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Dynamika mechanismů s proměnným převodem a s jedním stupněm volnosti

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1 DYNAMIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM A S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI	3
1.1 Dynamika mechanismů s proměnným převodem a s jedním stupněm volnosti	4
1.1.1 Příklad.....	5
1.1.2 Příklad.....	7
2 POUŽITÁ LITERATURA.....	9



1 DYNAMIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM A S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Dynamika mechanismů s proměnným převodem.

Odvození pohybové rovnice metodou redukce.

Ukázka na příkladech.



MOTIVACE:

Klikový mechanismus, který je součástí téměř všech automobilových motorů je mechanismus s proměnným převodem. Existuje mnoho dalších mechanismů s podobným převodem. Pokud nás zajímá proč a jak se tyto mechanismy pohybují, je zapotřebí najít pohybovou rovnici. V této části je uvedena jedna metoda pro získání pohybové rovnice a její použití na dvou příkladech.



CÍL:

Dynamika mechanismů s proměnným převodem.



1.1 DYNAMIKA MECHANISMŮ S PROMĚNNÝM PŘEVODEM A S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Dynamiku mechanismů s proměnným převodem, lze řešit stejně jako u mechanismů s konstantním převodem metodou uvolňování nebo redukce. Principy metody uvolňování jsou stejné, jako u metody uvolňování mechanismů s konstantním převodem jen kinematické rovnice jsou složitější a často je třeba je doplnit vztahy, které obsahují zrychlení těžišť mechanismů pohybujících se obecným rovinným či obecným prostorovým pohybem.

Audio 1.1 Dynamika mechanismů.



V tomto materiálu bude probrána jen metoda redukce.

Redukce sil (momentů sil) konajících práci je stejná jako v případě mechanismů s konstantním převodem.

$$\vec{F}_{RED} \cdot \vec{v} = \sum_{l=1}^O \vec{F}_l \cdot \vec{v}_l + \sum_{m=1}^P \vec{M}_m \cdot \vec{\omega}_m$$

$$\vec{M}_{RED} \cdot \vec{\omega} = \sum_{l=1}^O \vec{F}_l \cdot \vec{v}_l + \sum_{m=1}^P \vec{M}_m \cdot \vec{\omega}_m$$

Redukce setrvačních účinků je také formálně shodná.

Zde je uvedena varianta určení virtuální kinetické energie pro rovinný mechanismus s L členy konajícími posuvný pohyb, M členy konajícími rotační pohyb a N členy konajícími obecný rovinný pohyb.

$$2 \cdot Ek = \left(\sum_{i=1}^L m_i \cdot v^2_i + \sum_{j=1}^M J_j \cdot \omega_j^2 + \sum_{k=1}^N (m_k \cdot v T_k^2 + J_k \cdot \omega_k^2) \right)$$

Obecně

$$Ek = \sum_{i=1}^N Ek_i$$

Pak pro redukovanou hmotnost, či redukovaný moment setrvačnosti platí:

$$2 \cdot Ek = m_{red} \cdot v^2_{red}$$

$$2 \cdot Ek = J_{red} \cdot \omega^2_{red}$$

Pozor v těchto případech však redukovaná hmotnost, či redukovaný moment setrvačnosti nejsou konstantní, ale mění v závislosti na zobecněné souřadnici vstupního člena (úhlu nebo vzdálenosti). Změní se tedy i tvar pohybových rovnic pro redukované členy:

Derivace kinetické energie podle času je rovna výkonu. Výkon $P = F_{red} \cdot v$ pro redukci na posuvný člen. Pro redukci na člen s posuvným pohybem se směrem rychlosti a F_{RED} ve směru osy x, lze **odvodit pohybovou rovnici pomocí** rovnosti okamžitého výkonu (derivace kinetické energie) a součinu síly a rychlosti:

$$\frac{dEk}{dt} = P$$

$$P = \vec{F}_{RED} \cdot \vec{v}$$

$$Ek = \frac{1}{2} \cdot m_{RED} \cdot v^2$$



$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{RED}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{RED} \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{RED}}{dx} v^3 + m_{RED} \cdot v \cdot a$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{RED}}{dx} v^3 + m_{RED} \cdot v \cdot a = F_{RED} \cdot v$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{RED}}{dx} v^2 + m_{RED} \cdot a = F_{RED}$$

Podobně pro redukci na člen s rotačním pohybem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dJ_{RED}}{d\phi} \omega^2 + J_{RED} \cdot \varepsilon = M_{RED}$$

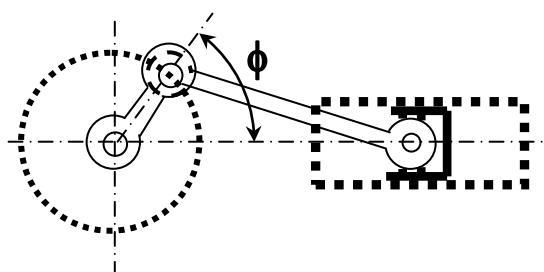
Obecně označíme-li m^* jako zobecněnou redukovanou hmotnost (m_{RED} nebo J_{RED}) q jako zobecněnou souřadnicí členu na který redukujeme a Q_{RED} (F_{RED} , M_{RED}) jako zobecněnou sílu působící na tento člen. Pak platí pohybová rovnice:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dm^*}{dq} \cdot \dot{q}^2 + m^* \cdot \ddot{q} = Q_{RED}$$

1.1.1 Příklad

Dynamika klikového hřídele:

Označíme kinematické veličiny potřebné pro redukci. Pro redukci nás zajímají vztahy mezi nimi, které jsou funkcí polohy dané buď polohou pístu či úhlem ojnice. V daném příkladě budeme redukovat na kliku.



Označení

Geometrie:

- r_K délka kliky
- l_O délka ojnice
- ϕ úhel kliky (kladná orientace proti směru hodinových ručiček)
- ψ úhel ojnice (kladná orientace ve směru hodinových ručiček)
- x Vzdálenost mezi osou rotace kliky a pístem
- l_T Vzdálenost mezi kloubem kliky a ojnice a těžištěm ojnice.

Pomocí analytické metody lze odvodit:

Úloha polohy:

$$r_K \cdot \cos(\phi) + l_O \cdot \cos(\psi) - x = 0$$

$$r_K \cdot \sin(\phi) - l_O \cdot \sin(\psi) = 0$$



Poloha těžiště ojnice

$$\begin{aligned}x_T &= r_K \cdot \cos(\phi) + l_T \cdot \cos(\psi) \\y_T &= r_K \cdot \sin(\phi) - l_T \cdot \sin(\psi)\end{aligned}$$

Úhel ψ jako funkce úhlu ϕ .

$$\psi = \arcsin\left(\frac{r_K \cdot \sin(\phi)}{l_o}\right)$$

Kinematické veličiny si vyjádříme jako funkci úhlu natočení kliky ϕ a úhlové rychlosti ojnice:

- 1) Úhlová rychlosť kliky ω_K .
- 2) Rychlosť pístu v_P .
- 3) Rychlosť těžiště ojnice v_{oT} (x-ový a y-ový směr).
- 4) Úhlová rychlosť ojnice ω_o .

Po úpravách a při znalostech goniometrických a cyklometrických funkcí:

$$\begin{aligned}\omega_o &= r_K \cdot \omega_K \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \\v_P &= -r_K \cdot \omega_K \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{l_T \cdot r_K \sin(\phi)}{2 \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right)\end{aligned}$$

Složky rychlosťi těžiště ojnice:

$$\begin{aligned}v_{oTx} &= -r_K \cdot \omega_K \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{l_T \cdot r_K \sin(\phi)}{2 \cdot l \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right) \\v_{oTy} &= r_K \cdot \omega_K \cdot \left(1 - \frac{l_T}{l} \right) \cdot \cos(\phi)\end{aligned}$$

Známé setrvačné vlastnosti:

- | | |
|--|----------|
| 1) Moment setrvačnost kliky k ose rotace | J_k |
| 2) Hmotnost pístu | mP |
| 3) Moment setrvačnosti ojnice k jejímu těžišti | J_{oT} |
| 4) Hmotnost ojnice | m_o |

Redukovaný moment setrvačnosti:

$$\begin{aligned}J_{RED} \cdot \omega^2_K &= J_K \cdot \omega^2_K + mP \cdot vP^2 + J_{oT} \cdot \omega_o^2 + m_o \cdot v_{oT}^2 \\J_{RED} &= J_K + mP \cdot \left(-r_K \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{l_T \cdot r_K \sin(\phi)}{2 \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right)^2 \right) + J_{oT} \cdot \left(r_K \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right)^2 + \\&+ m_o \cdot \left(-r_K \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{l_T \cdot r_K \sin(\phi)}{2 \cdot l \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right)^2 + \left(r_K \cdot \left(1 - \frac{l_T}{l} \right) \cdot \cos(\phi) \right)^2 \right)\end{aligned}$$

Redukovaný moment působící na kliku

$$\vec{M}_{RED} \cdot \bar{\omega}_K = \vec{M}_K \cdot \bar{\omega}_K + \vec{F}_p \cdot \vec{v}_p$$



M_{RED} Redukovaný moment je kladný proti směru hodinových ručiček.

M_K Moment působící na kliku kladný proti směru hodinových ručiček.

F_P Síla působící na píst, kladná ve směru zvětšující se souřadnice x.

$$M_{RED} = M_K - F_p \cdot r_K \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{r_K \cdot \sin(\phi)}{2 \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right)$$

První derivace má po dosazení velmi dlouhý tvar i po úpravách:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{RED}}{d\phi} = & \frac{-\sin(2\cdot\phi) \cdot (l_o^2 - r_K^2)}{(l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi))^2} \cdot r_K^2 + 2 \cdot r_K^2 \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{r_K \cdot \sin(2\cdot\phi)}{2 \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right) \cdot \left(\cos(\phi) + \frac{r_K \cdot \cos(2\cdot\phi) \cdot (l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)) + \frac{1}{4} \cdot r_K^2 \cdot \sin^2(2\cdot\phi)}{(l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ & + 2 \cdot r_K^2 \cdot \left(\sin(\phi) + \frac{r_K \cdot l_T \cdot \sin(2\cdot\phi)}{2 \cdot l_o \cdot \sqrt{l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)}} \right) \cdot \left(\cos(\phi) + l_T \cdot \frac{r_K \cdot \cos(2\cdot\phi) \cdot (l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi)) + \frac{1}{4} \cdot r_K^2 \cdot \sin^2(2\cdot\phi)}{l_o(l_o^2 - r_K^2 \cdot \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}} \right) + l_o \cdot r_K^2 \cdot \sin(2\cdot\phi) \cdot \left(1 - \frac{l_T}{l_o} \right) \end{aligned}$$

Pohybová rovnice pak má tvar:

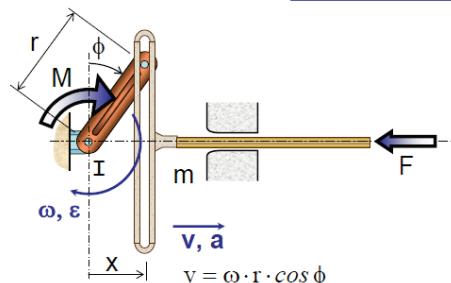
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dJ_{RED}}{d\phi} \cdot \dot{\phi}^2 + J_{RED} \cdot \ddot{\phi} = M_{RED}$$

Po dosazení jí lze v tomto případě řešit jen numericky. Vždy je vhodné využít nějaký matematický program.

Pozn. Získat derivace je možno i jiným jednodušším způsobem.

1.1.2 Příklad

Napište pohybové rovnice pro daný mechanismus.



Kinematické vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\phi) \\ \omega &= \dot{\phi} \\ \epsilon &= \ddot{\phi} \\ v &= r \cdot \cos(\phi) \cdot \dot{\phi} \\ a &= r \cdot (-\sin(\phi) \cdot \dot{\phi}^2 + \cos(\phi) \cdot \ddot{\phi}) \end{aligned}$$

Redukce momentu:

$$M_{RED} \cdot \omega = M \cdot \omega - F \cdot v$$

$$M_{RED} = M - F \cdot r \cdot \cos(\phi)$$

Redukce setrvačných vlastností:

$$J_{RED} \cdot \omega^2 = I \cdot \omega^2 + m \cdot v^2$$

$$J_{RED} = I + m \cdot (r \cdot \cos(\phi))^2$$



Pohybová rovnice má tvar:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dJ_{RED}}{d\phi} \cdot \dot{\phi}^2 + J_{RED} \cdot \ddot{\phi} = M_{RED}$$
$$(I + m \cdot r^2 \cdot \cos^2(\phi)) \cdot \ddot{\phi} - m \cdot r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \dot{\phi}^2 = M - F \cdot r \cdot \cos(\phi)$$

Hledáme-li řešení úlohy druhého druhu (jsou dány síly a momenty a hledáme pohyb) pak lze rovnici řešit jen numericky. Jak moment, tak síla mohou být funkcií času.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.





evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYSOKÁ ŠKOLA BÁNSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA FAKULTA STROJNÍ



DYNAMIKA

Vybrané kapitoly

Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

Ostrava 2013

© Ing. Mgr. Roman Sikora, Ph.D.

© Vysoká škola bánská – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3039-1



Tento studijní materiál vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu (ESF) a rozpočtu České republiky v rámci řešení projektu: CZ.1.07/2.2.00/15.0463, MODERNIZACE VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ A DIDAKTICKÝCH METOD

OBSAH

1	VYBRANÉ KAPITOLY	3
1.1	Ráz těles- Zjednodušená Newtonova teorie rázu	4
1.2	Příklady k procvičení.....	6
1.2.1	Příklad 1.....	6
1.2.2	Příklad 2.....	6
1.2.3	Příklad 3.....	7
1.3	Pohyb těles s proměnnou hmotností.....	7
1.3.1	Příklad 1.....	8
1.3.2	Příklad 2.....	9
1.4	Lineární kmitání s jedním stupněm volnosti.....	9
1.4.1	Příklad.....	15
1.4.2	Příklady k procvičení.....	16
1.5	Závěr	19
2	POUŽITÁ LITERATURA.....	20



1 VYBRANÉ KAPITOLY



STRUČNÝ OBSAH PŘEDNÁŠKY:

Vybrané kapitoly.

Ráz těles. (zjednodušená teorie).

Pohyb těles s proměnnou hmotností.

Lineární kmitání s jedním stupněm volnosti.

Volné netlumené kmitání.

Volné tlumené kmitání.

Kmitání buzené harmonickou silou a odstředivou silou.

Příklady k procvičení.



MOTIVACE:

Jak se odrazí kulečníková koule, jestliže se do ní trefí jiná kulečníková koule. Tuto předpověď umožní teorie rázu. Je pravda, že znalost teorie z Vás neudělá mistra kulečníku, ale i tak Vám může pomoci. Toto se netýká jen kulečníkových koulí, ale jiných těles (části strojů, aut atd.).

Podobně pokud Vás bude zajímat, jak se pohybuje raketa ztrácející hmotnost se spotřebovaným palivem, věnujte se druhé části této kapitoly. Hmotnost v pohybové rovnici je často považována za konstantu, ale není tomu vždy tak i když zůstaneme v rámci Newtonovské mechaniky.

Mechanické kmitání doprovází chod každého stroje. S nárůstem výkonu se často zvětšují nežádoucí kmity a pomocí jejich měření lze usoudit na druh poruchy stroje. Kmitání může plnit i užitečné funkce u zhutňovačů, vibračních dopravníků, vibračních pil a podobně. Znalosti kmitání lze využít jak při konstrukci strojů, tak při jejich diagnostice.



CÍL:

Ráz těles.

Pohyb těles s proměnnou hmotností.

Volné lineární kmitání s jedním stupněm volnosti.

Buzené lineární kmitání s jedním stupněm volnosti (fázová a amplitudová charakteristika).



1.1 RÁZ TĚLES- ZJEDNODUŠENÁ NEWTONOVA TEORIE RÁZU

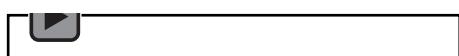
Kromě zjednodušené teorie rázu existují ještě jiné teorie rázu jako Hertzova teorie či vlnová teorie rázu, které jsou přesnější, ale zároveň složitější.

Newtonova teorie vychází z těchto předpokladů

- 1) **Tělesa jsou tuhá.**
- 2) Doba rázu je krátká (méně než 0,001 s) a poloha tělesa se v této době nemění.
- 3) Pro opravu nedokonalé pružnosti rázu se zavádí koeficient restituce.
- 4) Předpokládá se, že jde o koule (nebo tělesa, jejichž rozměry se ve směru rázu příliš neliší).



Audio 1.1 Předpoklady Newtonovy teorie.

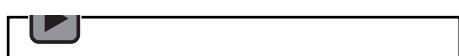


U těles známe hmotnost, polohu těžiště, moment setrvačnosti a součinitel restituce. Pak z rychlostí před rázem lze určit rychlosti po rázu. Nelze určit síly při rázu ani dobu trvání rázu.

Součinitel restituce ϵ je záporně vzatý podíl rozdílu rychlostí těles po rázu a před rázem.



Audio 1.2 Součinitel restituce.



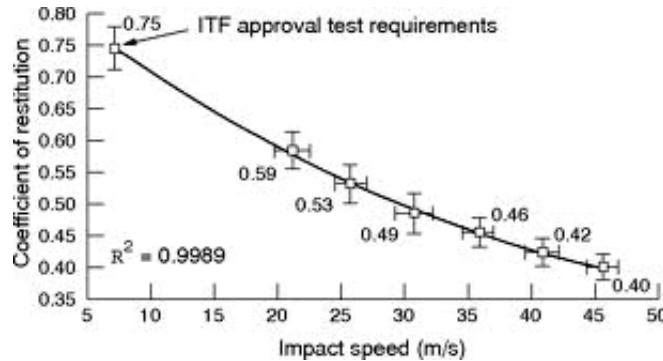
$$\epsilon = -\frac{v_{11} - v_{21}}{v_{10} - v_{20}}$$

v_{10} , v_{11} jsou rychlosti prvního tělesa před rázem a po rázu

v_{20} , v_{21} jsou rychlosti druhého tělesa před rázem a po rázu.

Součinitel restituce závisí na materiálu, rozdílu rychlostí, tvaru i velikosti těles. Jeho hodnoty klesají se vzrůstající vzájemnou rychlostí před rázem k určité limitní hodnotě.

Pro tenisový míček a raketu je možno vyjádřit závislost mezi vzájemnou rychlostí míčku a rakety (impact speed) a koeficientem restituce (Coefficient of restitution) následujícím grafem:



Zde není uvedena tvrdost výpletu ani značka míčku, proto je daný graf jen orientační.

Důležitým zákonem při výpočtu rázu je zákon zachování hybnosti zákon zachování momentu hybnosti.

**Audio 1.3 Zákon zachování hybnosti.**

$$m_1 \cdot \vec{v}_{10} + m_2 \cdot \vec{v}_{20} = m_1 \cdot \vec{v}_{11} + m_2 \cdot \vec{v}_{21}$$

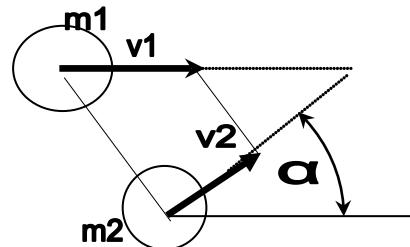
$$I_1 \cdot \vec{\omega}_{10} + I_2 \cdot \vec{\omega}_{20} = I_1 \cdot \vec{\omega}_{11} + I_2 \cdot \vec{\omega}_{21}$$



1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.2.1 Příklad 1

Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují rychlostmi v_1 a v_2 úhel který svírá rychlosť v_2 s vodorovnou rovinou je α a jejich relativní rychlosť leží na spojnici středů. Koeficient restituice je ε .



Určete:

- 1) Rychlosť po rázu (jedná se o vektory, to znamená i směr).
- 2) Celkovou energii přeměněnou na jiné formy energie (označováno jako ztrátová energie).

$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}$$

$$v_{10} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

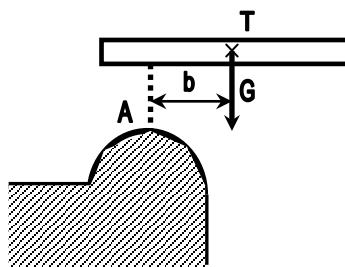
$$v_{20} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\alpha = 50^\circ$$

$$\varepsilon = 0,75$$

1.2.2 Příklad 2

Homogenní tyč o hmotnosti m a momentu setrvačnosti k těžišti I_T dopadne na podložku z výšky h v bodě A viz obrázek. Předpokládejte pružně plastický ráz s koeficientem rázu ε .



Určete obecně:

- 1) Rychlosť dopadu.
- 2) Rychlosť bodu A na tyči po odrazu.
- 3) Rychlosť těžiště tyče po rázu a úhlovou rychlosť tyče po rázu.
- 4) Úbytek kinetické energie soustavy během rázu.

(řešte obecně)



1.2.3 Příklad 3

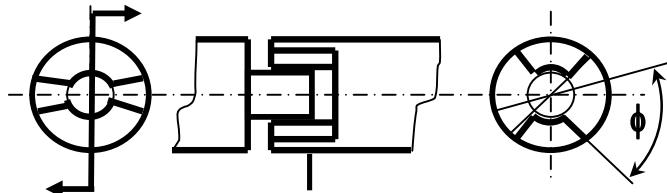
U zubové spojky určete:

- 1) Úhlové rychlosti po rázu **ω11, ω21**.

Nejprve vypočtěte ω_{10} hnací strany před rázem pomocí momentu setrvačnosti J_1 a momentu síly M_h a kinematických vztahů)

- 2) Dobu mezi prvním a druhým rázem. $t_{1,2}$.

- 3) Ztrátovou energii W_z (přeměněnou na jiné formy energie než na pohybovou energii) při rázu.



Jestliže hnací strana spojky je hnána momentem **M_h** a má moment setrvačnosti **J_1** . Hnaná strana spojky má moment setrvačnosti **J_2** a je na počátku v **klidu**. Úhel rozevření zubové mezery je ϕ . Na počátku je spojka otevřená, to znamená, že než dojde k rázu, otočí se hnací strana vůči hnané o úhel rozevření zubové mezery spojky ϕ . Součinitel restituice je ϵ . Použijte zjednodušenou teorii rázu. Hnaná strana je na počátku v klidu.

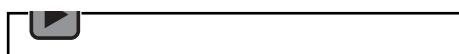
$$\begin{aligned}\phi &= 70^\circ \\ J_1 &= 0,8 \text{ kg.m}^2 \\ J_2 &= 1,4 \text{ kg.m}^2 \\ M_h &= 500 \text{ N.m} \\ \epsilon &= 0,8\end{aligned}$$

1.3 POHYB TĚLES S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ.

Proměnnou hmotnost nemusí mít jen tělesa pohybující se rychlosťí blízkou rychlosťi světla, ale i tělesa mnohem pomalejší. Příkladem může být horkovzdušný balón, kde při stoupání se k němu postupně přibírá lano, raketa, jejíž hmotnost klesá v důsledku spalování paliva atd. Je nutno použít příslušnou pohybovou rovnici. Zde jsou uvedeny jen příklady pro pohyb hmotného bodu, rovnice pro pohyb těles jsou obdobné. Po odvození dostaneme rovnici.



Audio 1.4 Pohyb těles.



$$\sum \vec{F} = \frac{d(\vec{p})}{dt} = \dot{m} \cdot \vec{v}_{rel} + m \cdot \dot{\vec{v}}$$

kde v_{rel} je relativní rychlosť pohybu přibývajících částic vůči tělesu. Je nutno důsledně dodržovat znaménka a uvědomit si, že většinou hmotnost ubývá a relativní rychlosť bývá záporná, ale nemusí to tak být vždy.



1.3.1 Příklad 1

Napište pohybovou rovnici raketoplánu, který má s přídavnými nádržemi hmotnost $m=2\ 052\ 443$ kg. Při startu vylétají spaliny relativní rychlostí $v_{rel}=4500$ m.s $^{-1}$. Reaktivní síla je úměrná velikosti okamžité hmoty raketoplánu $F=k \cdot m(t)$ ($k=40$ m.s 2). Určete, kdy v jaké výšce a kdy dosáhne první kosmické rychlosti.

Řešení:

Hmotnost rakety v čase t je:

$$m(t) = m_0 \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{v_{rel}}}$$

$$m(t) = 2052443 \cdot e^{\frac{-0,002t}{4500}}$$

Na raketoplán působí jen přitažlivá síla Zeměkoule. Kladné znaménko uvažujeme směrem vzhůru a v_{rel} má orientaci dolů, proto má druhý člen záporné znaménko. M_z je hmotnost Země a κ je Newtonova gravitační konstanta, R_z poloměr Země. Pohybová rovnice má následující tvar.

$$m(t) \cdot \dot{v}(t) = m(t) \cdot k - \kappa \cdot \frac{m(t) \cdot M_z}{(R_z + y)^2}$$

$$\frac{v(t) \cdot dv}{dy} = k - \kappa \cdot \frac{M_z}{(R_z + y)^2}$$

Po zkrácení a zavedení kinematického vztahu pro zrychlení $M_z \cdot \kappa = g \cdot R_z^2$; y_{max} je označena maximální výška a počáteční výška je nulová. Řešení rychlosti má tvar.

$$v = \sqrt{2 \cdot \left(k \cdot y_{max} + g \cdot R_z^2 \cdot \left(\frac{1}{R_z + y_{max}} - \frac{1}{R_z} \right) \right)}$$

Z této rovnice je možno vypočítat y_{max} a pro v je rovno první kosmické rychlosti (7,91 km.s $^{-1}$) vyjde $y_{max}=993$ km.

Užitím diferenciálních rovnic pro čas pak vyjde:

$$t = \int_{R_z}^{R_z + y_{max}} \frac{dy}{\sqrt{2 \cdot \left(k \cdot (y) + g \cdot R_z^2 \cdot \left(\frac{1}{R_z + y} - \frac{1}{R_z} \right) \right)}}$$

Řešení podobných rovnic je vhodné provést numericky $t=254,5$ s.



1.3.2 Příklad 2

Horkovzdušný balón má po hmotnost $m=400$ kg působí na něj vztlaková síla $F_v=5400$ N, jakmile balón stoupá, přibírá i dlouhé lano, které zvyšuje jeho hmotnost. Jeden metr lana váží 0,5 kg. Určete, jaká bude maximální rychlosť stoupání balónu a v jaké výšce bude v tomto okamžiku.

(Hmotnost lana + balónu se zvyšuje).



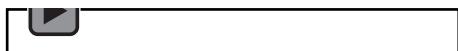
1.4 LINEÁRNÍ KMITÁNÍ S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Kmitání je takový pohyb, při němž bud' výchylka nebo rychlosť či zrychlení osciluje kolem střední polohy. Volné kmitání je takové že během kmitání nepůsobí na bod (těleso, soustavu těles), kromě síly "pružiny" žádná další síla či moment síly jako v případě vynuceného kmitání.

Modelem kmitající soustavy je těleso na pružině s tlumičem. V případě lineárního kmitání je síla v pružině lineárně úměrná výchylce a síla v tlumiči je lineárně úměrná rychlosti. Je třeba zvážit, s jakou přesností model vystihuje vlastnosti skutečné soustavy a zda není nutno použít přesnější model (nelineární kmitání, více stupňů volnosti, kontinuum...).



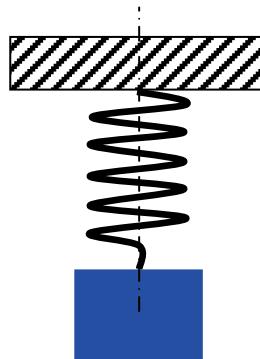
Audio 1.5 Kmitání.



Nejjednodušším případem je **volné netlumené lineární kmitání s jedním stupněm volnosti**. Síla v pružině je úměrná výchylce, kde konstantě úměrnosti říkáme tuhost pružiny k .

$$F = -k \cdot y$$

Je-li těleso v klidu v rovnovážné poloze, působí na něj jeho tíha a síla předpětí pružiny, které se vzájemně vyruší. Po vychýlení tělesa z rovnovážné polohy se pak zvětší síla v pružině a po uvolnění tělesa se těleso začne pohybovat.



Po odečtení tíhy a předpětí pružiny má pohybová rovnice tvar:

$$F = m \cdot a$$

Zrychlení je druhou derivací výchylky podle času pak získáme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany (homogenní):

$$\begin{aligned} a &= \ddot{y} \\ m \cdot \ddot{y} + k \cdot y &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Pro její řešení použijeme substituci:

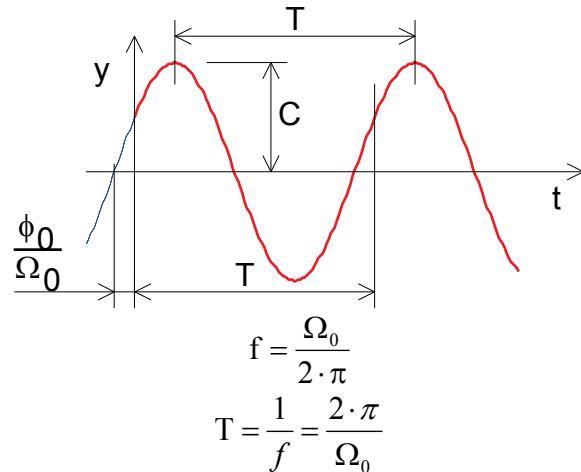
$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{y} + \Omega_0^2 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$



kde Ω_0 nazýváme vlastní kruhovou frekvenci netlumeného kmitání. Řešení této rovnice lze zapsat několika ekvivalentními rovnicemi.

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cdot e^{i \cdot \Omega_0 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \Omega_0 \cdot t} \\y &= A \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t) \\y &= C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \phi_0)\end{aligned}$$

Kde C_1 a C_2 ; A a B či C a ϕ_0 jsou integrační konstanty, které lze určit, známe-li v nějakém známém čase výchylku a rychlosť, tomu se říká počáteční podmínky. Poslední rovnice má i určitý fyzikální význam při rozvinutí výchylky v čase, kde konstantě C říkáme amplituda a ϕ_0 říkáme počáteční fáze. Nejkratší nenulový čas mezi tím, kdy těleso prochází stejným místem ve stejném směru, se nazývá perioda. Frekvence je převrácenou hodnotou periody.



V tomto případě by amplituda zůstávala neustále stejná.

V reálných dějích se vždy vyskytují pasivní odpory, díky nimž se amplituda postupem času zmenšuje. Nejpoužívanější model je takový, kdy je kmitání tlumeno silou F_b úměrnou rychlosti kmitání. Tato síla působí proti rychlosti s koeficientem úměrnosti b , kterému se říká koeficient viskózního tlumení.

$$F_b = -b \cdot v = -b \cdot \dot{y}$$

Pohybová rovnice pak má tvar:

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$$

Toto je opět lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany (homogenní).

Její řešení je:

$$y = C_1 \cdot e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}\right)t} + C_2 \cdot e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}\right)t}$$

Kde je použita substituce δ , které říkáme konstanta doznívání.

$$\delta = \frac{b}{2 \cdot m}$$

Pro podkritické tlumení (δ je menší než Ω_0), které je obvyklé u strojů lze řešení upravit na některý z tvarů:

$$y = e^{-\delta \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega \cdot t)]$$



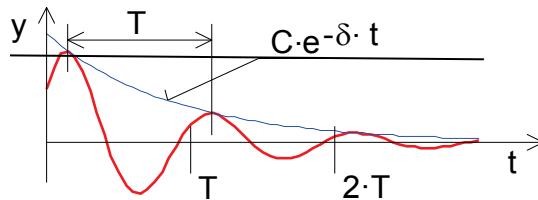
$$y = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \phi_0)$$

Kde vlastní kruhová frekvence Ω je o něco nižší než Ω_0 a perioda o něco delší podle vztahu:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega}$$

V grafickém znázornění pak:



Pro přepočet integračních konstant platí:

$$A = C \cdot \sin \phi_0$$

$$B = C \cdot \cos \phi_0$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

\square_0	$B > 0$	$B = 0$	$B < 0$
$A > 0$	$\phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$	$\phi_0 = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$	$\phi_0 = \arctan \frac{A}{B} + 180^\circ$
$A = 0$	$\phi_0 = 0^\circ$	triviální řešení	$\phi_0 = 180^\circ = \pi$
$A < 0$	$\phi_0 = \arctan \frac{A}{B}$	$\phi_0 = -90^\circ = -\frac{1}{2}\pi$	$\phi_0 = \arctan \frac{A}{B} - 180^\circ$

Tlumení je možno též definovat logaritmickem poměru dvou po sobě následujících amplitud. Tento poměr se nazývá *logaritmický dekrement tlumení* ϑ . Přibližná představa logaritmického dekrementu tlumení je taková jako kdyby se míč spuštěný z určité výšky odrazil do menší výšky, a poměr původní a následující výšky zlogaritmujeme, pak dostaneme ϑ . Např. pro míč spuštěný z výšky 2,718 m, který se odrazí do výšky cca 1 m je logaritmický dekrement tlumení ϑ přibližně roven jedné.

$$\vartheta = \ln \frac{y_{(t)}}{y_{(t+T)}} = \delta \cdot T$$

a odtud:

$$\delta = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot \pi^2}{\vartheta^2}}} = \Omega_0 \cdot \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + 4 \cdot \pi^2}}$$

V případě buzeného kmitání na těleso, kromě síly v pružině a v tlumiči ještě působí další síla, která se v čase mění. Pohybová rovnice pak má tvar:

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F(t)$$

Pro řešení pak lze použít bud' metodu variace konstant, nebo známé řešení při speciálním tvaru pravé strany. Nejčastějšími případy síly je buzení rotující hmotou a buzení silou harmonického průběhu.



Buzení silou harmonického průběhu (velikost síly se mění podle sinusovky) a pohybová rovnice má následující tvar:

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F_A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_z)$$

Řešení se pak skládá ze součtu homogenního řešení a partikulárního řešení. Homogenní řešení je stejné, jako kdyby na pravé straně rovnice byla nula a bylo popsáno dříve. Zde lze pro určení partikulárního řešení použít metodu speciální pravé strany, po odvození vyjde:

$$y_p = y_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_z - \phi)$$

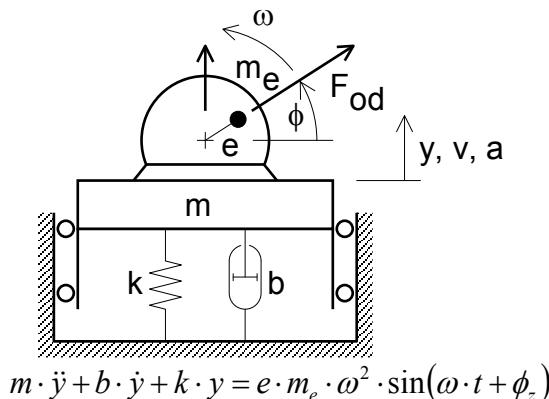
kde:

$$y_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \omega \cdot \delta)^2}}$$

$$\text{pro } \Omega_0 > \omega \quad \phi = \arctan \frac{2 \cdot \omega \cdot \delta}{\Omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{pro } \omega > \Omega_0 \quad \phi = \arctan \frac{2 \cdot \omega \cdot \delta}{\Omega_0^2 - \omega^2} + \pi$$

Podobně pro buzení rotující hmotou, což je dosti častý případ u strojů s rotačním pohybem, které nejsou dokonale vyvážené. Reálně není žádný stroj dokonale vyvážen. V tomto případě je hmotnost nevývažku m_e a jeho excentricita je e , stroj rotuje úhlovou rychlosť ω .



Řešení partikulární části této lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou má následující tvar.

$$y = y_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi - \phi_z)$$

Pozor zde y_a a úhel ϕ nejsou integračními konstantami, ale lze je vypočítat. Většinou nás zajímá hlavně amplituda vynuceného kmitání y_a ,

$$y_a = \frac{m_e \cdot e \cdot \omega^2}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$$

Závislosti amplitudy na budoucí frekvenci ω se říká amplitudová charakteristika a závislosti úhlu Φ na ω se říká fázová charakteristika. Jevu, kdy amplituda dosahuje maximální hodnoty, se říká rezonance. Určit rezonanční frekvenci je možno jako lokální extrém dané funkce.

Pro buzení harmonickou silou lze rezonanční frekvenci určit z následujícího vztahu.

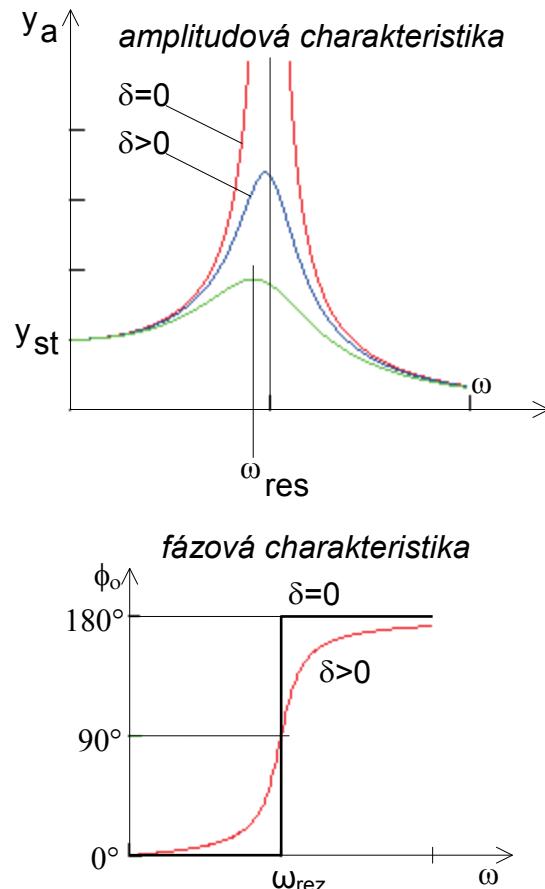


$$\omega_{res} = \sqrt{\Omega_o^2 - 2 \cdot \delta^2}$$

Pro buzení rotující hmotou vyjde rezonanční úhlová frekvence:

$$\omega_{res} = \frac{\Omega_o^2}{\sqrt{\Omega_o^2 - 2 \cdot \delta^2}}$$

Úhel Φ_0 lze vypočítst stejně jako u kmitání buzeného harmonickou silou.



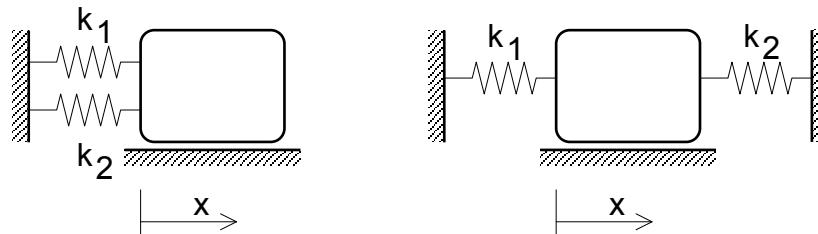
Jakoukoliv periodickou sílu lze pomocí Fourierova rozkladu rozložit na součet harmonických složek. Návod na rozklad naleznete např. v technickém průvodci 66 MECHANIKA II. díl Dynamika [1].

S kmitáním souvisí rovněž sčítání tuhosti. Není dobré si pamatovat, že se jedná o obdobu výsledné kapacity kondenzátorů, protože "zapojení" může vypadat různě a přitom se výsledná tuhost určuje stejně. Většinou se nejedná o pružiny, pružiny představují jen model.



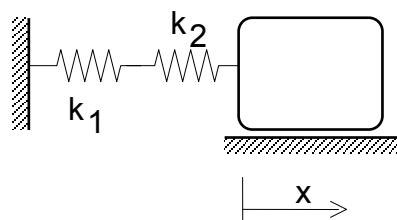
Paralelní spojení je takové, kdy deformace obou pružin je stejná, výsledná direkční síla je dána součtem direkčních sil obou pružin. Výsledná tuhost je dána součtem dílčích tuhostí.

$$k = k_1 + k_2$$



Sériové spojení je takové, kdy se deformace obou pružin sčítají, direkční síly v obou pružinách jsou stejné. Převrácená hodnota výsledné tuhosti je dána součtem převrácených hodnot dílčích tuhostí:

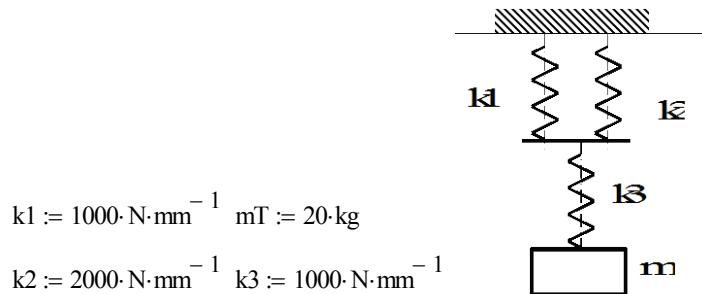
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



Složitější modely kmitání lze najít například v technickém průvodci 66 MECHANIKA II. díl Dynamika [1].

1.4.1 Příklad

Závaží o hmotnosti mT je zavěšeno na třech pružinách dle obrázku. Průměry pružin k_1 a k_2 jsou spojeny deskou ke které je připojena průměr pružiny k_3 .



Určete:

- 1) Celkovou tuhost pružin
- 2) Periodu kmitání (předpokládejte netlumené kmitání)

Odpověď:

Celková tuhost soustavy je:

$k_c = 750 \cdot N \cdot mm^{-1}$ což je $k_c = 750000 \cdot N \cdot m^{-1}$ což je $k_c = 750000 \cdot kg \cdot s^{-2}$

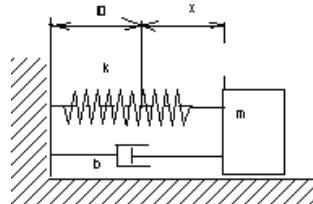
Perioda kmitání je $T = 0,0324 \text{ s}$



1.4.2 Příklady k procvičení

1.4.2.1 Příklad 1

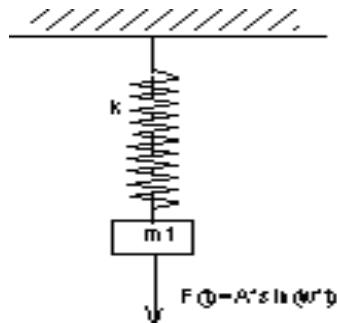
Těleso o hmotnosti m kmitá na pružině o tuhosti k . Soustava je tlumena silou F úměrnou rychlosti v tak, že tlumící síla má velikost $F=b.v$. Určete periodu kmitání a dobu t_1 za jakou se klesne amplituda na pětinu původní hodnoty. $k=1 \text{ N.mm}^{-1}$; $b=20 \text{ kg.s}^{-1}$; $m=10 \text{ kg}$.



Výsledky: perioda $T_1=0,631 \text{ s}$; doba poklesu $t_p=1,609 \text{ s}$.

1.4.2.2 Příklad 2

Určete amplitudu (ustálenou) se kterou kmitá těleso o hmotnosti m_1 . Na těleso působí budící harmonická budící síla $F(t)$ s amplitudou A a budící frekvencí ω . Při zavěšení břemene hmotnosti m_1 se pružina natáhla o délku l . Tlumení je možno zanedbat. Určete při jaké budící frekvenci (se stejnou budící amplitudou) bude amplituda dvojnásobná.



$$m_1=2 \text{ kg}$$

$$l=2 \text{ mm}$$

$$A=10 \text{ N}$$

$$\omega=50 \text{ s}^{-1}$$

$$F=A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

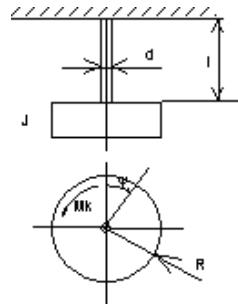
Výsledky:

amplituda $A_{\text{mp}}=1,457 \text{ mm}$; existují dvě budící frekvence, při kterých bude amplituda dvojnásobná $\omega_1=65,59 \text{ s}^{-1}$; $\omega_2=74,19 \text{ s}^{-1}$).



1.4.2.3 Příklad 3

Určete periodu vlastního netlumeného kmitání kotouče o hmotnosti m_{Va} , poloměru R_{Va} , moment setrvačnosti kotouče je $(m \cdot r^2)/2$. Kotouč je zavěšený na osově symetrickém tenkém, štíhlém prutu, kruhového průřezu průměru d délky l . Závislost úhlu zkroucení na zatěžujícím momentu je $\theta = M_k l / (G \cdot J_p)$, z této závislosti určete torzní tuhost. J_p je kvadratický plošný moment setrvačnosti prutu. Určete, jak se tato perioda změní, zvýší-li se délka zavěšení l na dvojnásobek. Zde úhel zkroucení odpovídá výchylce, moment síly síle a moment setrvačnosti hmotnosti.



$$l=100 \text{ mm}$$

$$d=5 \text{ mm}$$

$$G=0,8 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$$

$$R_{Va}=100 \text{ mm}$$

$$m_{Va}=10 \text{ kg}$$

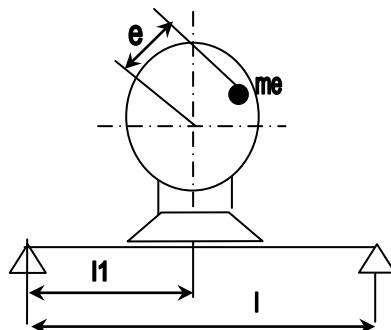
Výsledky: perioda $T_0=0,201 \text{ s}$; při dvojnásobné délce $T_2=T_0 \cdot \sqrt{2}=0,284 \text{ s}$)

1.4.2.4 Příklad 4

Uprostřed nosníku o momentu setrvačnosti plochy J a modulu pružnosti E je umístěn motor o hmotnosti m_S (včetně nevývažku). Hmotnost nevývažku je m_e a je umístěn ve vzdálenosti e od středu otáčení. Logaritmický dekrement tlumení je v . Motor se otáčí otáčkami n_p .

Určete:

- 1) Tuhost nosníku (výsledek $k=2625 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$).
- 2) Konstantu doznívání (výsledek $\delta=30,39 \text{ s}^{-1}$).
- 3) Amplitudu vynuceného kmitání při pracovních otáčkách (výsledek $y_A=0,023 \text{ mm}$).
- 4) Jaká bude amplituda, budou-li otáčky nekonečné (velmi vysoké) (výsledek $y_\infty=0,2 \text{ mm}$).



$$n_p=500 \text{ otáček za minutu}$$

$$v=1,2 \text{ logaritmický dekrement tlumení}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \text{ modul pružnosti v tahu}$$



mS= 100 kg hmotnost motoru včetně nevývažku

me= 2 kg hmotnost nevývažku

J = 40.cm⁴ osový moment setrvačnosti

l1 = 400 mm délka od podpory ke středu motoru

L = 800 mm celková délka nosníku

e0 = 10 mm excentricita nevývažku

np= 500 ot/min, otáčky motoru

Návod:-průhyb nosníku lze vypočítat z následujícího vztahu:

$$y = \frac{F \cdot l_1^2 \cdot (l - l_1)^2}{E \cdot J \cdot l}$$

1.4.2.5 Příklad 5

Na nosníku délky **l**, momentu setrvačnosti průřezu **J**, z materiálu o modulu pružnosti **E** je uprostřed položeno břemeno o tíze **mT**. Na toto těleso působí harmonicky se měnící síla o amplitudě **Fo** a kruhové frekvenci **ω**. Nosník má vůči tělesu zanedbatelnou hmotnost. Logaritmický dekrement **v** tlumení byl určen experimentálně.

l= 2000.mm

J=40.cm⁴

E=2,1.105.MPa

mT=100. Kg

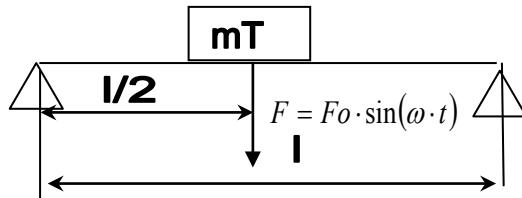
Fo=100.N

ω=50.s⁻¹

v=0,8

Určete:

- 1) Tuhost soustavy **k**.
- 2) Vlastní kruhovou frekvenci tlumeného kmitání **Ω**.
- 3) Amplitudu vybuzeného kmitání **yA**.
- 4) Rezonanční kruhovou frekvenci **ω_{rez}** a amplitudu v rezonanci při stejně amplitudě **Fo** budící síly **yArez**.



návod průhyb y lze vyjádřit:

$$y = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

Výsledky:

k=504000 N.s⁻¹

Ω=69,93 s⁻¹

yA=0,3800 mm

yArez=0,584 mm.



1.5 ZÁVĚR

Pro řešení problémů dynamiky je nutná nejen znalost vztahů dynamiky, ale také vždy zapojení logických úvah o možnosti zjednodušení v rámci požadované přesnosti. Pro porozumění dynamiky řešit co nejvíce problémů a během nich získávat zkušenosti.



2 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R.: Mechanika II. díl - Dynamika; Technický průvodce, SNTL Praha, 1987.
- [2] Brát V., Rosenberg J., Jáč V.: Kinematika SNTL Praha 1987.
- [3] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika, Praha, SNTL, 1989.
- [4] PODEŠVA, J.: Dynamika v příkladech. Ediční středisko VŠB-TU Ostrava, 2005, s. 65. ISBN 80-7078-678-7.
- [5] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady – 1.díl. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika část 1 – Mechanika. Vysoké učení technické v Brně- Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha, 2000.

Internet

Studijní materiály:

<http://www.337.vsb.cz/studijni-materialy-109.html>.

